Concorso per l'ammissione al corso di Dottorato di Ricerca in Matematica, Informatica, Statistica - Ciclo XXX

Curriculum in Matematica

Prova 2

Si richiede ai candidati di svolgere alcuni dei seguenti esercizi

1. Sia $S(n, \mathbb{R})$ lo spazio delle matrici reali quadrate di ordine n simmetriche a coefficienti reali.

(a) Provare che l'applicazione $q : S(n, \mathbb{R}) \times S(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da

$$q(A, B) = \mathrm{Tr}(A \cdot B), \qquad A, B \in S(n, \mathbb{R})$$

è una forma bilineare definita positiva.

(b) Provare che, fissato $A \in S(n, \mathbb{R})$, l'applicazione $L_A(X) := AXA$ definisce un endomorfismo lineare di $S(n, \mathbb{R})$.

(c) Provare che L_A è autoaggiunto rispetto a q ed è diagonalizzabile per ogni $A \in S(n, \mathbb{R})$.

2. Sia R un anello in cui, per ogni $x \in R$, si ha $x^2 = x$ (un tale anello si dice *anello booleano*).

(a) Dimostrare che l'anello R ha caratteristica 2 ed è commutativo.

(b) Per ogni $x, y \in R$, si provi che l'ideale (x, y) è principale. Dedurre che ogni ideale finitamente generato di R è principale. Esistono anelli booleani dove non tutti gli ideali sono principali?

3. Sia G un gruppo e si definisca $S = \{x^2 y^{-2} \mid x, y \in G \setminus \{1\}\}$.

(a) Si provi che $N = \langle S \rangle$ è un sottogruppo normale di G.

(b) Posto $H = G/N$ dimostrare che, per ogni $u, v \in H \setminus \{1\}$, si ha $u^2 = v^2$. Dedurre da questo che, per ogni $h \in H$, $h^2 = 1$.

4. Sia $k \in (0, +\infty)$. Provare le seguenti affermazioni:

(a) se $u \in C^1(\mathbb{R})$ soddisfa $u'(x) \geq k\, u(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora

$$u(x)e^{-kx} \geq u(y)e^{-ky} \qquad \forall\, x,\, y \in \mathbb{R},\ x \geq y;$$

(b) se $u \in C^2(\mathbb{R})$ soddisfa $u''(x) \geq k^2\, u(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $\sup_{\mathbb{R}} u < +\infty$, allora

$$u(x)e^{kx} \leq u(y)\, e^{ky} \qquad \forall\, x,\, y \in \mathbb{R},\ \ x \geq y.$$

5. Sia $u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione convessa. Provare le seguenti affermazioni:

(a) se esistono punti $\alpha < \beta < \gamma$ tali che $u(\alpha) = u(\beta) = u(\gamma)$, allora u è costante sull'intervallo $[\alpha, \gamma]$;

(b) se u è superiormente limitata, allora u è costante su tutto $\mathbb{R}$;

(c) o u è costante o almeno uno dei limiti di u a $\pm\infty$ vale $+\infty$.

6. Introdurre il metodo iterativo di Jacobi per la risoluzione di un sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b},\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Quindi, assunti

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -2 \\ 1 & 1-\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (-1\,,\,-3)^T,$$

dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il metodo non è utilizzabile e, motivando la risposta, dire se per $\alpha = 3$ esso è convergente. Infine, scegliendo tale valore per il parametro α, eseguirne due iterazioni utilizzando come vettore di innesco il vettore $\mathbf{x}^{(0)} = (2\,,\,1)^T$ e confrontare la norma euclidea del residuo iniziale e di quello finale.

7. Dare la definizione di autovalore dominante di una matrice quadrata e dimostrare che esso esiste per la seguente matrice,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Fissato un vettore di innesco $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, non nullo, analizzare qualitativamente il comportamento della successione di vettori definita come segue,

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = A\mathbf{x}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

e dire se e come essa può essere utilizzata per approssimare l'autovalore dominante di A. Evidenziare infine quale problema computazionale insorge ad una certa iterazione per il calcolo della suddetta successione quando si utilizza un'aritmetica finita.

8. Dare la definizione di rivestimento di spazi topologici.

(a) Dati due spazi topologici X, Y di Hausdorff ed un omeomorfismo locale $p : X \to Y$ surgettivo e con fibra finita, dire se p è un rivestimento.

(b) Sia $\mathbb{S}^2$ la sfera $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e sia $X := \mathbb{S}^2 \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = y = 0,\ -1 \leq z \leq 1\}$. Dire se X può rivestire $\mathbb{S}^2$ o se può essere rivestito da $\mathbb{S}^2$.

(c) Descrivere il rivestimento universale $\pi : \tilde{X} \to X$ usando i seguenti punti:

(c1) si descriva $\pi^{-1}(\mathbb{S}^2)$;

(c2) dato $\gamma := X \cap \{x = 0,\ y \geq 0\}$, si descriva $\pi^{-1}(\gamma)$.

9. Sia X uno spazio topologico e si consideri la relazione seguente : dati $p, q \in X$, $p \sim q$ se e solo se $d(p) = d(q)$ per ogni funzione continua $d : X \to D$, dove D è uno spazio topologico discreto qualunque.

(a) Provare che $\sim$ è una relazione di equivalenza;

(b) Provare che le classi di equivalenza di $\sim$ sono sottospazi chiusi di X, che chiamiamo *quasi-componenti*;

(c) Provare che ogni componente connessa di X è contenuta in una quasi-componente;

(d) Sia X il sottospazio topologico di $\mathbb{R}^2$ dato da $X = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N},n>0}\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]\right) \cup \{(0,0)\} \cup \{(0,1)\}$. Trovare le componenti connesse e le quasi-componenti di X.

10. Data un'urna di composizione incognita U, contenente 4 palline bianche e nere, non tutte dello stesso colore, sia E l'evento "si estrae da U una pallina bianca".

Si consideri poi il seguente esperimento: si lancia un dado regolare a 6 facce e sia k il risultato (aleatorio) del lancio, si estrae quindi da U k volte una pallina, ogni volta riponendola poi nell'urna. Sia F l'evento "nelle k estrazioni si ottengono esattamente 4 palline bianche" e H_i l'evento "l'urna U contiene i palline bianche", (con $i = 1, 2$).

(a) Dire quale informazione probabilistica si può dedurre sulla composizione dell'urna dalla ipotesi $P(E) = \frac{1}{3}$, dopo aver riconosciuto che le possibili composizioni non possono, con questa assunzione, risultare equiprobabili.

(b) Dopo aver ricordato il teorema di Bayes si dimostri la compatibilità o meno della assunzione fatta nel punto a) e della seguente: $P(H_2|F) = \frac{1}{3}$. In caso affermativo si calcoli $P(H_1)$, considerando entrambe le assunzioni.

11. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ ax^3 & -1 \leq x < 0 \\ \frac{x+a^2}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

(a) Dopo aver ricordato le proprietà di una funzione di densità si dica per quali valori del parametro a la f è una funzione di densità e se ne calcoli la relativa funzione di ripartizione. Si calcoli poi il valore atteso e la varianza della variabile $Y = 7 - 3X$

(b) Si calcoli il coefficiente di correlazione σ_{XY}, dopo averne ricordate le proprietà.

(c) Si dica infine se la variabile aleatoria $Z = X^2+1$ ha densità e, in caso affermativo, la si calcoli.

12. In un piano orizzontale un punto P_1, di massa m_1, è vincolato a muoversi su una circonferenza di raggio R il cui centro può essere assunto come origine del riferimento cartesiano. Sul punto P_1 agisce unicamente la forza $\vec{F}(x,y) = -a\left(y^2\vec{i} + 2xy\vec{j}\right)$, dove $a > 0$ è una costante dimensionale, $\vec{i}, \vec{j}$ sono i versori del riferimento cartesiano (figura 1) e x, y sono le coordinate del generico punto del piano. Si chiede di

(a) dimostrare che $\vec{F}$ è conservativa e di calcolarne l'energia potenziale.

Scelta come coordinata lagrangiana per P_1 l'angolo ϑ indicato in figura, si chiede di

(b) individuare le configurazioni di equilibrio di P_1 e di discuterne la stabilità.

Insieme al punto P_1 si consideri ora un punto P_2, di massa m_2, su cui non agisce alcuna forza, ma che si muove mantenendo la sua ordinata y_2 costantemente uguale a quella di P_1. Si chiede di

(c) individuare il numero dei gradi di libertà del sistema, le coordinate lagrangiane opportune e di scrivere le equazioni di Lagrange di seconda specie del sistema.

13. Un punto materiale P di massa m si muove senza attrito su una retta orizzontale. Un'asta di massa trascurabile e lunghezza ℓ ha un estremo in P. L'altro estremo è fissato ad un punto materiale Q di massa m. Sul sistema agisce la sola forza di gravità diretta verticalmente.

(a) Scrivere la Lagrangiana per il sistema e le equazioni del moto.

(b) Determinare le soluzioni di equilibrio e discuterne la stabilità . Calcolare altresì la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ad eventuali equilibri stabili.

(c) Determinare eventuali integrali primi.

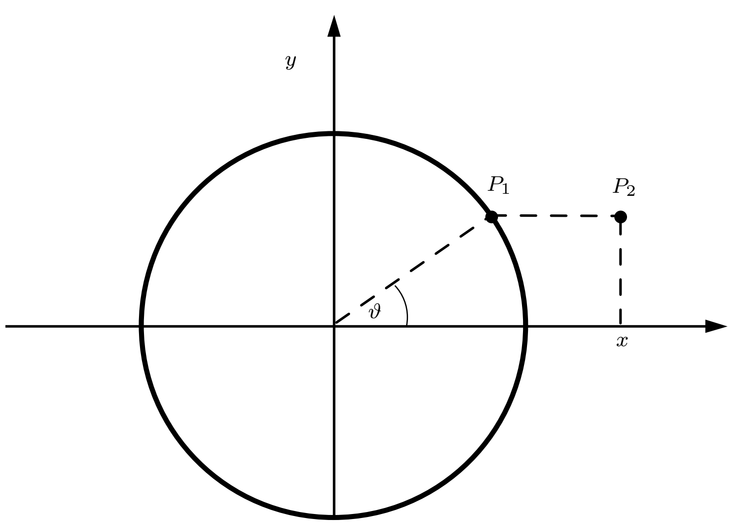

FIGURA 1.