ANNO PRIMO NOVEMBRE 1970

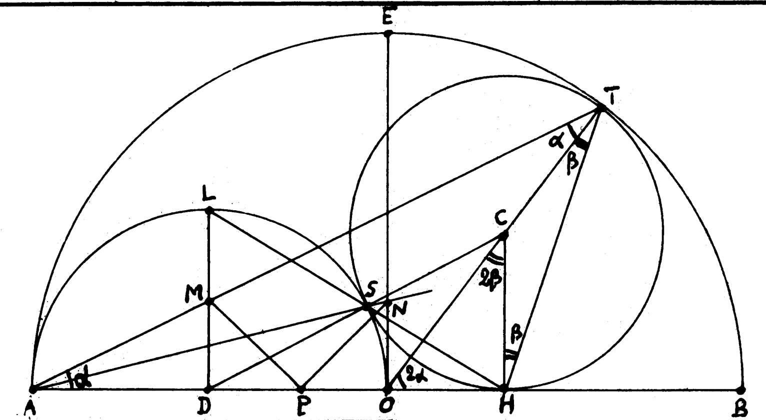
Angolo acuto

5

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

Pubblicazione mensile a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli 78 50131 FIRENZE

conto corrente postale
5/27919



Questa figura si riferisce alla risoluzione geometrica della Questione 6 (pagina 4)

ANGOLO ACUTO si pubblica in 9 fascicoli annuali nei mesi di gennaio, febbraio, marzo, aprile, maggio, giugno, ottobre, novembre, dicembre.

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio: i nuovi Abbonati hanno diritto a ricevere i fascicoli arretrati.

L'ABBONAMENTO rappresenta un atto

di CONSENSO
di SIMPATIA
di INCORAGGIAMENTO
di SOLIDARIETA'

Abbonamento annuale L. 1000 Un fascicolo Lire 150
Abbonamento sostenitore da Lire 1500 a Lire 3000
Ogni appassionato invii la sua quota, secondo le sue possibilità,
affinchè ANGOLO ACUTO possa migliorare e aumentare il numero delle pagine.

LA PALESTRA DELLE GARE

AVVERTENZE IMPORTANTI PER I RISOLUTORI. Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte. Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale. Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età. Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad:

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE

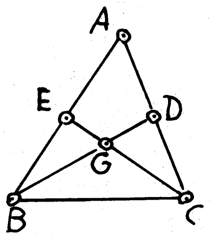
entro il 31 Dicembre 1970

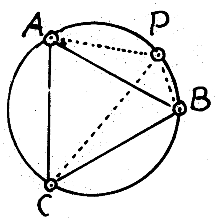
Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori. Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.

QUESTIONI PROPOSTE

(Non sono poste in ordine di difficoltà)

46. Se le mediane BD e CE di un triangolo ABC si incontrano nel punto G, dimostrare che il triangolo BCG è equivalente al quadrangolo AEGD.





47. Si consideri il triangolo equilatero ABC e la circonferenza circoscritta. Dimostrare, senza fare uso di nozioni di TRIGONOMETRIA, che detto P un punto qualunque dell'arco AB si ha:

$$PC = PA + PB \, .$$

48. Data la famiglia di parabole di equazione:

$$y = Kx^2 - 2(K-1)x - 3 \, ,$$

determinare le coordinate dei punti comuni a tutte le parabole. Studiare la curva luogo geometrico dei vertici delle parabole stesse.

49. Qual è la probabilità di vincere un TERNO giocando al Lotto quattro numeri per una sola "ruota"?

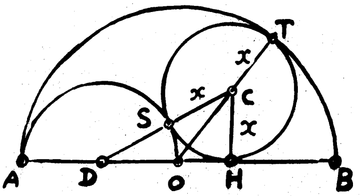
CRIPTARITMETICA

50. Determinare il numero ROMA, sapendo che:

$$(ROMA)^2 = \bigstar MR\blacktriangle ROMA.$$

QUESTIONE 6

La circonferenza di centro C e raggio x è tangente alla semicirconferenza di diametro $AB = 4a$, alla semicirconferenza di diametro $AO = 2a$ e al segmento OB.



Determinare x.
Chi sa risolvere il problema per via sintetica?

1ª RISOLUZIONE

inviata da Giorgio Franco di PADOVA, il quale ha inviato anche una risoluzione analitica.

Posto $CH = x$ risulta

$$DC = DS + SC = a + x,$$
$$OC = OT - CT = 2a - x.$$

Indicando con $2p$ ed S rispettivamente il perimetro e l'area del triangolo DCO si ha:

$$2p = (2a - x) + (a + x) + a = 4a;$$

e per la formula di ERONE

$$S = \sqrt{2a(2a-a)(2a-2a+x)(2a-a-x)},$$

ovvero

$$S = a\sqrt{2x(a-x)}\ . \qquad (I)$$

D'altra parte si ha anche:

$$S = \frac{1}{2}\,\overline{DO}\cdot\overline{CH} = \frac{1}{2}ax\ . \qquad (II)$$

Ne segue l'equazione:

$$\frac{1}{2}x = \sqrt{2x(a-x)}\ ,$$

da cui, dopo facili passaggi,

$$9x^2 - 8ax = 0 \qquad (III)$$

e risolvendo:

$$x_1 = 0\ , \quad x_2 = \frac{8}{9}a\ .$$

Per $x_1 = 0$ si ha una soluzione limite: i punti C, T, S e H coincidono con A.

Per $x_2 = \frac{8}{9}a$, si ha:

$$\overline{OC} = \frac{10}{9}a; \ \overline{OH} = \frac{2}{3}a = \frac{1}{3}\overline{OB}.$$

2ª RISOLUZIONE

inviata da Armando Roselli del L. Sc. "P. Paleocapa" di ROVIGO.

Per il teor. di Pitagora, dal triangolo rettangolo OCH si ha:

$$\overline{OH}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{CH}^2 =$$
$$= (2a - x)^2 - x^2 = 4a^2 - 4ax;$$

$$\overline{OH} = 2\cdot\sqrt{a^2 - ax}\ .$$

Ancora per il teor. di Pitagora dal triangolo rettangolo DCH si ha:

$$\overline{DC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{DH}^2\ ;$$

da cui l'equazione:

$$(a+x)^2 = x^2 + \left(a + 2\sqrt{a^2 - ax}\right)^2;$$

....

sviluppando si ritrova l'equazione III della 1ª RISOLUZIONE e le successive conclusioni.

RISOLUZIONE ANALITICA

Posto $\overline{OH} = x$; $\overline{CH} = y$ si ha:

$$\overset{\triangle}{OHC} \rightarrow \overline{OH}^2 + \overline{CH}^2 = \overline{OC}^2\ ;$$

$$x^2 + y^2 = (2a-y)^2\ ;$$

....

$$\boxed{y = -\frac{1}{4a}\cdot x^2 + a} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\overset{\triangle}{CDH} \rightarrow \overline{CD}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{CH}^2\ ;$$

$$(a+y)^2 = (a+x)^2 + y^2\ ;$$

....

$$\boxed{y = \frac{1}{2a}x^2 + x} \qquad (\mathrm{II})$$

Le I e II sono le equazioni cartesiane di due parabole i cui punti di intersezione rappresentano le posizioni di C.

Eliminando la y dalle I e II si ha l'equazione:

$$3x^2 + 4ax - 4a^2 = 0,$$

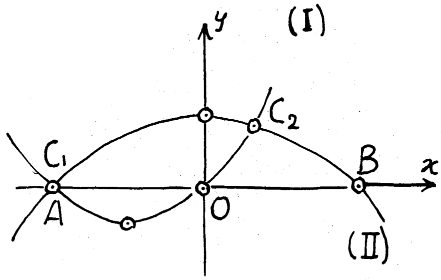
da cui risolvendo:

$$x_1 = -2a \longrightarrow y_1 = \dots = 0$$

$$x_2 = \frac{2}{3}a \longrightarrow y_2 = \dots = \frac{8}{9}a.$$

Ne segue:

$$C_1 \equiv (-2a\,;0); \quad C_2 \equiv \left(\frac{2}{3}a\,;\frac{8}{9}a\right).$$



RISOLUZIONE GEOMETRICA

inviata da CIRO IMPERATO di BARI.

(LA FIGURA E' NELLA PRIMA PAGINA)

Alle notazioni dedotte dall'enunciato e dalla relativa figura si aggiungano le seguenti:

OE raggio perpendicolare ad OA,

DL raggio perpendicolare a DA,

M intersezione di DL con AT,

N intersezione di OE con AS,

P ulteriore intersezione della circonferenza circoscritta al triangolo MTH con AB,

$\hat{\alpha} = T\hat{A}O = A\hat{T}O$; $\hat{\beta} = O\hat{T}H = T\hat{H}C$.

ANALISI

a) Dal triangolo rettangolo OCH si ha:

$$C\hat{O}H + O\hat{C}H = 2\alpha + 2\beta = 90°$$

e quindi

$$A\widehat{T}H = \alpha + \beta = 45°.$$

b) Per il teor. delle secanti:

$$\overline{AM} \cdot \overline{AT} = \overline{AP} \cdot \overline{AH}; \quad (I)$$

da cui si deduce che:

$$A\hat{P}M = A\widehat{T}H = 45°.$$

c) Dai triangoli simili $\begin{cases} AMO \\ AOT \end{cases}$:

$$\overline{AM} \cdot \overline{AT} = \overline{AO}^2. \quad (II)$$

d) Dal triang. rettangolo AON, per il I teor. di EUCLIDE:

$$\overline{AS} \cdot \overline{AN} = \overline{AO}^2 \quad (III)$$

Ne segue:

$$\overline{AM} \cdot \overline{AT} = \overline{AS} \cdot \overline{AN} = \overline{AP} \cdot \overline{AN}.$$

Risultano quindi simili i triangoli $\begin{cases} AHS \\ ANP \end{cases}$ da cui $A\hat{H}S = A\hat{N}P$.

Allora il quadrilatero PHNS risulta inscrittibile in una circonferenza e $N\hat{S}H = N\hat{P}H$.

E poiché $A\hat{H}S = S\hat{T}H$ si ha:

$$M\hat{N}P = A\hat{N}M + A\hat{N}M =$$
$$= A\hat{T}S + S\hat{T}H =$$
$$= A\widehat{T}H = 45°.$$

Se indichiamo ora con U la intersezione di HS con DL, il triangolo SDU è simile al triangolo SCH che risulta isoscele; quindi anche il triangolo SDU risulta isoscele: sarà

$$DU = DS = a$$

e quindi U coincide con L, e

$$A\hat{S}L = N\hat{S}H = N\hat{P}H = 45°.$$

Si ha ora: $M\widehat{N}P = N\widehat{P}H = 45°$ ed MN parallela ad AB.

Ma si sa già che $A\hat{P}M = 45°$, per cui si conclude che il triangolo MNP è rettangolo isoscele.

SINTESI

Ne segue finalmente la condizione che conduce rapidamente alla determinazione di H e di C:

P è il punto medio di BO,

M è il punto medio di DL. (IV)

COSTRUZIONE

Si determina M come punto medio di DL;

si conduce la semiretta AM che incontra la circonferenza di diametro AB nel punto T.

Detto E' il simmetrico di E

rispetto ad AB, si unisce T con E'. Si determina quindi H, come intersezione di AB con TE', e C, come intersezione di OT, con la perpendicolare ad AB, passante per H.

IL LETTORE E' PREGATO DI COSTRUIRSI LA RELATIVA FIGURA.

QUESTIONE 7

Le misure dei lati di un triangolo isoscele (espresse in cm) sono indicate dai binomi:

$2x-3$, $2x+3$, $3x-2$.

Determinare la misura del perimetro del triangolo isoscele.

RISOLUZIONE

inviata da Fernando Rossi e da Daisy Sorbi del L. Cl. "DANTE" di FIRENZE

Perchè il triangolo esista, le misure dei tre lati debbono essere numeri positivi; quindi deve essere:

$$x > \frac{3}{2} \quad ; \qquad (1)$$

ma ciascun lato inoltre deve essere minore della somma degli altri due; quindi deve essere anche:

$$(2x+3) < (2x-3) + (3x-2),$$

cioè

$$x > \frac{8}{3} \qquad (2)$$

condizione che è più ristrettiva della (1).

Infine, affinchè il triangolo sia ISOSCELE, debbono essere uguali due dei suoi lati. Si presentano perciò tre vie di indagine che danno luogo rispettivamente alle tre equazioni:

a) $2x-3 = 2x+3$

b) $3x-2 = 2x-3$

c) $3x-2 = 2x+3$

La prima equazione è evidentemente IMPOSSIBILE.

La seconda ha per soluzione

$$x = -1,$$

e questa soluzione non è accettabile perchè è in contrasto con la (2).

La terza equazione, infine, ha per soluzione

$$x = 5$$

e i tre lati hanno per misura:

$$2x-3 = 7$$
$$2x+3 = 13$$
$$3x-2 = 13$$

e forniscono l'UNICA SOLUZIONE.

Pertanto il perimetro è uguale a cm $(7+13+13)$ = cm 33.

Ottime le risposte inviate da Giorgio Franco di Padova, da M. Grazia Da Dalt del L. Cl. "RINALDINI" di Ancona e dal prof. F. Fogliotti di Ge-Samp.

QUESTIONE 8

Il binomio x^2+y^2 non è divisibile per $x-y$. Se si pone $x=5$ e $y=3$, si trova che
$$x^2+y^2=5^2+3^2=34$$
è divisibile per $x-y=5-3=2$. Come si spiega questa apparente contraddizione?

1ª RISOLUZIONE
inviata da Fernando Rossi del L. Cl. "Dante" di FIRENZE

Il binomio x^2+y^2 non è divisibile per $x-y$, perchè il resto della divisione $(x^2+y^2):(x-y)$ è $2y^2\neq 0$.
Non è quindi possibile trovare dei valori di α e β per cui l'uguaglianza $x^2+y^2=(x-y)(\alpha x+\beta y)$ risulti verificata per OGNI COPPIA (ORDINATA) di valori x ed y.
Questo però non esclude che l'uguaglianza risulti vera per particolari valori di x e y.
Nel caso nostro ($x=5$; $y=3$), si ha:
$$5^2+3^2=2(5\alpha+3\beta)$$
cioè
$$5\alpha+3\beta=17;$$
questa eguaglianza risulta verificata ad esempio per $\alpha=1$ e $\beta=4$,
per $\alpha=-2$ e $\beta=9$,
per $\alpha=4$ e $\beta=-3$, ecc.

2ª RISOLUZIONE
inviata da Giorgio Franco di PADOVA

Dalla divisione dei due binomi ottengo:
$$\frac{x^2+y^2}{x-y}=x+y+\frac{2y^2}{x-y}.$$
oppure:
$$\frac{x^2+y^2}{x-y}=x-y+\frac{2xy}{x-y}.$$
Operando con le lettere è chiaro che mi debbo fermare a questi risultati. Ma se opero con numeri, allora la divisibilità si verifica per particolari valori attribuiti alle lettere, e precisamente

1) per $x-y=2$ (caso prospettato dall'enunciato);
2) per $2y^2$ multiplo di $(x-y)$;
2 bis) o per $2xy$ multiplo di $(x-y)$. Ho indicato "2 bis)" e non "3)" in quanto si ha:
$$x-y+\frac{2xy}{x-y}=x-y+2y+\frac{2y^2}{x-y}=$$
$$=x+y+\frac{2y^2}{x-y}.$$

ESEMPI

Per $x=21$ e $y=3$ si ha:
$$\frac{x^2+y^2}{x-y}=\dots=\frac{450}{18}=25.$$
Per $x=56$ e $y=7$ si ha:
$$\frac{x^2+y^2}{x-y}=\dots=\frac{3185}{49}=75.$$

È PERVENUTA ANCHE UNA ESAURIENTE RISPOSTA DEL PROF. F. FOGLIOTTI di Genova Sampierdarena.

CURIOSITA' ARITMETICHE

$$3\times 14+5\times 13=2\times 15+7\times 11$$
$$3^2+14^2+5^2+13^2=2^2+15^2+7^2+11^2$$
$$3^4+14^4+5^4+13^4=2^4+15^4+7^4+11^4.$$

AMICI DI ANGOLO ACUTO (quarto elenco)

(Sono contrassegnati con asterisco i nomi degli amici che hanno inviato quote sostenitrici)

* Prof. Tommaso Ferrandina - MATERA
* Prof. Armando Chiellini - ROMA
Marco Barlotti - FIRENZE
* Prof. Giuseppina Zappa Casadio - FIRENZE
Anna Maria Cianci - MIANO (Te)
Scuola Media Statale "G.Pieraccini - FIRENZE
* Prof. Orazio Vecchio - ACICATENA (Ct)
* Prof. Margherita Fontana - CEREDA (Vi)
Lidia Panarese - FIRENZE
Prof. Giovanni Pusateri - TERMINI INERESE (Pa)
Prof. Stefania Audoly - CAGLIARI
Prof. Aldo Montefiori - GENOVA QUARTO
Prof. Eitel Oscar Sodano - TORINO
Dott. Laura Farina - ROMA
M.Cristina Lusiani - VALDAGNO (Vi)
* Sig. Domenico Fili Jorio - FIRENZE
Emma Frigerio - MILANO
Prof. Franco Pedrotti - MURALTO (Locarno)
* Prof. Salvatore Amico - ATRIPALDA (Av)
Prof. Marco Giovannozzi - FIRENZE
* Prof. Carmela Messina - TRECASTAGNI (Ct)
* Prof. Giamma Maria Vaghi - MILANO
Prof. Gennaro Scognamiglio - NAPOLI
Prof. Nicola Condorelli - MISTERBIANCO (Ct)
Prof. Iside Cavedoni - MODENA
Prof. Serafino Patrizio - L'AQUILA
Prof. Alfonso Matteucci - BOLOGNA
Prof. Prudenza Schirone - FOGGIA
Dott. Franco Ricci - MILANO
Prof. Cesare Barbieri - TORTONA (Al)

Ringraziamo vivamente il Preside dell'Istituto Tecnico Commerciale "Salvemini" di MOLFETTA (Bari) che ci ha inviato L. 15 000 per 15 abbonamenti-premio. da assegnare ad altrettanti alunni del suo Istituto.

Vogliamo sperare che molti altri Presidi vogliano imitare il suo esempio.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 gennaio 1970.

Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso*

Stampato dalla Tipolitografia "Gino Capponi", Via G. Capponi 27 - Firenze.

PER FAVORE, NON CESTINATE

Se questo periodico non vi interessa, vi preghiamo di passarlo ad un appassionato che voglia sottoscrivere l'abbonamento, oppure di respingere le copie ricevute al MITTENTE:

ANGOLO ACUTO
Via Cairoli, 78
50131 FIRENZE

Spedizione in abbonamento postale Gruppo III - 70%

Coloro che trattengono ANGOLO ACUTO sono pregati di inviarci con sollecitudine la loro quota di abbonamento per il 1970