ANNO II - 1971

L'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

gennaio

1

periodico mensile
a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE
Telefono 588.429

conto corrente postale 5/27919
Spedizione in abbonamento postale
Gruppo III - 70

LA PALESTRA DELLE GARE

QUESTIONI PROPOSTE

(Non sono poste in ordine di difficoltà)

Avvertenze per i risolutori a pagina 8.

56

Dimostrare che se un numero intero è somma di due quadrati, anche il suo quadrato è somma di due quadrati.

57

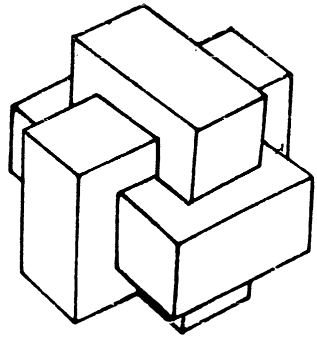
Un rettangolo ABCD ha il lato maggiore AB uguale alla diagonale del quadrato costruito sul lato minore BC.
Se dagli estremi della diagonale AC si conducono le perpendicolari AM e CN all'altra diagonale BD, questa risulta divisa in tre parti uguali:

$$BM = MN = DN \, .$$

E reciprocamente.

58

Calcolare l'area della superficie e il volume del solido qui disegnato, che rappresenta tre parallelepipedi retti-rettangoli



uguali, incastrati in modo che abbiano lo stesso centro e gli stessi assi di simmetria. Le dimensioni di ciascun parallelepipedo sono:

$$4a, \ 6a, \ 8a \, .$$

Abbonamento annuale L. 1000. Un fascicolo L. 150.

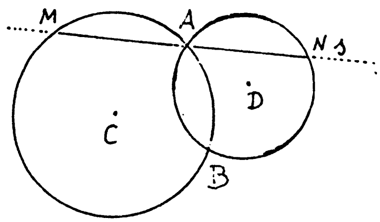
Abbonamento sostenitore da L. 1500 a Lire 5000.

Ogni appassionato invii la sua quota, secondo le sue possibilità, affinchè ANGOLO ACUTO possa migliorare e aumentare il numero delle pagine.

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio: i nuovi Abbonati hanno diritto a ricevere i fascicoli arretrati.

59

Per uno dei punti di intersezione di due circonferenze giacenti sullo stesso piano e secantisi, condurre la secante che determina il massimo segmento come intersezione con l'insieme dei due cerchi.



60

Dimostrare che il numero

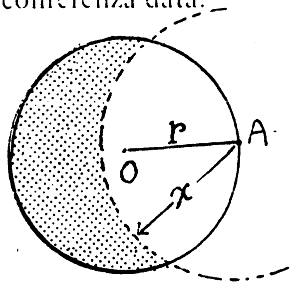
$$3^{2n+1} + 2^{n+2}$$

è multiplo di 7 quando n *è un numero intero qualsiasi.*

INTERMEDIARIO

Domanda 1

Un cerchio di raggio determinato r, è diviso in due parti equivalenti da un arco di circonferenza di raggio x, che ha il centro in un punto A della circonferenza data.



Determinare il raggio x.

La questione è proposta dallo stud. univ. Sauro Amboni di DALMINE (Bg), il quale ci ha inviato anche L. 2000 da assegnare all'Autore della migliore risposta.

CRIPTARITMETICA

Ricostruire l'uguaglianza:

$$(ORO)_{10} = (RAME)_8$$

RISOLUZIONE

di F.Fogliotti di Ge-Sampierdarena

Il numero ORO in base 10, ha tre cifre e pertanto è minore di mille; ne segue anche:

$$(RAME)_8 < (1000)_{10}$$

cioè:

$$R \cdot 8^3 + A \cdot 8^2 + M \cdot 8 + E < 1000.$$

Deve essere quindi $R = 1$

e di conseguenza $O \geq 5$

I valori possibili di $(ORO)_{10}$ sono quindi da ricercarsi tra i seguenti: 515, 616, 717, 818, 919.

I primi tre valori sono da scartare:

$$(515)_{10} = (1003)_8 \rightarrow A = zero = M$$

$$(616)_{10} = (1150)_8 \rightarrow R = 1 = A$$

$$(717)_{10} = (1315)_8 \rightarrow R = 1 = M.$$

Seguono le due sole soluzioni possibili:

$$(818)_{10} = (1462)_8$$

e

$$(919)_{10} = (1627)_8.$$

RISOLUZIONE

di Francesco Toninelli - Torino.

Risulta:
$$E + 8 \cdot M + 64 \cdot A + 512 \cdot R = O + 10 \cdot R + 100 \cdot O,$$

e semplificando:

$$E + 8 \cdot M + 64 \cdot A + 502 R = 101 \cdot O.$$

Poichè O non può essere maggiore di 9, risulta $R = 1$.

Inoltre O non può essere minore di 6, dato che una sola delle cifre E, M, A, potrebbe essere zero.

L'indagine continua in modo analogo a quello indicato nella prima risoluzione e con le stesse conclusioni.

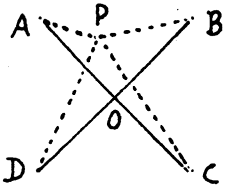
RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 2.

Quattro telefoni si trovano ai vertici di un quadrato dato. Collegarli con un sistema di fili, tale che risulti minima la lunghezza complessiva.

RISOLUZIONE
inviata da Marco Viola di Mortara (Pavia)

Siano A, B, C, D i vertici del quadrato nei quali si suppongono posti i quattro telefoni; sia O il punto di intersezione delle diagonali AC e BD, e sia P un punto qualunque non appartenente alla retta BD.



Si ha

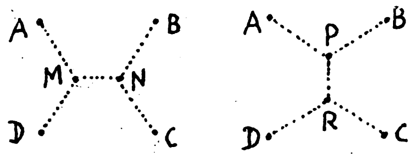
$$AC \leq AP + PC$$
$$BD < BP + PD \;;$$

ne segue, sommando membro a membro:

$$AC + BD < AP + PB + PC + PD \;.$$

L insieme delle due diagonali costituisce quindi il collegamento telefonico minimo richiesto.

Nota della Redazione: La risoluzione sopra indicata sarebbe esatta se l'enunciato indicasse che nel sistema di fili ci debba essere soltanto un nodo. Ma non è così!
Il sistema di fili di lunghezza minima è costituito da cinque segmenti e due nodi. Si hanno le due soluzioni equivalenti qui indicate nelle quali



MN è parallelo ad AB e DC,
PR è parallelo ad BC e AD,
e gli angoli di vertici M, N, P, R sono tutti uguali (120°).

E' esatta pertanto la seguente

RISOLUZIONE
inviata da Ciro Imperato di Bari.

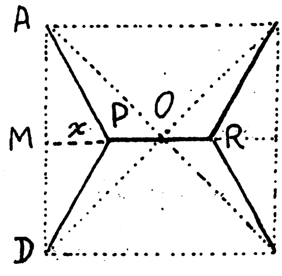
Indicando con 2a il lato del quadrato ABCD (vedi figura) e posto:

$$MP = RN = x \quad \text{e} \quad AP + PD + PR + BR + RC = y \quad \text{si ha:}$$

$$y = 4\sqrt{x^2 + a^2} + 2a - 2x \,,$$

e derivando:

$$y' = 4x : \sqrt{x^2 + a^2} - 2 \,.$$



Eguagliando a zero e risolvendo si deduce

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}\, a \qquad (1)$$

Ne segue: $y = 2(\sqrt{3}+1)a$.

Osservazione. Risulta anche $y < AC + BD = 4\sqrt{2}a$;

infatti è $(\sqrt{3}+1) < 2\sqrt{2}$.

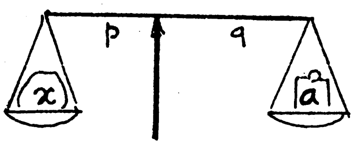
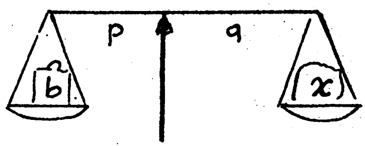
Dalla (I) si può dedurre inoltre che $A\hat{P}D = A\hat{P}R = P\hat{R}B = B\hat{R}C = 120°$ e quindi risulta immediata la determinazione geometrica dei due nodi P ed R.

QUESTIONE 4.

Con una bilancia a bracci disuguali (e nella quale il giogo ha peso trascurabile rispetto ai carichi applicati ai due pesi), il peso di un corpo risulta g 392 se lo poniamo su un piatto e risulta g 450 se lo poniamo sull'altro piatto. E' possibile determinare il peso esatto del corpo?

RISOLUZIONE (generalizzata)
inviata dal prof. F.Fogliotti di Genova-Sampierdarena e da Giorgio Franco di Padova.

Il peso (esatto) x del corpo in esame si può determinare con il metodo della doppia pesata. Siano p e q le lunghezze dei bracci della bilancia.

1^ pesata	2^ pesata
	

Se l'equilibrio si ottiene ponendo

il peso a nel II piatto	il peso b nel I piatto

e poichè i momenti

px e qa	qx e bp

debbono essere uguali e di senso contrario
si ha rispettivamente:

px = aq	qx = bp.

Moltiplicando membro a membro queste uguaglianze
ne segue $pqx^2 = abpq$
ovvero $x^2 = ab$
da cui $x = \sqrt{ab}$.
Nel caso particolare proposto si ha:

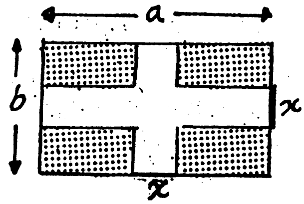
$a = g\ 392$, $b = g\ 450$ e quindi

$$x = g\sqrt{392 \cdot 450} = g\sqrt{2^3 \cdot 7^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} =$$
$$= g\sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = g\ 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = g\ 420.$$

QUESTIONE 5

Determinare x in modo che la parte tratteggiata risulti equivalente alla metà del rettangolo avente per dimensioni a e b.

Indicare la costruzione geometrica.



RISOLUZIONE
inviata da Giorgio Franco di Padova.

Se la parte tratteggiata è equivalente alla metà del rettangolo, anche la parte bianca a forma di croce è equivalente alla metà del rettangolo. Pertanto si avrà

$$bx + ax - x^2 = \frac{ab}{2}$$

da cui

$$x^2 - (a+b)x + \frac{ab}{2} = 0.$$

E risolvendo

$$x = \frac{a + b \mp \sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

da cui, escludendo la soluzione

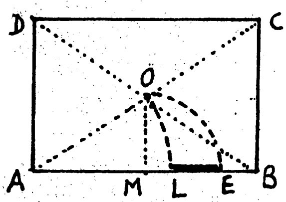
$$x_2 = \frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2} > b,$$

si ha l'unica soluzione

$$x_1 = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

dove $\sqrt{a^2+b^2}$ è la misura della diagonale del rettangolo.

Costruzione



O punto medio delle diagonali
M punto medio di AB
$ME = MO$

$$\overline{AE} = \dots = \frac{a+b}{2} \qquad \overline{AL} = \overline{AO} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

quindi:

$$x = \frac{a+b}{2} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} =$$

$$= \overline{AE} - \overline{AL} = \overline{LE}.$$

E' pervenuta anche un'ottima risoluzione del Prof. Francesco Fogliotti di Genova-Sampier.-

ANCORA SUI CRITERI DI DIVISIBILITA' per 7, per 11, per 13, ecc.

Propongo alcuni criteri di divisibilità che, per la loro semplicità, possono trovare posto in un qualsiasi testo di aritmetica per la scuola media. Essi si basano sulla scomposizione impropria di un numero N nella somma del numero delle decine e di quello delle unità. Così, se indichiamo con K il numero delle decine e con U quello delle unità, un numero intero assoluto N può scriversi:

$$N = 10K + U \qquad (1)$$

CRITERIO DI DIVISIBILITA' per 7

Se aggiungiamo e togliamo nel secondo membro della (1) 20 U, si ha:

$$N = 10K + U + 20U - 20U = 10(K - 2U) + 21U$$

da cui deduciamo che:

un numero N è divisibile per 7, se è divisibile per 7 la differenza tra il numero delle decine e il doppio della cifra delle unità.

Nota - Questo criterio di divisibilità per 7 non è nuovo, pare che fosse stato conosciuto dai Caldei - XI secolo a.C.

Il numero 343 è divisibile per 7 perchè $34 - 2 \cdot 3 = 28$, che è divisibile per 7.

CRITERIO DI DIVISIBILITA' per 11

Se aggiungiamo e togliamo nel secondo membro della (1) 10 U, si ha:

$$N = 10K + U + 10U - 10U = 10(K - U) + 11U$$

cioè:

un numero N è divisibile per 11, se è divisibile per 11 la differenza tra il numero delle decine e la cifra delle unità.

Il numero 1078 è divisibile per 11 perchè $107 - 8 = 99$, che è divisibile per 11.

CRITERIO DI DIVISIBILITA' per 13

Se aggiungiamo e togliamo nel secondo membro della (1) 40 U, si ha:

$$N = 10K + U + 40U - 40U = 10(K + 4U) - 39U$$

cioè:

un numero N è divisibile per 13, se è divisibile per 13 la somma del numero delle decine e 4 volte la cifra delle unità.

Il numero 325 è divisibile per 13 perchè $32 - 4 \cdot 5 = 52$, che è divisibile per 13.

In modo perfettamente analogo possono ricavarsi i criteri di divisibilità per 17, per 19, ecc.
Per 17 basta aggiungere e togliere nel secondo membro della (1) 50 U.
Per 19 basta aggiungere e togliere nel secondo membro della (1) 20 U.
Si hanno così i seguenti criteri:

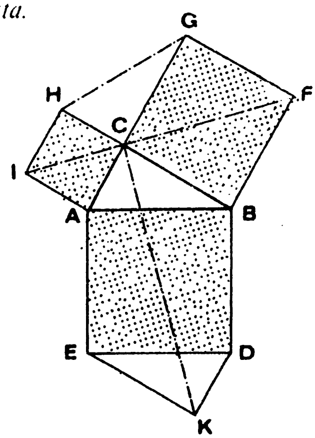
Un numero N è divisibile per 17, se è divisibile per 17 la differenza tra il numero delle decine e 5 volte la cifra delle unità.

Un numero N è divisibile per 19, se è divisibile per 19 la somma tra il numero delle decine e il doppio della cifra delle unità.

Francesco Criscione

Questione N. 21

Dimostrare il teorema di Pitagora ricorrendo all'analisi della figura qui sotto riprodotta.



RISOLUZIONE
di Aniello Agrosi di Diso (Lecce).

Sui cateti e sull'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC sono stati costruiti i quadrati

$$ACHI,\ BCGF \text{ e } ABDE.$$

Il triangolo DEK è costruito uguale al triangolo ABC. Congiunto G con H, anche il triangolo HGC risulta uguale al triangolo ABC.
Le congiungenti IC e CF appartengono alla stessa retta perchè

$$I\hat{C}H + H\hat{C}G + G\hat{C}F =$$
$$= 45° + 90° + 45° = 180°$$

Si hanno inoltre le seguenti uguaglianze di triangoli

$$CFG = CFB; \quad CIH = CIA;$$

e le seguenti uguaglianze di quadrangoli:

$$IHGF = IABF = KDBC = CAEK.$$

Ne segue l'equivalenza:

$$IHGF + IABF \doteq KDBC + CAEK$$

ovvero l'equivalenza fra gli esagoni:

$$IHGFBA \doteq CBDKEA;$$

da cui:

$$IHGFBA - (ABC + HGC) \doteq$$
$$\doteq CBDKEA - (ABC + DEK).$$

e finalmente la relazione pitagorica

$$ACHI + BCGF \doteq ABDE.$$

OSSERVAZIONE
Risulta verificata anche l'eguaglianza fra segmenti:

$$\overline{IF} = \overline{CK}.$$

Altri risolutori:
Giuseppe Guarato - Valdagno
Francesco Fogliotti - Genova-Sampierdar.
Giorgio Franco - Padova

Appunti... volanti.

Dimostrare che

$$\lg_a b \cdot \lg_b a = 1$$

Posto:

$$a^x = b$$

$$x = \lg_a b$$

$$\lg_b a^x = \lg_b b$$

$$x \lg_b a = 1 \longrightarrow \lg_a b \cdot \lg_b a = 1$$

AMICI DI ANGOLO ACUTO SOSTENITORI:

Prof. Vincenzo Marseguerra - ROMA
Prof. Giuliana Sandrucci - FIRENZE
Ist. Tec. Comm. e per Geom. "R.Valturio" - RIMINI
Geom. Domenico Valerio - FONDI (Lt)
Prof. Clara Bartolini - Casalecchio del Reno (Bo)
Prof. Amelia Villa - VOGHERA (Pv)
Prof. Lorenzo Arus - IMOLA (Bo)
Prof. Maria Teresa Riccardi - TORINO
Ing. Dino Masini - PAVIA
Stud. Carlo Arturo Baldi - FIRENZE
Prof. Francesco Fogliotti - GENOVA Samp.
Prof. Aida Bruschi - FABRIANO (An)
Prof. Clara Foà - FIRENZE
Ing. Giovanni Bortolotti - BOLOGNA
Prof. Francesco Criscione - RIMINI
Prof. Alberto Roselli - ROVIGO
Prof. Annunziata Ferri - BARI
Prof. Angiolo Procissi - FIRENZE
Prof. Maria Barbieri - FIRENZE
Prof. Alfonso La Paglia - BIELLA (Vc)
Stud. Univ. Sauro Amboni - DALMINE (Bg)
Prof. Luisa Curti - REGGIO EMILIA
Prof. Anna Capossele - ROVIGO
Prof. Pietro Castaldo - CITTA' DI CASTELLO (Pg)
Prof. Franco Pedrotti - MURALDO (Svizzera)
M.° Giuseppe Guarato - VALDAGNO (Vi)
Prof. Adriana Pero-Nullo - LUCIGNANO (Ar)
Stud. Lamberto Bolognini - ANCONA
Prof. Giuseppina Ghislanzoni - MILANO
Prof. Enzo Di Bari - FIRENZE

Vanno segnalati i seguenti Istituti:
Liceo Scient. "L.Spallanzani" - REGGIO EMILIA (82 abbonati)
Istituto Magistrale "C.Roccati" Rovigo (66 abb.)

AVVERTENZE IMPORTANTI PER I RISOLUTORI.

Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte.
Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale.
Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età.
Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad:

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78
50131 FIRENZE

entro il

31 marzo 1971

Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori.
Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.

P E R   F A V O R E,   N O N   C E S T I N A T E.

Se questo periodico non vi interessa, vi preghiamo di passarlo ad un appassionato che voglia sottoscrivere l'abbonamento, oppure di respingere le copie ricevute al MITTENTE:

ANGOLO ACUTO - Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE

Coloro che trattengono ANGOLO ACUTO sono pregati di inviare con sollecitudine la loro quota di abbonamento.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 Gennaio 1970.
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso.*
Stampato dalla Tipolitografia "Gino Capponi" Via G. Capponi 27 - Firenze.