ANNO II - 1971

L'Angolo acuto

febbraio **2**

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

periodico mensile
a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE
Telefono 588.429

conto corrente postale 5/27919
Spedizione in abbonamento postale
Gruppo III - 70

LA PALESTRA DELLE GARE

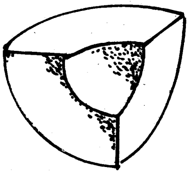
QUESTIONI PROPOSTE

(Non sono poste in ordine di difficoltà)

Avvertenze per i risolutori a pagina 8.

61

Una sfera cava (solido limitato da due superficie sferiche aventi lo stesso centro) è stata tagliata in otto parti uguali con tre piani passanti per il centro e, due a due, perpendicolari fra loro.
Il raggio della sfera esterna è doppio del raggio della sfera interna.



Determinare le misure dei due raggi, sapendo che l'area della superficie totale di una delle otto parti è 19π.

62

CRIPTARITMETICA
...... facile

Ricostruire la moltiplicazione:

$$\begin{array}{ccccccc} & & N & N & N & \times \\ & & & N & N & \\ \hline & & \star & \star & \star & \\ & \star & \star & \star & & \\ \hline \star & \star & \star & \star & \star & \end{array}$$

63

Risolvere la seguente equazione logaritmica:

$$\lg_3 x = \lg_9 x + 4.$$

Abbonamento annuale L. 1000. **Un fascicolo L. 150.**

Abbonamento sostenitore da L. 1500 a Lire 5000.

Ogni appassionato invii la sua quota, secondo le sue possibilità, affinchè ANGOLO ACUTO possa migliorare e aumentare il numero delle pagine.

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio: i nuovi Abbonati hanno diritto a ricevere i fascicoli arretrati.

64

Marco nacque nel giorno di un compleanno del padre. L'età del padre corrisponde oggi, compleanno di entrambi, ai 7/3 della età del figlio, mentre due anni fa, l'età del figlio era uguale ai 2/5 dell'età del padre. Fra quanti anni l'età del padre sarà doppia dell'età del figlio?

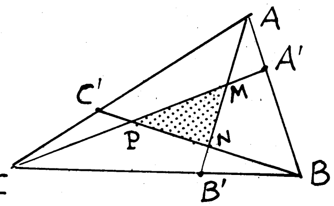
65

ABC è un triangolo qualsiasi e si sa che:

$$\overline{AA'} = \frac{\overline{AB}}{3};\quad \overline{BB'} = \frac{\overline{BC}}{3};\quad \overline{CC'} = \frac{\overline{CA}}{3};$$

$$M = \overline{AB'} \cap \overline{CA'};\quad N = \overline{AB'} \cap \overline{BC'};$$

$$P = \overline{CA'} \cap \overline{BC'}.$$



Calcolare il rapporto fra la superficie del triangolo MNP e quella del triangolo ABC.

66

Data la circonferenza avente il centro nel punto C (0;7a) e il raggio uguale ad a determinare il LUOGO GEOMETRICO *dei centri delle circonferenze tangenti alla suddetta circonferenza e tangenti all'asse delle ascisse.*

RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 22

Un prisma retto a base triangolare ha tutti gli spigoli uguali. Determinare il volume sapendo che l'area della superficie totale è

$$(6+\sqrt{3})a^2.$$

RISOLUZIONE
di Armando Roselli
del L. Scient. di Rovigo.

Il prisma da considerare avendo tutti gli spigoli uguali avrà come basi due triangoli equilateri e come facce laterali tre quadrati.

Ne segue facilmente l'equazione:

$$2\left(\frac{x^2}{4}\sqrt{3}\right) + 3x^2 = 50\,(6+\sqrt{3})a^2,$$

da cui risolvendo:

$$x = 10a.$$

e quindi:

$$\text{Volume} = \frac{x^2}{4}\sqrt{3}\cdot x = \dots = 250\sqrt{3}a.$$

QUESTIONE 23

Un appassionato per il TOTOCALCIO *desidera sapere quante schedine a due colonne deve compilare puntando esclusivamente sulla seguente disposizione di pronostici:*

2	pareggi	X
7	vittorie della squadra ospitante	1
4	vittorie della squadra ospite	2

RISOLUZIONE
di A. Agrosi di Diso e di F. Fogliotti di Genova-Samp.

È nota la definizione di $n!$ cioè: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$.
($n!$ si legge "ENNE FATTORIALE").
Questo numero indica le permutazioni che si possono ottenere con n oggetti differenti. Se si riempissero le 13 caselle con 13 segni differenti si potrebbero compilare $13!$ colonne (cioè 6 227 020 800 colonne).
Ma nel caso in esame i segni diversi sono soltanto tre: cioè:

1, 2, X,

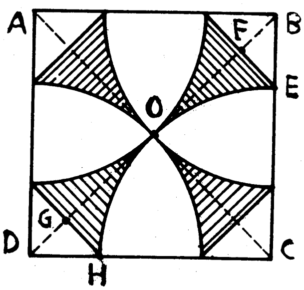
ripetuti rispettivamente <u>sette</u> volte, <u>quattro</u> volte e <u>due</u> volte.
Allora il numero delle colonne diverse si riduce a

$$\frac{13!}{7!\,4!\,2!} = \dots = 25740.$$

Sono quindi sufficienti:
25740 : 2 = 12870 SCHEDINE

QUESTIONE 24

Osservate, nella figura qui indicata, il quadrato ABCD e calcolate l'area della parte tratteggiata sapendo che $\overline{AB} = 2a$ e che gli archi tracciati nella figura appartengono a circonferenze uguali aventi il centro nei vertici del quadrato.



RISOLUZIONE
di Giorgio Franco di Padova

Data la simmetria della figura rispetto alle diagonali, l'area richiesta S è uguale al quadruplo dell'area T del poligono mistilineo FEOHGF, che si calcola facilmente. Poichè è:
FEOHGF $\doteq$
$\doteq \widehat{BCD}$ − quadrante CEH − $2 \cdot \widehat{BEF}$,
segue: $T = \frac{\overline{BC}^2}{2} - \pi \frac{\overline{CO}^2}{4} - \frac{\overline{BE}^2}{2} =$

$$= 2a^2 - \frac{\pi}{2}a^2 - \frac{1}{2}(2a^2 - a\sqrt{2})^2 =$$

$$= a^2\left[2 - \frac{\pi}{2} - (3 - 2\sqrt{2})\right] =$$

$$= a^2\left[2\sqrt{2} - \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)\right].$$

Infine considerando i valori approssimati per difetto:

$\sqrt{2} = 1{,}41$ e $\pi = 3{,}14$, si ha:

$$S = 4T = 4a^2[2{,}82 - 2{,}57] =$$

$$= 4a^2 \times 0{,}25 = 4a^2.$$

Cioè l'area della parte tratteggiata è pressocchè uguale ad 1/4 dell'area del quadrato.

Ottime le altre tre risoluzioni pervenute (vedi quadro a pg. 4).

QUESTIONE 25

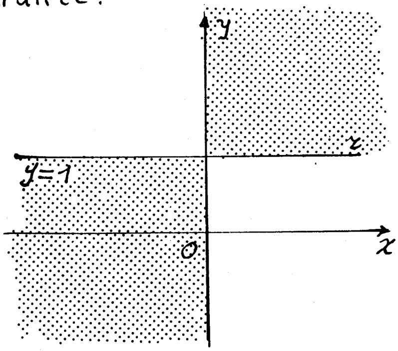
Quali sono le soluzioni della disequazione $xy \geqslant x$? (1)
Indicare le regioni del piano i cui punti hanno le coordinate x e y che soddisfano alla precedente disequazione:

RISOLUZIONE
di Giuseppe Guarato di Valdagno.

I) La disequazione data $xy \geqslant x$, si può scrivere:
$xy - x \geqslant 0$ ovvero $x(y-1) \geqslant 0$.
Questa è ovviamente verificata

sia per $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 1 \end{cases}$ | sia per $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leqslant 1 \end{cases}$.

II) I punti del piano le cui coordinate soddisfano la disequazione (1) sono quelli appartenenti ai due angoli retti opposti al vertice, lati compresi, individuati dall'asse y e dalla retta r di equazione $y = 1$, e di cui uno (cioè uno dei due angoli giace tutto nel 1° quadrante.



QUESTIONE 26

(proposta in una Gara matem.)
Dato un triangolo qualsiasi, dividerlo in 7 parti equivalenti per mezzo di una spezzata avente l'origine in un vertice del triangolo.

RISOLUZIONE
di Giorgio Franco di Padova

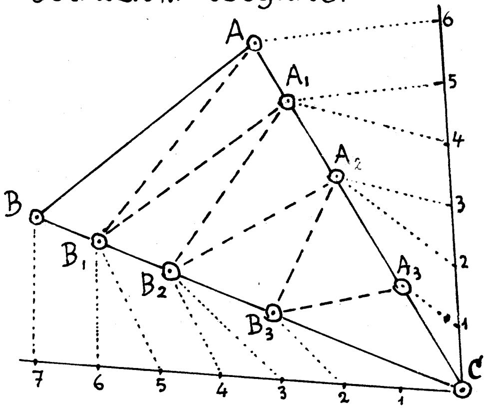
Sia ABC un triangolo qualsiasi. Ciascuna delle 7 parti è ovviamente $\frac{1}{7}$ di $\overset{\triangle}{ABC}$; quindi prendendo $\overline{BB_1} = \frac{1}{7} \cdot \overline{BC}$ si ha $\overset{\triangle}{ABB_1} = \frac{1}{7} \cdot \overset{\triangle}{ABC}$.

Ciascuna delle 7 parti è $\frac{1}{6}$ di $\overset{\triangle}{AB_1C}$, quindi prendendo $\overline{AA_1} = \frac{1}{6} \cdot \overline{AC}$ si ha:
$\overset{\triangle}{AB_1A_1} = \frac{1}{6} \cdot \overset{\triangle}{AB_1C} = \frac{1}{7} \cdot \overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{ABB_1}$.

Ciascuna delle 7 parti è anche $\frac{1}{5}$ di $\overset{\triangle}{A_1B_1C}$, per cui prendendo $\overline{BB_1} = \frac{1}{5} \cdot BC$, risulta:
$\overset{\triangle}{A_1B_1B_2} = \frac{1}{5} \overset{\triangle}{A_1B_1C} = \frac{1}{6} \overset{\triangle}{AB_1C} = \frac{1}{7} \overset{\triangle}{ABC}$.
Procedendo in modo analogo, con successive operazioni, si perviene alla costruzione della spezzata $AB_1A_1B_2A_2B_3A_3$ richiesta.

RISOLUTORI delle Questioni	22	23	24	25	26	27	28
ANDRETTA F.	●					●	
FOGLIOTTI F.	●	●	●			●	
AGROSI A.	●	●	●				
GUARATO G.	●		●	●	●	●	●
FRANCO G.	●		●		●	●	●
ROSELLI A.	●					●	
ROSSI F.	●						
CRISCIONE C.						●	

La figura indica chiaramente le costruzioni eseguite:



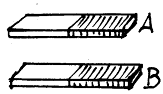
È pervenuta anche una RISOLUZIONE di G. Guarato, il quale ha dedotto, fra l'altro, che:

$$\frac{\overline{BB_1}}{5}=\frac{\overline{B_1B_2}}{6}=\frac{\overline{B_2B_3}}{8}=\frac{\overline{B_3C}}{16};$$

$$\frac{\overline{AA'}}{8}=\frac{\overline{AA_2}}{10}=\frac{\overline{A_2A_3}}{15}=\frac{\overline{A_3C}}{15}.$$

NOTA. *Se la spezzata avesse dei vertici sulla spezzata stessa, si potrebbero avere molte altre varianti (Quante?)*
Ulteriori interessanti considerazioni il Lettore potrà trovare alle pagg. 8 e 9 di "Il SAPER VEDERE" in matematica di B. De Finetti. Ediz. Loescher. Torino.

Qual è la calamita vera?



Ho due sbarre metalliche, apparentemente uguali: una è magnetizzata l'altra non lo è.
Operando soltanto con le due sbarre, come si fa a riconoscere la sbarra calamitata?
LA RISPOSTA AL PROSSIMO NUMERO.

QUESTIONE 27

Scrivere l'equazione di 2° grado le cui radici x_1 e x_2 soddisfano alle seguenti due relazioni:

$$4x_1x_2=5(x_1+x_2)-4,$$
$$(x_1-1)(x_2-1)=\frac{1}{\alpha-1}.$$

RISOLUZIONE
di Claudia Criscione
del Liceo Scient. di Rimini

Considero l'equazione generica di secondo grado:

$$ax^2+bx+c=0;$$

dividendo ambo i membri per $a\neq 0$ si ha:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0; \qquad (1)$$

e per le note relazioni tra le radici e i coefficienti;

$$-(x_1+x_2)=\frac{b}{a} \quad e \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

la (1) diventa:

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0. \qquad (2)$$

Il sistema formato dalle due equazioni date dall'enunciato si può scrivere:

$$\begin{cases}4x_1x_2-5(x_1+x_2)=-4\\ x_1x_2-(x_1+x_2)+1=\dfrac{1}{\alpha-1}\end{cases};$$

e risolvendo:

$$x_1+x_2=\frac{4}{\alpha-1}, \quad x_1x_2=\frac{6-\alpha}{\alpha-1}. \qquad (3)$$

Sostituendo infine i valori (3) nella (2), ottengo l'equazione richiesta:

$$(\alpha-1)x^2-4x+(6-\alpha)=0.$$

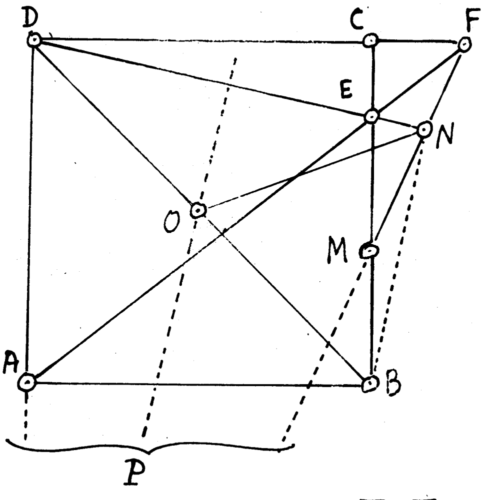
QUESTIONE 28

Per il vertice A di un quadrato ABCD si conduca una retta che incontri BC in E e il prolungamento di DC in F. Si indichi con M il punto medio di BE e con N la intersezione della retta DE con la retta FM. Dimostrare:
I) che la retta FM è tangente alla circonf. inscritta nel quadrato;
II) che il punto N appartiene alla circonf. circoscritta al quadrato.

RISOLUZIONE
di Giuseppe Guarato di Valdagno.

Dai triangoli simili CEF e BEA si ha: $\overline{CF}:\overline{AB}=\overline{CE}:\overline{BE}$

da cui
$$\overline{CF}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CE}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{DC}\cdot\overline{CE}}{\overline{BE}},$$



Inoltre $\operatorname{tg} C\hat{M}F=\frac{\overline{CF}}{\overline{CM}}=\frac{\overline{DC}\cdot\overline{CE}}{\overline{BE}\cdot\overline{CM}}$,

ma:
$\overline{BE}=\overline{BC}-\overline{CE}=\overline{DC}-\overline{CE}$;
$\overline{CM}=\frac{1}{2}(BC+CF)=\frac{1}{2}(DC+CE)$;

quindi sostituendo:
$$\operatorname{tg} C\hat{M}F=\cdots=\frac{2\cdot\overline{DC}\cdot\overline{CE}}{\overline{DC}^2-\overline{CE}^2}=\rightarrow$$
(e dividendo numeratore e denominatore di questa frazione per $\overline{DC}^2$)
$$\rightarrow=\frac{2\ \overline{CE}/\overline{DC}}{1-(\overline{CE}/\overline{DC})^2}=\frac{2\cdot\operatorname{tg} C\hat{D}E}{1-\operatorname{tg}^2 C\hat{D}E}=$$
$$=\operatorname{tg} 2\cdot C\hat{D}E=\operatorname{tg} 2\alpha;$$
(essendo $\alpha=C\hat{D}E$).

Risulta evidentemente:
$M\hat{E}N=D\hat{E}C=A\hat{D}E=90^\circ-\alpha$;
$M\hat{N}E=180^\circ-2\alpha-(90^\circ-\alpha)=90^\circ-\alpha$.

I triangoli MNE e PDN (essendo P l'intersezione di AD con FM), risultano isosceli sulle basi EN e DN rispettivamente.

Dal triangolo MNE si ricava:
$$\overline{MN}=\overline{ME}=\overline{BM}=\tfrac{1}{2}\overline{BE};$$
ne segue $BN\perp DN$;
e quindi N appartiene alla circonferenza di diametro BD circoscritta al quadrato.

Dal triangolo PDN, essendo il centro O del quadrato equidistante da D e da N, l'asse di DN (che è anche bisettrice dell'angolo al vertice del trian. PDN) passa per il punto O che risulta equidistante dai lati AP ed NP. La retta FM, che si identifica con la retta NP, è pertanto tangente alla circonf. iscritta nel quadrato.

Rimandiamo al prossimo numero una risoluzione analitica inviata da G. Franco di Padova.

NOTA DIDATTICA

di Francesco Criscione

Sulla risoluzione dell'equazione: $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c \qquad (I)$

La risoluzione dell'equazione (I) può essere effettata con l'introduzione di un angolo ausiliario φ.

Il 1º membro della (I) si può scrivere:

$$a\left(\operatorname{sen} x + \frac{b}{a}\cos x\right) = c.$$

Posto $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}$,

si ha successivamente:

$$a\left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}\cos x\right) = c;$$

$$a\,\frac{\operatorname{sen} x\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\cos x}{\cos\varphi} = c;$$

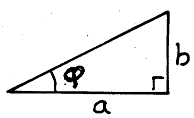
$$\operatorname{sen} x\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\cos x = \frac{c}{a}\cos\varphi;$$

e quindi:

$$\operatorname{sen}(x+\varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi.$$

Da quest'ultima si determina $x+\varphi$ e quindi x.

GEOMETRICAMENTE l'angolo φ si costruisce considerando un triangolo rettangolo avente per cateti i segmenti a e b:



L'angolo φ è l'angolo opposto al cateto b.

ESEMPIO

Risolvere l'equazione:

$$3\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x = 3.$$

Posto:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3};\ \left(\varphi = 30°;\ \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

si ha

$$\operatorname{sen}(x+30°) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

da cui:

$$\begin{cases} x+30° = 60° + 2K\cdot180° \\ x+30° = 120° + 2K\cdot180°, \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} x = 30° + 2K\cdot180° \\ x = 90° + 2K\cdot180° \end{cases}$$

* * *

Nel caso particolare $a = b = 1$ la (I) diventa:

$$\operatorname{sen} x + \cos x = c,$$

ossia: $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(90°-x) = c, \quad (2)$

e per la 1ª formula di PROSTAFERESI:

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2},$$

la (2) si può scrivere:

$$2\operatorname{sen} 45°\cos(x-45°) = c$$

ovvero $\cos(x-45°) = \frac{c}{a}$.

ESEMPIO

Risolvere l'equazione:

$$\operatorname{sen} x + \cos x = 1.$$

Per quanto detto sopra si ha:

$$\cos(x-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

da cui

$$x - 45° = \pm 45° + 2K\cdot180°$$

e quindi:

$$\begin{cases} x = 90° + 2K\cdot180° \\ x = 2K\cdot180°. \end{cases}$$

AMICI DI ANGOLO ACUTO SOSTENITORI:

Prof. Paola Fenili - FIRENZE
Prof. Maria Signorini - FIRENZE
Prof. Grazia Scalabrini - MODENA
Stud. Paolo Viola - TRIESTE
Prof. Mario Serra - TORINO
Prof. Nelly Rossi - PIACENZA
Prof. Nydia Bergomi - MILANO
Prof. Bice Gravina - COSENZA
Scuola Media "Mattioli" - SIENA
Prof. Sergio Ricci - FIRENZE
Sig. Nicola Animobono - BASSANO DEL GRAPPA
Dott. Costante Prampolini - REGGIO EMILIA
Stud. Alvise Revedin - FIRENZE
Prof. Alessandro Maggi - FIRENZE
Prof. Angelo Monti - BOLOGNA
Ist. Profess. "Marconi" - SIENA
Ing. Duccio Rossetti - ROMA
Prof. Alda Boccioni - GENOVA
Sig. Gino Mosca - CAVARZERE
Stud. Alberto Bianchini - FIRENZE
Stud. Giampaolo Cecchetto - CEREGNANO (Ro)
Prof. Claudia Pizzardo - ROVIGO
Prof. Lidia Trossarelli - TORRE PELLICE (To)
Dott. Bruno Guadagni - FIRENZE
Prof. Francesco Jacino - TORINO
Prof. Mario Giunti - EMPOLI (Fi)
Prof. Cesare Carbone - BATTIPAGLIA (Sa)
Prof. Vincenzo Asprella - MATERA
Istit. Magistrale "Suardo" - BERGAMO
Prof. Gianna Maria Vaghi - MILANO
Prof. Massimo Cencetti - FIRENZE
Sig. Carlo Felice Ottaviani - FIRENZE
Prof. Giuseppe Ottaviani - ROMA
Prof. Massimiliano Ottaviani - PISA
Prof. Paola Ottaviani - VERONA

continua al prossimo numero.

AVVERTENZE IMPORTANTI PER I RISOLUTORI.

Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte.
Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale.
Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età.
Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad:

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78
50131 FIRENZE

entro il
30 aprile 1971

Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori.
Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.

PER FAVORE, NON CESTINATE.

Se questo periodico non vi interessa, vi preghiamo di passarlo ad un appassionato che voglia sottoscrivere l'abbonamento, oppure di respingere le copie ricevute al MITTENTE:

ANGOLO ACUTO - Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE

Coloro che trattengono ANGOLO ACUTO sono pregati di inviare con sollecitudine la loro quota di abbonamento.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 Gennaio 1970.
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso.*
Stampato dalla Tipolitografia "Gino Capponi" Via G. Capponi 27 - Firenze.