ANNO II - 1971

L'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

marzo
3

periodico mensile
a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE
Telefono 588.429
conto corrente postale 5/27919
Spedizione in abbonamento postale
Gruppo III - 70

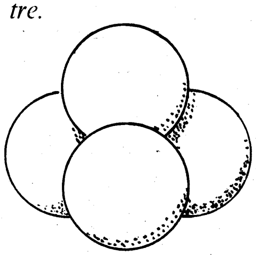
LA PALESTRA DELLE GARE

QUESTIONI PROPOSTE
(Non sono poste in ordine di difficoltà)
Avvertenze per i risolutori a pagina 8

67

Le quattro bocce

Si pongano tre bocce sferiche di raggio r su un piano orizzontale in modo che ciascuna tocchi le altre due. Si ponga una quarta boccia di raggio r sul gruppo delle prime tre.



A quale distanza dal piano orizzontale si troverà il centro della quarta boccia?

68

Un cubo di 9 cm di lato, dipinto di rosso su tutte le facce, viene diviso in 27 cubetti di 3 cm di lato. Quanti di questi cubetti saranno dipinti su tre (3) facce, su 2, su 1, su nessuna? Come avete risolto il problema, con un disegno o con l'immaginazione?

Assegnato dalla Mathesis (sezione di Cosenza)
Gara Matem. Scuola di 1^ grado - 1971

69

Forate con uno spillo una cartolina e collocatela a circa 3 cm. dall'occhio, contro una sorgente luminosa.
Collocate lo spillo, tenendolo per la punta in modo che la testa dello spillo si trovi tra la cartolina e l'occhio a meno di un centimetro dall'occhio.
Vedrete allora lo spillo capovolto.
Perchè?

Abbonamento annuale L. 1000. **Un fascicolo L. 150.**

Abbonamento sostenitore da L. 1500 a Lire 5000.

Ogni appassionato invii la sua quota, secondo le sue possibilità,
affinchè ANGOLO ACUTO possa migliorare e aumentare il numero delle pagine.

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio: i nuovi Abbonati hanno diritto a ricevere i fascicoli arretrati.

INTERMEDIARIO

Domanda 2

Si chiede di dimostrare se la seguente affermazione è vera o falsa:

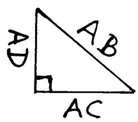
Se due numeri interi sono primi con 7, la somma dei loro cubi (o la loro differenza) è multipla di 7.

CRIPTARITMETICA

RISOLUZIONE
della Questione N. 6 proposta nel fascicolo III - 1970.

Terna pitagorica.

Determinare la terna pitagorica AB, AC, AD relativa al triangolo rettangolo qui indicato.



RISOLUZIONE
di Giorgio Franco di Padova.

I tre numeri della terna devono appartenere alla stessa decina in quanto per tutti e tre la prima cifra è A.
Non possono appartenere alla decina dei numeri compresi fra 30 e 39 in quanto si ha:

$$39^2 - 30^2 < 31^2;$$

analogamente si verifica che non possono appartenere a nessuna altra delle decine successive.
Possono quindi appartenere solo o alla decina dei numeri compresi fra 2o e 29 o alla
decina dei numeri compresi fra 10 e 19.
Fissate queste limitazioni ulteriori facili indagini portano a concludere che l'unica soluzione è rappresentata dalla terna pitagorica primitiva:

$$29^2 = 21^2 + 20^2.$$

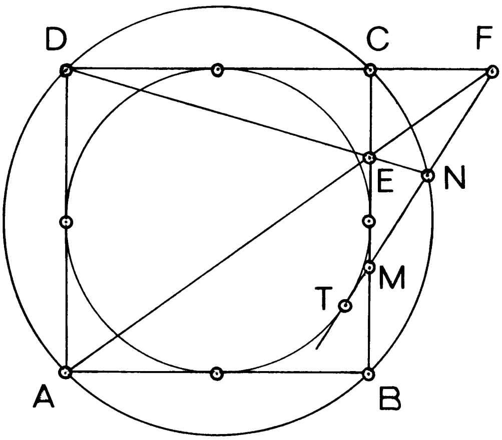
$$(A = 2;\ B = 9;\ C = 1;\ D = 0).$$

Altri risolutori:
Francesco Fogliotti di Ge-Sampierd. e
Fernando Rossi del L.Cl. "Dante" di Firenze.

RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI PROPOSTE

Questione N. 28

Per il vertice A di un quadrato ABCD si conduca una retta che incontri BC in E e il prolungamento di DC in F. Si indichi con M il punto medio di BE e con N la intersezione della retta DE con la retta FM. Dimostrare:



I) che la retta FM è tangente alla circonf. iscritta nel quadrato.
II) che il punto N appartiene alla circonf. circoscritta al quadrato.

RISOLUZIONE ANALITICA
di Giorgio Franco di Padova.

Si prendano come assi cartesiani gli assi dei lati opposti del quadrato. Le coordinate dei quattro vertici sono:

$$A(-a; -a);\quad B(a; -a)$$
$$C(a; a);\quad D(-a; a)$$

Equazione della retta AEF:

$$y + a = m(x + a).$$

Coordinate di E:

$$E[a;\ a(2m-1)].$$

Coordinate di F:

$$F\left(\frac{2-m}{m}a\ ;\ a\right)$$

Coordinate di M:

$$M\ [a\ ;\ a(m-1)]$$

Equazione della retta FM:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & a(m-1) & 1 \\ \frac{2-m}{m}a & a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ovvero

$$(m^2-2m)x-2(m-1)y+a(m^2-2m+2)=0 \quad (1)$$

La distanza d dell'origine O da questa retta è:

$$d=\frac{|a(m^2-2m+2)|}{\sqrt{(m^2-2m)^2+4(m-1)^2}}=\dots=a$$

Equazione della retta DE:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -a & a & 1 \\ a & a(2m-1) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ovvero:

$$(m-1)x - y - am = 0 \qquad (2)$$

Risolvendo il sistema formato dalle equazioni (1) e (2) si trovano le coordinate di N:

$$x_N = \frac{-a(m^2-2)}{m^2-2m+2}$$

$$y_N = \frac{-a(m^2-4m+2)}{m^2-2m+2}$$

Si verifica infine facilmente che queste coordinate soddisfano l'equazione della circonferenza circoscritta al quadrato ABCD:

$$x^2+y^2=2a^2$$

Nel fascicolo 2-1971, pag. 6, abbiamo pubblicata una prima RISOLUZIONE GEOMETRICA di Giuseppe Guarato di Valdagno.

Questione 29

Tutte le parabole di equazione:

$$(1) \qquad y = x^2 - 2Kx + K + 1$$

passano per un punto: determinare le coordinate.
Fra le stesse parabole due hanno il vertice sulla bisettrice del I e III quadrante.

RISOLUZIONE
di Giuseppe Guarato di Valdagno e di Armando Roselli del L.Scient. di Rovigo.

I) Il punto P, comune a tutte le parabole, indipendente da K, deve avere per ascissa la soluzione dell'equazione:

$$-2Kx + K = 0 \quad , \quad K \neq 0$$

ossia $x=\frac{1}{2}$; ne segue $y=\frac{5}{4}$.
Quindi $P\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{4}\right)$

II) Il vertice V della parabola generica ha per coordinate:

$$V\left(K\ ;\ -K^2+K+1\right)$$

Il luogo dei vertici delle parabole della famiglia è dato quindi dalla parabola di equazione:

$$(2) \qquad y = -x^2 + x + 1$$

il cui vertice coincide con P.
La retta di equazione

$$y = x,$$

bisettrice del I e III quadrante incontra la (2) nei punti di ascissa $+1$, -1 e quindi le due parabole richieste si ottengono ponendo nella (1) $K = \pm 1$, ossia

$$y = x^2 - 2x + 2$$

e $$y = x^2 + 2x .$$

Claudia Criscione del L. Sc. di Rimini e Francesco Andretta di Foggia hanno svolto la prima parte nel modo seguente:

Considero due parabole ponendo nella (1)

$K = K_1$ e $K = K_2$ $(K_1 \neq K_2)$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2K_1 x + K_1 + 1 \\ y = x^2 - 2K_2 x + K_2 + 1 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro ottengo:

$$2(K_2 - K_1)x - (K_2 - K_1) = 0 ,$$

e poichè $K_2 - K_1 \neq 0$ avrò:

$x = \frac{1}{2}$ e quindi $y = \frac{5}{4}$.

In pratica, si possono scegliere due valori opportuni di K:
nel caso nostro $K = 0$ e $K = -1$
per cui si ha il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x^2 + 2x \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x = 1/2 ; \\ x = 5/4 . \end{cases}$$

Il prof. Francesco Fogliotti svolge la prima parte nel modo seguente:

L'equazione (1) si può scrivere così:

$$x^2 - y + 1 - K(2x - 1) = 0$$

I punti base si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y + 1 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

Il punto comune a tutte le parabole oltre al punto improprio Y_∞ dell'asse y è

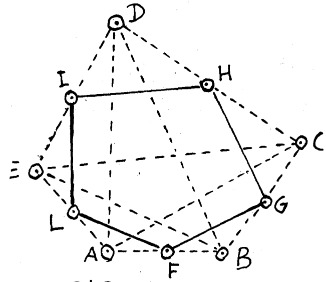
$$P\left(1/2 ; 5/4\right)$$

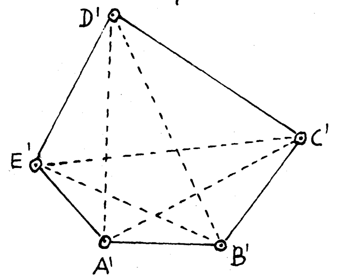
Interessanti le considerazioni inviate da Giorgio Franco di Padova.

Questione 30

Costruire un pentagono convesso conoscendo la posizione dei punti di mezzo dei cinque lati.

RISOLUZIONE
di Giuseppe Guarato di Valdagno.





Immaginiamo il problema risolto come in fig. 1. Se un pentagono è convesso tale è anche il pentagono avente per vertici i punti medi dei lati del primo. Possiamo osservare dalla figura che la spezzata chiusa individuata dalle diagonali del pentagono ha i lati paralleli a quelli del pentagono dei punti di mezzo presi alternativamente e di lunghezza doppia.
Basta quindi (fig. 2) costruire la spezzata A'B'C'D'A' (a partire da un punto A' qualsiasi) avente i lati rispettivamente paralleli ai segmenti

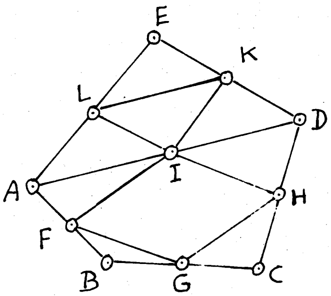
FG, HI, LF, GH, IL

e rispettivamente di lunghezza doppia.
Conducendo indi

per F la parallela ad A'B'
per G la parallela a B'C'
per H la parallela a C'D'
per I la parallela a D'E'
e infine
per L la parallela ad E'A'
si otterrà il pentagono cercato ABCDE.

RISOLUZIONE
di Ciro Imperato di Bari

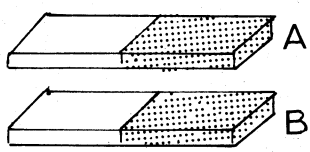
Sia ABCDE il pentagono richiesto ed F, G, H, K, L siano i punti di mezzo dei lati. Una diagonale qualunque, ad es. AD, divide il poligono nel quadrilatero ABCD e nel triangolo ADE. Con i tre punti F, G, H si può costruire il parallelogrammo FGHI che dà il punto di mezzo del lato AD (punto I), e con i tre punti I, K, L si può costruire il triangolo ADE che dà tre vertici del pentagono. I vertici B e C si trovano considerando il simmetrico del punto A rispetto al punto F e il simmetrico di D rispetto ad H.



QUAL E' LA CALAMITA VERA?

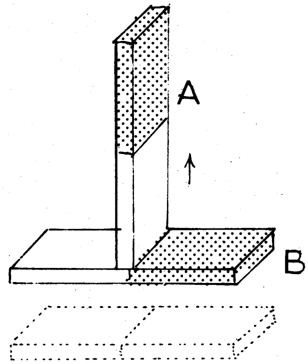
Nel fascicolo 2 (febbraio '71) pag. 5 (1ª colonna) abbiamo proposto il seguente quesito:

Di due sbarre metalliche A e B, apparentemente uguali, l'una magnetizzata e l'altra no, come si fa a riconoscere, operando soltanto con le due sbarre, quale sia la sbarra calamitata?



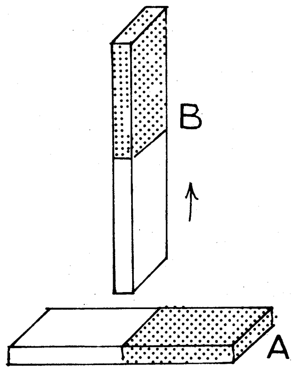
La RISPOSTA è chiaramente indicata nelle figure seguenti:

Si pongono le due sbarre nella posizione qui indicata.



Se A attrae B si deduce che A è la calamita.

Controprova:



B non attrae A:

B *non* e' la calamita.

Per esigenze di impaginazione la risoluzione della questione 16 (MATURITA' SCIENTIFICA 1969) sarà riportata nel num. 4.

NOTA DIDATTICA

da The Mathematics Teacher
nota di E.M. Harris
febbraio 1964

Si dimostra per via geometrica-analitica che la media geometrica di due (o tre) numeri non supera la loro media aritmetica.

In un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy siano dati i punti $P_1(a;b)$ e $P_2(b;a)$ con a e b entrambi positivi. I punti P_1 e P_2 determinano la retta di equazione

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ b & a & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ovvero} \quad x + y = a + b$$

Detto M il punto medio del segmento $P_1 P_2$ si ha $M \equiv \left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$.

L'iperbole equilatera, avente per asintoti gli assi Ox e Oy e passante per i punti P_1 e P_2 ha per equazione

$$xy = ab.$$

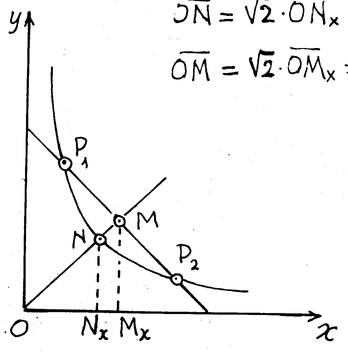
Si osserva che il punto $N \equiv (\sqrt{ab}; \sqrt{ab})$ appartiene a questa iperbole e che inoltre i punti M ed N sono sulla retta $y = x$, bisettrice dell'angolo degli assi.

La convessità dell'iperbole rispetto all'origine fra i punti P_1 e P_2 ci assicura che è $\overline{ON} \leq \overline{OM}$ (I), per tutte le coppie di numeri positivi a e b,

E poichè e:

$$\overline{ON} = \sqrt{2} \cdot \overline{ON}_x = \sqrt{2}\sqrt{ab},$$

$$\overline{OM} = \sqrt{2} \cdot \overline{OM}_x = \sqrt{2}\,\frac{a+b}{2},$$



sostituendo nella (I) e semplificando si ha:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

cioè... la media geometrica di due numeri non supera la loro media aritmetica.

La questione si può estendere per tre numeri.

Siano $P_1(a,b,c)$, $P_2(b,c,a)$, $P_3(c,a,b)$ tre punti dello spazio, aventi coordinate tutte positive. Esse determinano il piano di equazione:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ovvero}$$

$$x + y + z = a + b + c.$$

Il punto $M \equiv \left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{3}\right)$ è il baricentro del triangolo $P_1 P_2 P_3$.

La superficie di equazione

$xyz = abc$, (**iperboloide** di rotazione) passa per i punti P_1 P_2 P_3 e volge la convessità verso l'origine degli assi, per cui se

$N \equiv \left(\sqrt[3]{abc}, \sqrt[3]{abc}, \sqrt[3]{abc}\right)$ è il suo punto che, come M, sta sulla retta

$x = y = z$ si ha:

$$\overline{ON} \leq \overline{OM} \qquad \text{(II)}$$

E poichè è

$\overline{ON} = \sqrt{3}\sqrt[3]{abc}$ e $\overline{OM} = \sqrt{3}\,\frac{a+b+c}{3}$

sostituendo nella (II) e semplificando si ha

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

Il segno uguale vale nel caso che sia $a=b=c$

In generale si ha:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

C R I P T A R I T M E T I C A

Ricostruire l'addizione criptoaritmetica, sapendo che T e' una cifra pari

```
O T T O +
  U N O =
---------
N O V E
```

Risoluzione

di Fernando Rossi del L.Cl."Dante" Firenze.

E'evidente che deve essere

$$N = O + 1 \quad (4^a \text{colonna})$$

e quindi

$$T + U = O + 10 \quad (3^a \text{colonna})$$

e poiche' $U < 10$ sara' $T > 0$.

a) Non puo'essere $\boxed{O = 1}$
perche'seguirebbe $N = 2 = E$.

b) Se $\boxed{O = 2}$ sara'
$N = 3$: $E = 4$: $T = 6$ oppure 8.
Non puo'essere:
ne' $T = 6$, perche'seguirebbe
$U = 6 = T$,
ne' $T = 8$, perche'seguirebbe
$U = 3 = N$.

c) Se $\boxed{O = 3}$ sara'
$N = 4$: $E = 6$: $T = 2$ oppure 8
Non puo'essere:
ne' $T = 2$, perche'seguirebbe
$V = 6 = E$,
ne' $T = 8$, perche'seguirebbe
$U = 4 = N$.

d) Se $\boxed{O = 4}$ sara'
$N = 5$, $E = 8$, $T = 6$,
e si avra' l'UNICA SOLUZIONE: infatti, continuando in modo analogo, l'indagine per $O > 5$, NON si trovano altre soluzioni.

NOTA. Se si prescinde dalla condizione che T sia una cifra pari, si possono determinare operando in modo analogo altre quattro soluzioni:

```
2552 +      3553 +
 732 =       843 =
------      ------
3284        4396

3773 +      4774 +
 543 =       654 =
------      ------
4316        5428
```

ALTRI RISOLUTORI

- *Aniello Agrosi - Diso (Lecce)*
- *Francesco Fogliotti - Genova Samp.*
- *Franco Giorgio - Padova*

CURIOSITA' ARITMETICHE

Sui quadrati di alcuni numeri:

$12^2 = 144$	$441 = 21^2$
$13^2 = 169$	$961 = 31^2$
$112^2 = 12544$	$44521 = 211^2$
$113^2 = 12769$	$96721 = 311^2$
$1112^2 = 1236544$	$4456321 = 2111^2$
$1121^2 = 1256641$	$1466521 = 1211^2$
$1113^2 = 1238769$	$9678321 = 3111^2$
$1122^2 = 1258884$	$4888521 = 2211^2$
$1212^2 = 1468944$	$4498641 = 2121^2$

F.F.

AMICI DI "ANGOLO ACUTO"
SOSTENITORI:

Sig. Carlo Felice Ottaviani - FIRENZE
Prof. Giuseppe Ottaviani - ROMA
" Massimiliano Ottaviani - PISA
" Paola Ottaviani - VERONA
Prof. Alessandro Blasi - ROMA
" Riccardo Ottaviani - ROMA
" Marcello Ottaviani - MILANO
Prof. Vincenzo Asprella - MATERA
Ist. Magistrale "Suardo" - BERGAMO
Prof. Gianna Maria Vaghi - MILANO
" Massimo Cencetti - FIRENZE
Sig. Francesco Toninelli - TORINO
Stud. Mario Valle - MILANO
Prof. Antonio Pesce - FIRENZE
Stud. Fernando Rossi - FIRENZE
Prof. Luigia Spilimbergo - ODERZO (TV)
" Tullio Spinelli - MILANO
Sig. Giulio Mosca - TERAMO
Prof. Biagio Caltagirone - SUTERA (CL)
" Mariano Bruni - COSENZA
Istituto Magistrale - SALUZZO (CN)
Stud. Franco Cervelin - FIRENZE
Prof. Rosetta Bignami - CREMONA
Ist. Tecnico Agrario - FIRENZE
Stud. Salvatore Palazzo - BRESCIA
Biblioteca Scuola Magistrale - LOCARNO (Svizzera)
Prof. Gennaro Correale - SARNO (Salerno)
Prof. Antonio Giuranna - PARMA
Prof. M.Luisa Piazza - FIRENZE
Prof. Giorgio Sestini - FIRENZE
Liceo Scientifico - PARMA
Prof. Tommaso Ferrandina - MATERA
Ist. Prof. per l'Agricoltura - FIRENZE
Geom. Domenico Valerio - FONDI (LT)
Prof. Pia Forte - BRESCIA
Stud. Lucia Beretta - BERGAMO
Prof. Fleana Giuntoli - BOLOGNA
Prof. Annunziata Palumbo - NAPOLI
Stud. Vittorio Ferrero - TORINO
Prof. Antonia Filice - COSENZA
Prof. Giovanna Baratta - COSENZA

AVVERTENZE IMPORTANTI PER I RISOLUTORI.

Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte.
Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale.
Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età.
Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad:

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78
50131 FIRENZE

entro il
31 maggio 1971

Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori.
Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.

P E R   F A V O R E,   N O N   C E S T I N A T E.

Se questo periodico non vi interessa, vi preghiamo di passarlo ad un appassionato che voglia sottoscrivere l'abbonamento, oppure di respingere le copie ricevute al MITTENTE:

ANGOLO ACUTO - Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE

Coloro che trattengono ANGOLO ACUTO sono pregati di inviare con sollecitudine la loro quota di abbonamento.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 Gennaio 1970.
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso.*
Stampato dalla Tipolitografia "Gino Capponi" Via G. Capponi 27 - Firenze.