ANNO II - 1971

# L'Angolo acuto

aprile

**4**

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

**periodico mensile**
**a cura di Giuseppe Spinoso**
**Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE**
**Telefono 588.429**

**conto corrente postale 5/27919**
**Spedizione in abbonamento postale**
**Gruppo III - 70**

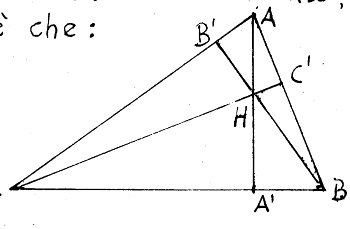
## LA PALESTRA DELLE GARE

### QUESTIONI PROPOSTE

*(Non sono poste in ordine di difficoltà)*

### 70

Dimostrare che in ogni triangolo ABC, il rettangolo che ha per lati i segmenti compresi fra l'ortocentro H e gli estremi di una altezza ha area costante, cioè che:




$$\overline{AH}\cdot\overline{HA'} = \overline{BH}\cdot\overline{HB'} = \overline{CH}\cdot\overline{HC'}.$$

S.H.

### 71

Nella frazione $\frac{37}{75}$ la cifra delle unità del numeratore è uguale alla cifra delle decine del denominatore. Sopprimendo tali cifre si ha $\frac{3}{5} \neq \frac{37}{75}$.

Operando analogamente sulla frazione $\frac{26}{65}$ si ottiene:

$$\frac{2}{5} = \frac{26}{65}$$

Determinare le frazioni i cui termini siano numeri interi di due cifre (ZERO ESCLUSO), del tipo $\frac{AB}{BC}$ per le quali sia verificata l'uguaglianza:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A}{C}.$$

Alfonso La Paglia

- continua a PAGINA 8 -

Abbonamento annuale L. 1000. **Un fascicolo L. 150.**

Abbonamento sostenitore da L. 1500 a Lire 5000.

Ogni appassionato invii la sua quota, secondo le sue possibilità, affinchè ANGOLO ACUTO possa migliorare e aumentare il numero delle pagine.

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio: i nuovi Abbonati hanno diritto a ricevere i fascicoli arretrati.

## QUESTIONE 16

# Maturità scientifica 1969

*La lunghezza dei lati BC, CA, AB del triangolo ABC sono rispettivamente:*

$$2a, \qquad s - x, \qquad s + x,$$

*essendo $s$ e $a$ elementi dati.*

*Si esprimano per mezzo dei dati e di $x$ l'area del triangolo ed il raggio $R$ del cerchio ad esso circoscritto.*

*Indi si studi l'andamento della funzione $R^2(x)$, indicando in particolare gli intervalli nei quali essa e' crescente o decrescente.*

*NOTA: Si ricordi che la lunghezza del raggio del cerchio circoscritto al triangolo e'un quarto del rapporto fra il prodotto delle lunghezze dei lati e l'area.*

*Risoluzione*

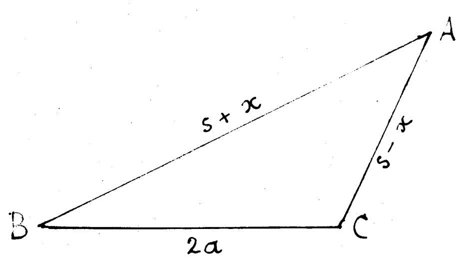
*di Armondo Roselli del L.Sc.di Rovigo*

Posto $\overline{BC} = 2a$, $\overline{CA} = s - x$, $\overline{AB} = s + x$, poiche' ciascun lato di un triangolo e' *maggiore* della differenza degli altri due lati ed e' *minore* della loro somma, si debbono verificare le seguenti condizioni:

$$(s + x) - (s - x) < 2a < (s + x) + (s - x)$$

ovvero semplificando

$$x < a < s \qquad (1)$$




Poiche' inoltre ciascun lato deve essere positivo si ha anche

$$-a < x < a \qquad (2)$$

L'area $S(x)$ del triangolo ABC si esprime in funzione di $x$, ricorrendo alla nota formula di Erone.

Posto

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 2p \qquad \text{si ha:}$$

$$2p = 2a + (s + x) + (s - x) = 2(a + s) ;$$

da cui

$$p = s + a \qquad ; \quad p - 2a = \ldots = s - a$$

$$p-(s-x) = \ldots = a + x ; \quad p-(s+x) = \ldots = a - x$$

quindi

$$S(x) = \sqrt{(s^2-a^2)(a^2-x^2)}$$

Detto $R(x)$ il raggio del cerchio circoscritto ad ABC si ha:

$$R(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA}}{S(x)} = \ldots = \frac{a(s^2- x^2)}{2\sqrt{(s^2-a^2)(a^2-x^2)}}$$

e quindi:

$$R^2(x) = \frac{a^2}{4(s^2-a^2)} \cdot \frac{(s^2- x^2)^2}{a^2- x^2} , \qquad (3)$$

e poiche' $a < s$, ne segue che il coefficiente $\dfrac{a^2}{4(s^2-a^2)}$ e'una costante positiva K; si puo'quindi scrivere:

$$R^2(x) = K \cdot \frac{(s^2-x^2)^2}{a^2-x^2} \qquad (4)$$

Per lo studio della funzione $y = R^2(x)$ bisogna tener conto dei limiti imposti dal problema:

$$-a < x < a ;$$

ne deriva subito che la funzione, internamente all'intervallo (-a ; a)

e'sempre positiva.

Per $x = 0$ si ha $\qquad y = \dfrac{s^4}{4(s^2-a^2)^2}$

Il grafico $y = R^2(x)$ risulta simmetrico rispetto all'asse y;nella (4) infatti la x figura sempre al quadrato.

*Al tendere di x* ad uno degli estremi $x = -a$ , $x = +a$ diverge positivamente e le rette $x = -a$ , $x = a$ sono ASINTOTI paralleli all'asse y.

* *

La derivata prima della funzione $y = R^2(x)$ e'

$$y'(x) = K \frac{2(s^2-x^2)(-2x)(a^2-x^2) + 2x(s^2-x^2)^2}{(a^2-x^2)^2} =$$

$$= 2K \frac{x(s^2-x^2)\left[x^2-(2a^2-s^2)\right]}{(a^2-x^2)^2}$$

e poiche e' $K > 0$ , $s^2-x^2 > 0$ si ha:

$$y'(x) \geqslant 0 \quad \text{per} \quad x\left[x^2-(2a^2-s^2)\right] \gtrless 0 \; .$$

Ne segue che

I) se $s^2 \geqslant 2a^2$ la $y = R^2(x)$ e'

decrescente per $-a < x < 0$,

crescente per $0 < x < a$

quindi ha un <u>minimo</u> relativo per $x = 0$; $R^2(x_0) = a^2$.

II) Se $s^2 < 2a^2$ la $y = R^2(x)$ e'

decrescente per $x < -\sqrt{2a^2-s^2}$

crescente per $-\sqrt{2a^2-s^2} < x < 0$

decrescente per $0 < x < \sqrt{2a^2-s^2}$

crescente per $\sqrt{2a^2-s^2} < x$ ;

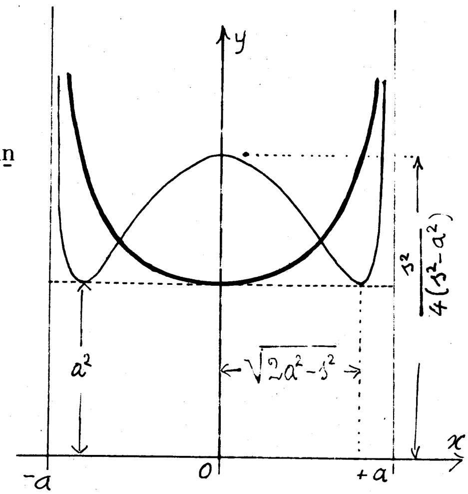
quindi ha due MINIMI relativi nei punti di ascissa

$$x_1 = -\sqrt{2a^2-s^2} \qquad x_2 = \sqrt{2a^2-s^2}$$

$$R^2(x_1) = R^2(x_2) = \ldots = a^2 \; .$$

e un MASSIMO relativo per $x = 0$ :

$$R^2(x_0) = \frac{s^4}{4(s^2-a^2)} \; .$$




OSSERVAZIONE (N.d.R)

Per determinare l'espressione $R^2(x)$ anziche'usare la formula suggerita dall'enunciato si puo'ricorrere al teorema dei seni:

Posto $B\widehat{A}C = \alpha$ si ha infatti:

$$R(x) = \frac{\overline{BC}}{2 \operatorname{sen} \alpha} \quad \text{e quindi} \quad R^2(x) = \frac{\overline{BC}^2}{4 \operatorname{sen}^2 \alpha} \tag{5}$$

Intanto dal triangolo ABC, per il teorema del coseno, si ha:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \alpha \ ,$$

da cui sostituendo e semplificando:

$$\cos \alpha = \frac{s^2 + x^2 - 2a^2}{s^2 - x^2} \quad \text{e quindi} \quad \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha =$$

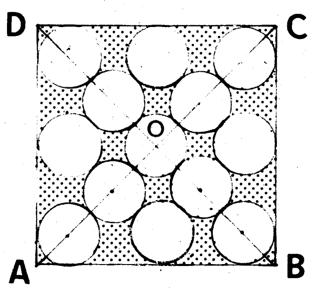
$$= \frac{(s^2-x^2)^2 - (s^2-x^2-2a^2)^2}{(s^2-x^2)^2} = \frac{(s^2-x^2+s^2-x^2-2a^2)(s^2-x^2-s^2+x^2+2a^2)^2}{(s^2-x^2)^2} =$$

$$= \ldots = 4(s^2-a^2) \cdot \frac{a^2 - x^2}{(s^2-x^2)^2} \ .$$

e sostituendo nella (5) si ritrova la (3).

## QUESTIONE 31

In un quadrato ABCD sono sistemate 13 monetine uguali di raggio $r$, disposte come nella figura seguente.




Determinare il lato del quadrato.

*RISOLUZIONE*

*di Leonardo Bacci - Ist. tecn. agrario di FIRENZE*

Detto O il punto di intersezione delle diagonali del quadrato, si ha:

$\overline{OA} = 4r + r\sqrt{2} = r(4+\sqrt{2})$;

ne segue, considerando il triangolo rettangolo isoscele AOB

$\overline{AB} = \overline{OA} \cdot \sqrt{2} = \ldots = 2r(2\sqrt{2}+1)$

*Il prof. F. Fogliotti invita i Giovani a calcolare le aree dei «vuoti» fra le monetine; questi ‹vuoti› sono di tre specie:*

*1) quattro, agli angoli:* $(1-\frac{\pi}{4})r^2$;

*2) quattro, centrali:* $(4-\pi)r^2$;

*3) otto, adiacenti ai lati:* $(2+2\sqrt{2}-\pi)r^2$

ALTRI RISOLUTORI

*A. Roselli (L.Sc) Rovigo; F. Rossi (L.Cl) Firenze; M. Barlotti (L.Cl.) Firenze; M. Da Dalt (L.Cl) Ancona; E. Frigerio (L.Sc) Milano; A. Agrosi - Diso; G. Guarato - Valdagno; G. Franco - Padova; F. Fogliotti - Genova.*

## QUESTIONE 32

Decomporre un ottagono regolare in 8 quadrati e 16 rombi uguali in modo che i lati dei quadrati e dei rombi risultino uguali alla metà del lato dell'ottagono.

## *RISOLUZIONE*

*Emma Frigerio - L.Sc. Milano*
*Marco Borlotti - L.Cl. Firenze*
*Fernando Rossi - L.Cl. - Firenze*
*Aniello Agrosi - Diso (Lecce)*

*sono pervenuti, con ragionamento, alla seguente decomposizione:*

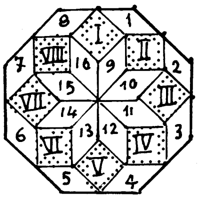


*fig. 1*

Infatti, congiungendo successivamente e alternativamente i punti medi dell'ottagono si delineano i primi otto rombi indicati nella figura (1) con i numeri 1, 2.... 8.

Successivamente si completano gli 8 quadrati I, II, III, IV, ..., VIII.

Infine congiungendo il centro dell'ottagono con gli 8 vertici dei quadrati più prossimi al centro stesso si determinano gli altri 8 rombi 9, 10, 11, .... 16.

*Emma Frigerio fa notare che esistono altre disposizioni che si possono ottenere dalla (1) con opportune traslazioni dei rombi e dei quadrati.* Esempi:

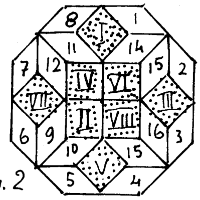


*fig. 2*

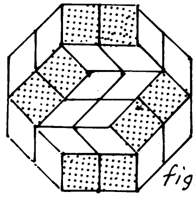


*fig. 3*

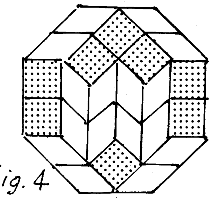


*fig. 4*

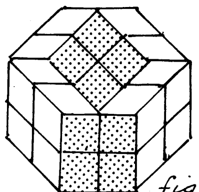


*fig. 5*

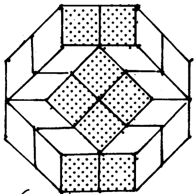


*fig. 6*

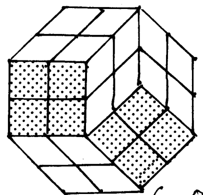


*fig. 7*

*Altri risolutori:*
*Giuseppe Guarato (I)*
*Mariangela Da Dalt - L.Cl. Ancona (II)*
*Giorgio Franco (VI). F.sco Fogliotti (VII)*

*La fig. VII decompone implicitamente l'ottagono regolare in 2 quadrati uguali e in 4 rombi uguali, aventi i lati uguali al lato dell'ottagono.*

La questione suggerisce anche la realizzazione di un giuoco di «INTARSIO» da effettuarsi con una scatola a forma di ottagono regolare e con rombi e quadrati, diversamente colorati; il giuoco è adatto per alunni della scuola elementare.

Le RISOLUZIONI delle QUESTIONI 33 · 34 · 35 saranno pubblicate nel num. 5

## QUESTIONE 36

Con SEI segmenti uguali sapete costruire QUATTRO triangoli equilateri?

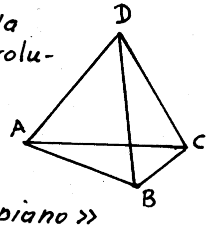
*RISOLUZIONE*

*di Emma Frigerio - L. Sc. "Einstein" Milano e del Prof. F. Fogliotti - GENOVA*

Basta disporre i sei segmenti secondo gli spigoli di un TETRAEDRO REGOLARE ABCD, avente gli spigoli uguali ai segmenti dati. Le quattro facce ABC, ABD, BCD, ACD forniscono i triangoli equilateri uguali richiesti.

*L'enunciato della questione era "volutamente" un po' sibillino:*

*Sono pervenute diverse «risoluzioni nel piano» NON ACCETTABILI.*




## CRIPTARITMETICA

*Questione n.8*

*Ricostruire la scomposizione in fattori di DROGA:*

| | | |
|---|---|---|
| **DROGA** | **NO** | |
| **ERRR** | **NO** | |
| **NO** | **NO** | **A** |
| **E** | **ET** | **ET** |
| | **E** | |

*RISOLUZIONE*

*di Marco Barlotti del L.Cl. "Galileo" di Firenze.*

Risulta immediatamente E = 1

Si sa inoltre che ERRR = $NO^2$; si tratta dunque di trovare un quadrato di quattro cifre di cui la prima e' 1 e le altre tre sono uguali fra loro.

L'unica soluzione possibile risulta essere allora ERRR = 1444 e di conseguenza NO = 38.

Allora, poiche' e' DROGA = NO · ERRR, si avra'

DROGA = 38 · 1444 = $38^3$ = 54872

Sappiamo dunque che A = 2; allora poiche' e'

NO : A = ET,

si ha ET = 38 : 2 = 19

La scomposizione e' dunque cosi' ricostruita:

| | | |
|---|---|---|
| 54872 | 38 | |
| 1444 | 38 | |
| 38 | 38 | 2 |
| 1 | 19 | 19 |
| | 1 | |

*Altri risolutori:*

- *Fernando Rossi - L.Cl. 'Dante' - Firenze*
- *Emma Frigerio, L.Sc. 'Einstein' - Milano*
- *Aniello Agrosi - Diso (Le)*
- *Mariagrazia Da Dalt, L.Cl. 'Rinaldini' - Ancona*
- *Giorgio Franco - Padova*

continuazione QUESTIONI PROPOSTE

72

Determinare due numeri sapendo che la loro SOMMA, il loro PRODOTTO e il loro QUOZIENTE sono uguali.

L. G.

73

Risolvere l'equazione:

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2}$$

L. C.

Nei prossimi numeri:

CENNI DI TEORIA DEGLI INSIEMI
*di Claudio Bernardi*

SU ALCUNI NOTI TEOREMI DI GEOMETRIA
*di Carmelo Conti*

IL PRINCIPIO DI INDUZIONE
*di Claudio Bernardi*

*AVVERTENZE IMPORTANTI PER I RISOLUTORI.*

*Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte.*
*Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale.*
*Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età.*
*Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad:*

*ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78*
*50131 FIRENZE*

entro
il 15 giugno 1971

*Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori.*
*Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.*

**PER FAVORE, NON CESTINATE.**

Se questo periodico non vi interessa, vi preghiamo di passarlo ad un appassionato che voglia sottoscrivere l'abbonamento, oppure di respingere le copie ricevute al MITTENTE:

ANGOLO ACUTO - Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE

Coloro che trattengono ANGOLO ACUTO sono pregati di inviare con sollecitudine la loro quota di abbonamento.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 Gennaio 1970.
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso.*
Stampato dalla Tipolitografia "Gino Capponi" Via G. Capponi 27 - Firenze.