L'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

ANNO II - 1971

maggio giugno

5

periodico mensile
a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE
Telefono 588.429

conto corrente postale 5/27919
Spedizione in abbonamento postale
Gruppo III - 70

LA PALESTRA DELLE GARE

Relazione anno 1970

Ecco l'elenco dei Giovani, alunni di Scuole Secondarie, che si sono distinti per il numero e per la bontà delle risoluzioni inviate:

- ROSSI Fernando - L.Cl. "Dante" - FIRENZE (27) *
- FRIGERIO Emma - L.Sc. "Einstein" - MILANO (25) *
- ROSELLI Armando - L.Sc. "Paleocapa" - ROVIGO (21) *
- BARLOTTI Marco - L.Cl. "Galileo" - FIRENZE (18) *
- DA DALT Mariagrazia - L.Cl. "Rinaldini" - ANCONA (11) *
- ZILIO Sonia - L. Cl. "T.Livio" - PADOVA (6) *
- BACCI Leonardo - Is.Tec.Agrario - FIRENZE (6) *

Vanno segnalati anche gli alunni di Scuola Media:

- FERRERO Vittorio - Sc.Med. "G. Pascoli" - TORINO e
- SUCCI Marco - Sc.Med. "Quintino Di Vona" - MILANO

Un elogio e un particolare ringraziamento agli AMICI Prof. FOGLIOTTI Francesco, Sig. FRANCO Giorgio, Sig. M° GUARATO Giuseppe, Dott. AGROSI Aniello e Sig. IMPERATO Ciro che ci hanno inviato interessanti risoluzioni delle QUESTIONI più impegnative e hanno facilitato il compito della Redazione, che spesso ha potuto pubblicare risoluzioni diverse di una stessa questione.

(*) Agli alunni contrassegnati con l'asterisco (*) sono stati inviati premi in libri.

Abbonamento annuale L. 1000. Un fascicolo L. 150.

Abbonamento sostenitore da L. 1500 a Lire 5000.

Ogni appassionato invii la sua quota, secondo le sue possibilità,
affinchè ANGOLO ACUTO possa migliorare e aumentare il numero delle pagine.

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio: i nuovi Abbonati hanno diritto a ricevere i fascicoli arretrati.

LA PALESTRA DELLE GARE

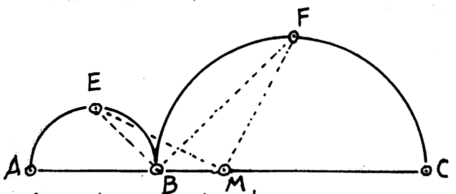
QUESTIONI PROPOSTE

(Non sono poste in ordine di difficoltà)

Avvertenze per i risolutori a pag. 16.

-74-

Siano A, B, C tre punti di una retta r. Si costruiscano in uno stesso semipiano di origine r le semicirconferenze aventi per diametro i segmenti AB e BC. I punti medi di queste semiciconfenze (E e F), e il punto B sono tre vertici di un rettangolo (EBFD); gli stessi punti E, F e il punto medio M del segmento AC sono tre vertici di un quadrato (EMFN)



Dimostrare che la somma del rettangolo EBFD e del quadrato EMFN è equivalente al quadrato avente per lato il segmento AM.

-75-

Dimostrare che, qualunque sia la base b del sistema di numerazione, il numero 10101 è sempre divisibile per 111. Determinare inoltre, in funzione di b, il loro quoziente.

A. M.

-76-

COSTRUIRE un triangolo rettangolo di cui sono noti un cateto e la somma dell'altro cateto e dell'ipotenusa.

U. N.

-77-

COSTRUIRE un triangolo rettangolo di cui sono noti un cateto e la somma dell'altro cateto e del doppio dell'ipotenusa.

U. N.

RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 33

Sono date otto palle da bigliardo di uguale raggio; una, però, pesa 8 grammi in più delle altre.
Qual è il numero minimo di pesate necessarie per individuare la palla più pesante?

G. Gaudenzi

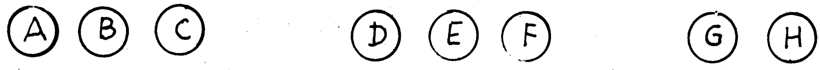
RISOLUZIONE

di Emma Frigerio del L. Sc. "Einstein" di Milano

Per individuare la palla più pesante sono sufficienti due pesate.

Si procede così:

Si suddividono le otto palle in tre gruppi:

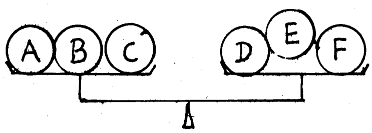


due gruppi di tre palle e uno di due.

PRIMA PESATA

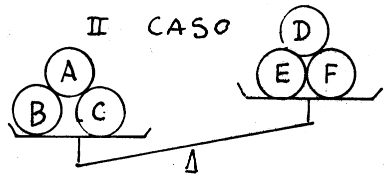
Si confrontano i due gruppi di tre palle. Si possono avere due casi:

I CASO



I due gruppi risultano di peso uguale.

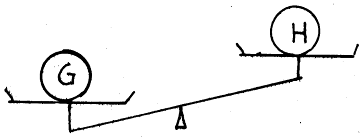
II CASO



Si individua il gruppo di peso maggiore.

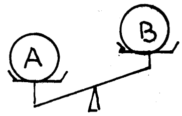
SECONDA PESATA

Si confrontano allora le due palle del terzo gruppo

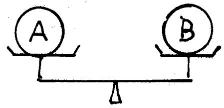


e si individua la più pesante.

Si confrontano due palle del gruppo più pesante e si hanno ancora due casi:



A è la più pesante.



C è la più pesante.

ALTRI RISOLUTORI:

Fernando Rossi - L.Cl. "Dante" Firenze - Giorgio Franco - Padova - Marco Barlotti - L.Cl. "Galileo" Firenze - Giuseppe Guarato - Valdagno - Francesco Fogliotti - Genova-Sampierd.

Giuseppe Guarato ha inviato una generalizzazione del quesito: Se n è il numero delle palle, p il numero minimo di pesate necessarie per individuare la palla più pesante, e se è:

$$3^{K-1} < n \leq 3^K \quad (\text{con } K \in N),$$

si perviene alla conclusione:

$$p = K.$$

Marco Barlotti risolve il quesito anche nel caso che si usi UNA BILANCIA A UN PIATTO solo, *e perviene alla conclusione* che sono necessarie QUATTRO *pesate per individuare la palla più pesante. I Lettori sono invitati a riproporsi la questione in questa alternativa.*

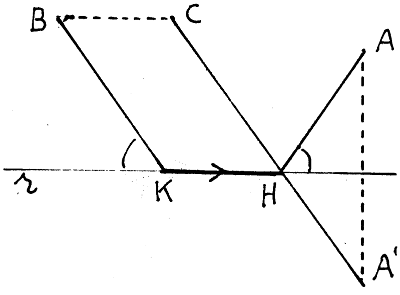
QUESTIONE 34

Dati una retta r e due punti A e B appartenenti ad uno stesso semipiano di origine r, determinare GEOMETRICAMENTE il minimo percorso di un mobile che si porti da A a B percorrendo un segmento di lunghezza assegnata sulla retta r.

RISOLUZIONE

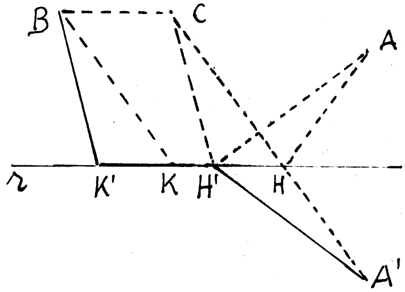
di Emma Frigerio
del L. Sc. "Einstein" di Milano

Sia AHKB (v. fig.) la richiesta spezzata di minimo percorso. Poichè il segmento HK deve essere costante, questa spezzata è minima quando è minimo il percorso AH + KB



Per uno dei due punti dati, per esempio per B, si conduca il segmento BC, parallelo ad r, uguale al segmento HK di lunghezza assegnata e con il verso concorde con il verso di percorrimento fissato sulla retta r.

Si unisca C con A' (simmetrico di A rispetto ad r) e per B si conduca la parallela a CA'; i punti H e K in cui queste rette incontrano la retta r individuano la spezzata minima cercata (*) Infatti qualsiasi altro percorso AH'K'B (con H'K' = HK) è maggiore di AHKB = A'HKB.



Dal triangolo A'H'C si ha:

$$A'C < A'H' + H'C,$$

quindi:

$$A'C < AH' + K'B;$$

e poichè

$$A'C = A'H + HC = AH + KB,$$

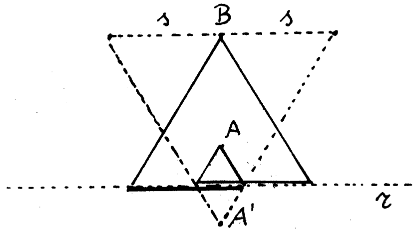
si ha:

$$AH + KB < AH' + K'B.$$

Se i due punti A e B si trovano su una retta perpendicolare ad r, si hanno due percorsi minimi AHKB e AH'K'B

(*) Per ciascun verso di percorrimento fissato sulla retta r, si ha UNA spezzata risolutiva.

relativi ai versi opposti di percorrimento su r, simmetrici alla retta AB.



ALTRI RISOLUTORI:

Aniello Agrosi - Diso (LE)
Francesco Fogliotti - Ge-Samp.
Giuseppe Guarato - Valdagno
Carlo Gujot - Trino (Vc)

QUESTIONE 35

Fissati su un piano una retta r e due punti A e B esterni ad r e giacenti dalla stessa parte rispetto ad r, costrire le circonferenze passanti per A e per B e tangenti ad r.

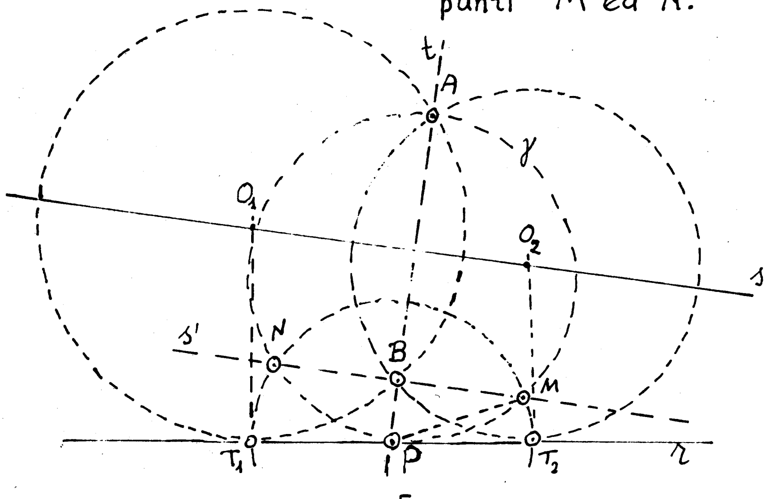
RISOLUZIONE

di Giuseppe Guarato - Valdagno (Vc) e di Armando Roselli del L. Sc. "Paleocapa" di Rovigo

Siano A e B i due punti, r la retta data e t la retta AB.
I) Supposto il problema risolto e detto P il punto di intersezione di r con t ($P = r \cap t$), e T il punto di tangenza di una delle circonferenze richieste con la retta r, per il teorema della secante e della tangente si ha: $PA : PT = PT : PB$.

Per determinare i punti T_1 e T_2 basta riportare da P su r, nei due sensi un segmento medio proporzionale fra PA e PB.

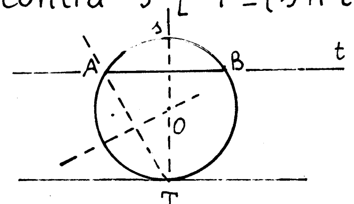
Supposto $PA > PB$ sia γ la circonferenza di diametro AP. Questa circonferenza interseca la retta s' (passante per B e parallela ad s) nei punti M ed N.



Dai triangoli rettangoli uguali PMA e PNA si deduce che $PM = PN$ è medio proporzionale fra PA e PB.
La circonferenza $P(PM)$ determina sulla retta r i due punti T_1 e T_2 nei quali le circonferenze richieste sono tangenti ad r.
La retta s, asse di AB, è il luogo geometrico dei centri delle circonferenze passanti per A e per B. Quindi le rette perpendicolari ad r nei punti T_1 e T_2 incontrano la s nei punti O_1 e O_2 delle circonferenze cercate:

$$O_1(O_1T_1) \quad e \quad O_2(O_2T_2).$$

II) Se invece t risulta parallela ad r, una delle due circonferenze degenera nella retta t e l'altra è tangente ad r nel punto T in cui r incontra s $[\,T = (s \cap r)\,]$.



Ottima la risposta inviata dal prof. F. Fogliotti di Genova-Sampierd. Sono pervenute anche tre risoluzioni ... errate.

La risoluzione della QUESTIONE 36 è stata riportata nel num. 4 a pag. 7.

L'ANTINOMIA DEL BARBIERE

«In un villaggio, viveva un barbiere «il quale aveva l'ordine di radere *tutti coloro, e soltanto coloro,* che «non si radevano da sè. Il povero «barbiere non sapeva come regolarsi «perquanto riguardava la sua per«sona: doveva o non doveva radersi?
« In un primo momento pensò «che dovesse radersi: ma poi os«servò che in tal modo egli diveniva «uno di coloro che si radevano da sè: «quindi gli era proibito di radere «questa tal persona, cioè se stesso.
« Pensò allora che non dovesse «radersi. Ma così egli diveniva uno «di coloro che non si radevano da sè: «quindi egli era obbligato a radere «questa persona, cioè se stesso.
«Ecco dunque il PARADOSSO: Egli «era obbligato contemporaneamen«te a radersi e a non radersi.
«Che doveva dunque fare?»

Questa favola analogica è raccontata dal prof. Attilio Fraiese, autore del volume «INTRODUZIONE ELEMENTARE ALLA MATEMATICA MODERNA» *Ediz. Le Monnier, prima di introdurre il lettore alla comprensione del «paradosso di Bertrand Russell sulla teoria degli insiemi» Cap XIX, pag 228. Consigliamo ai nostri lettori la lettura e lo studio che suddetto volume che fa parte della Collana* «La Matematica nella Cultura e nella Scuola» diretta dai proff. Luigi Campedelli e Roberto Giannarelli.

QUESTIONE 37

Se k è un numero intero positivo, l'espressione:

$$2^{6k+2} - 3^{2k-1}$$

è divisibile per 11.

G. C.

RISOLUZIONE

di Giuseppe Guarato di Valdagno e di Fernando Rossi del L. Cl. "Dante" di Firenze.

Posto $N = 2^{6k+2} - 3^{2k-1}$, si può scrivere successivamente:

$$N = 2^2 \cdot 2^{6k} - 3^{2k} : 3 =$$

$$= 4 \cdot 8^{2k} - 3^{2k} : 3 =$$

$$= (12 \cdot 8^{2k} - 3^{2k}) : 3 =$$

$$= \frac{11 \cdot 8^{2k} + (8^{2k} - 3^{2k})}{3}.$$

Ora la differenza di due potenze di uguale esponente pari, $8^{2k} - 3^{2k}$, è divisibile, fra l'altro, per la differenza delle basi, cioè per 11 $(= 8 - 3)$.

Ne segue che anche N è divisibile per 11.

RISOLUZIONE

del prof. Carlo Gujot di Trino.

Basta dimostrare l'identità:

$$2^{6k+2} - 3^{2k-1} = \dot{\dot{11}} \quad \text{(I)}$$ (*)

Ci serviamo del <u>principio di induzione completa</u>.

L'identità (I) è vera per $k = 1$:

$$2^8 - 3 = 256 - 3 = 253 = \dot{\dot{11}};$$

per $k = 2$:

$$2^{14} - 3^3 = 16384 - 27 = 16357 = \dot{\dot{11}};$$

Ammettiamo che sia vera per $k = n$, cioè che sia

$$2^{6n+2} - 3^{2n-1} = \dot{\dot{11}}, \quad \text{(II)}$$

ovvero,

$$2^{6n+2} = 3^{2n-1} + \dot{\dot{11}} \quad \text{(II bis)}$$

Dimostriamo, ora, che la (I) è vera anche per $k = n+1$. Infatti si ha:

$$2^{6(n+1)+2} - 3^{2(n+1)-1} =$$

$$= 2^6 \cdot 2^{6n+2} - 3^2 \cdot 3^{2n-1} =$$

(e per la II bis)

$$= 2^6 \left[3^{2n-1} + \dot{\dot{11}} \right] - 3^2 \cdot 3^{2n-1} =$$

(continua a pag. 12)

(*) Indichiamo con «$\ddot{n}$» un certo multiplo di n. Scriviamo, ad esempio,:

$$48 = \dot{\dot{6}}, \quad 35 = \dot{\dot{11}} + 2, \quad 70807 = \dot{\dot{11}}, \quad 50 = \dot{\dot{17}} - 1.$$

CENNI DI TEORIA DEGLI INSIEMI

di Claudio Bernardi

La **teoria degli insiemi** è dovuta al tedesco Giorgio Cantor e risale a circa un secolo fa; è oggi uno dei rami più importanti della matematica.

Chiamiamo *insieme* una qualsiasi collezione o aggregato di elementi; cosi' parleremo dell'insieme delle case di una città, insieme degli alunni di una classe, insieme dei punti di una retta, insieme dei primi dieci numeri interi, insieme dei numeri reali, ecc.(*). Si usano indicare gli insiemi con le lettere maiuscole; i componenti l'insieme vengono detti *elementi* e indicati con le lettere minuscole. Si pone quest'unica restrizione: ogni insieme deve essere ben definito, nel senso che occorre poter essere in grado di stabilire con certezza se un qualunque ente è o non è elemento dell'insieme: non potremo parlare ad esempio dell'insieme di tutte le persone buone di una città, essendo questo concetto troppo elastico e soggettivo.

Spesso un insieme viene indicato racchiudendo tra parentesi graffe i suoi elementi: ad esempio $\{1,2\}$ è l'insieme che contiene 1 e 2; $\{a, b, c, d, \dots, z\}$ è l'insieme delle lettere dell'alfabeto. Un insieme puo' quindi essere definito o specificando una proprietà di cui godono tutti i suoi elementi (es: insieme di tutti i numeri divisibili per 2), oppure elencando direttamente i suoi elementi anche se questi non sono legati da alcuna relazione (es.: $\{4, a, \text{Roma}\}$).

Puo' accadere che un insieme contenga *un solo elemento*, (es.: $\{2\}$) oppure che ne contenga *infiniti* (l'insieme dei punti di un piano). Si parla anche dell'insieme *vuoto*, ossia dell' insieme che non contiene alcun elemento; esso si indica con $\emptyset$. Si usano i seguenti simboli: N per indicare l'insieme dei numeri naturali, Z per i numeri interi relativi, Q per i numeri razionali ed R per i numeri reali.

Se un elemento x appartiene a un insieme A scriveremo: $x \in A$: il simbolo $\in$ si chiama *simbolo di appartenenza*. Esempio: $3 \in N$, $\pi \in r$, $2 \in \{1,2,3\}$. Si dice che B è *sottoinsieme* di A e si scrive $B \subseteq A$ se accade che ogni elemento di B è anche elemento di A, ossia se B è costituito soltanto da elementi di

(*) Cantor afferma: "Chiamasi *insieme* il raggruppamento in un tutto di oggetti, ben definiti e non confondibili, dalla nostra percezione o dalla nostra mente, che diciamo elementi dell'insieme".

A; si dice anche che B è una parte di A. Esempio:

{alunni della classe} $\subseteq$ {alunni della scuola}

$\{a, b\} \subseteq \{a, b, \dots, z\}$

$\{N \subseteq R\}$.

Si ha anche $\emptyset \subseteq A$ qualunque sia A: infatti non avendo elementi l'insieme vuoto è incluso in ogni altro insieme. Dalla definizione segue che $B \subseteq B$ per ogni insieme di B; notiamo invece che si scrive $B \subset A$ per indicare che B è sottoinsieme di A, ma A contiene altri elementi oltre quelli di B. In tal caso si dice che B è *sottoinsieme proprio* di A o che è *contenuto strettamente* in A.

Dato un insieme A possiamo considerare tutti i possibili sottoinsiemi di A: questi formano un nuovo insieme che si chiama *insieme delle parti di A* e si indica con $\mathcal{P}(A)$. Esempio:

$A = \{h, k\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{h\}, \{k\}, \{h, k\}\}$.

$B = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\ \{1,2,3\}\}$

L'insieme $\mathcal{P}(A)$ ha cioè come elementi tutti i sottoinsiemi di A.

OPERAZIONI FRA INSIEMI

A partire da due insiemi A e B possiamo costruire altri insiemi:

$A \cup B$ (A **unione** B): è l'insieme che ha per elementi sia gli elementi di A sia quelli di B (contati una sola volta). Es.:

$\{1,2,3\} \cup \{2,4,5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$; $N \cup R = R$;

insieme degli animali con lo scheletro $\cup$ insieme degli animali senza scheletro = insieme di tutti gli animali.

$A \cap B$ (A **intersezione** B): è l'insieme formato da quegli elementi che appartengono tanto ad A quanto a B. Es.:

$\{a, b, c\} \cap \{b, c, d, e\} = \{b, c\}$

{soldati} $\cap$ {italiani} = {soldati italiani}.

Puo' accadere che due insiemi abbiano come intersezione l'insieme vuoto:

{uomini} $\cap$ {donne} = $\emptyset$

{potenze di 10} $\cap$ {multipli di 3} = $\emptyset$.

Due insiemi in queste condizioni si dicono *disgiunti*.

$A - B$ (A **meno** B): è l'insieme che ha come elementi quegli elementi di A che non appartengono a B. Es.:

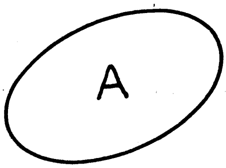
$\{4, 5, 6, 7\}$ — {i numeri pari} = $\{5, 7\}$

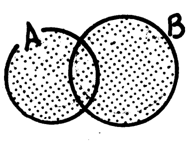
{alunni della classe} — {studentesse della scuola} = = {alunni maschi di quella classe}

{rette di un piano} — {rette parallele a una retta data} = {rette incidenti la retta data}.

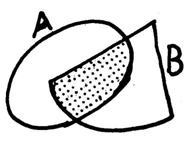
Quando accade che come nell'ultimo esempio si abbia $B \subseteq A$, allora $A - B$ viene chiamato il *complementare* di B rispetto ad A e si indica con $\complement_A B$.

Per visualizzare alcune proprietà delle operazioni sugli insiemi sono molto utili (anche se solo a un livello intuitivo) i *diagrammi del Venn*. Si tratta di indicare ogni insieme con un cerchietto, o con un'ellisse o con una linea chiusa; nell'interno si possono o no segnare dei punti che indicano i vari elementi dell'insieme. Potremo così rappresentare graficamente:

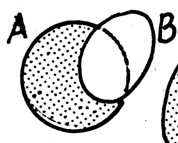




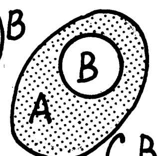
$A \cup B$



$A \cap B$



$A - B$



$\complement_A B$

Usando questi diagrammi si possono verificare facilmente importanti relazioni: ad esempio valgono le *proprieta'distributive dell'unione rispetto all'intersezione e viceversa* (analoghe alla proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma $a(b + c) = ab + ac$):

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Notiamo esplicitamente che nella prima relazione con la scrittura al primo membro indichiamo l'intersezione di A con l'insieme unione di B e C; al secondo membro invece indichiamo la unione dei due insiemi intersezione rispettivamente di A con B e di A con C (e analogamente nella seconda uguaglianza). Proviamo ad esempio a verificare la prima per mezzo dei diagrammi del Venn.

Il primo membro è rappresentato dalla parte a doppio tratteggio (Fig.a):

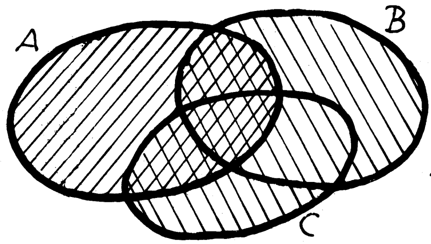


Fig. a

Il secondo membro invece da tutta la parte tratteggiata (Fig.b)

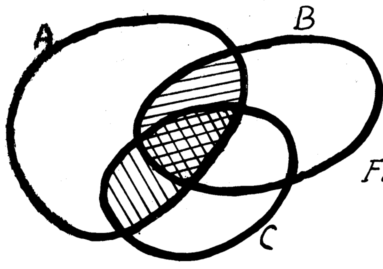


Fig. b.

Come si vede si ha l'uguaglianza cercata.

Il lettore provi a verificare altre proprietà, ad esempio:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \cup (B \cap A) = A$$

$$(A - B) \cup (A \cap B) = A$$

continuazione *QUESTIONE 37* da pagina 7.

$$= 64 \cdot 3^{2n-1} + 64 \cdot \dot{11} - 9 \cdot 3^{2n-1} =$$

$$= 55 \cdot 3^{2n-1} + 64 \cdot \dot{11} = \dot{11}.$$

e quindi, per il principio di induzione, la (I) è vera per qualunque valore positivo intero di K.

QUESTIONE 38

Se in un triangolo ABC si ha

$$r \cdot r_a = r_b \cdot r_c \quad (I)$$

il triangolo risulta rettangolo in A.

Con r, r_a, r_b, r_c sono state indicate le misure, rispettivamente del raggio della circonferenza inscritta e delle tre circonferenze exiscritte al triangolo.

G.C.

RISOLUZIONE

di Giuseppe Guarato di Valdagno

Se indichiamo con $2p = a+b+c$ il perimetro del triangolo ABC e con S la sua area, per le note formule:

$$r = \frac{S}{p}, \quad r_a = \frac{S}{p-a},$$

$$r_b = \frac{S}{p-b}, \quad r_c = \frac{S}{p-c},$$

la relazione data (I) diventa

$$\frac{S}{p} \cdot \frac{S}{p-a} = \frac{S}{p-b} \cdot \frac{S}{p-c}$$

da cui

$$p(p-a) = (p-b)(p-c).$$

Da questa, sviluppando e riducendo si ha successivamente:

$$p^2 - pa = p^2 - (b+c)p + bc;$$

$$p(b+c-a) = bc;$$

$$\frac{a+b+c}{2}(b+c-a) = bc;$$

$$(b+c)^2 - a^2 = 2bc;$$

e infine

$$b^2 + c^2 = a^2,$$

che è la nota relazione PITAGORICA relativa ad un triangolo ABC rettangolo in A.

Ottime le risposte di: Giorgio Franco di Padova, Aniello Agrosi di Diso, Francesco Fogliotti di Genova e Fernando Rossi del L. Cl. "Dante" di Firenze.

LIBRI RICEVUTI

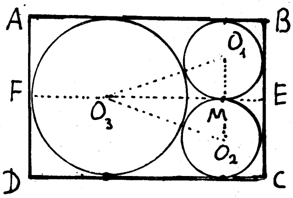
A. Fadini - Manuale per la risoluzione dei problemi ad uso degli Istituti Magistrali - Ediz. PARAVIA

A. Sartori - F. Laurenti. Problemi di 2° grado - Ediz. PARAVIA

R. Barbarito - F. Canni Giacconi - Geometria a indirizzo moderno - per il biennio della scuola media superiore, Edizione PARAVIA

QUESTIONE 39

Osserva la figura: ciascun lato del rettangolo è tangente ad una o a due delle tre circonferenze, che sono due a due tangenti esternamente fra loro.
Determinare l'area del rettangolo, sapendo che il raggio delle due circonferenze uguali ha per misura r.



RISOLUZIONE

di Elisabetta Grazzini del L. Sc. "L. da Vinci" di Firenze.

Larghezza del rettangolo $= 4r = \overline{BC}$
Lunghezza del rettangolo $= \overline{AB} =$

$$= \overline{FE} = \overline{FO_3} + \overline{O_3M} + \overline{ME} =$$
$$= 2r + \sqrt{\overline{O_3O_2}^2 - \overline{O_2M}^2} + r =$$
$$= 3r + \sqrt{9r^2 - r^2} =$$
$$= 3r + 2r\sqrt{2} =$$
$$= (3 + 2\sqrt{2})r.$$

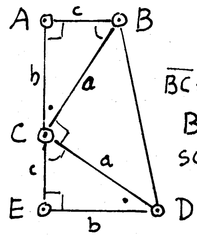
L'area S è quindi:

$$S = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = \dots =$$
$$= 4(3 + 2\sqrt{2})r^2.$$

ALTRI RISOLUTORI:

Mariagrazia Da Dalt. L. Cl. Ancona
Emma Frigerio. L. Sc. "Einstein" Mi.
Fernando Rossi. L. Cl. "Dante" Fi.
Marco Barlotti. L. Cl. "Galileo" Fi.
Armando Roselli - L. Sc. Rovigo
Leonardo Bacci. Ist. Tecn. Agr. Fi
Aniello Agrosi - Diso (Le) -
Francesco Fogliotti - Ge - Samp.
Giuseppe Guarato - Valdagno
Giorgio Franco - Padova

UNA SEMPLICE DIMOSTRAZIONE del teorema di PITAGORA



ABC triangolo rettangolo in A.
$\overline{BC} = a$; $\overline{AC} = b$; $\overline{AB} = c$.
BCD triangolo isoscele rettangolo in C.
E proiezione ortogonale di D sulla retta AC.

I triangoli ABC, ECD risultano uguali *(2° criterio)*; ne segue:
$\overline{ED} = \overline{AC} = b$; $\overline{EC} = \overline{AB} = a$
L'area S del trapezio ABDE si può calcolare in due modi:

$$S = S_{(ABC)} + S_{(ECD)} + S_{(BCD)} = \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}a^2 = \boxed{\frac{2bc + a^2}{2}}.$$

$$S = \frac{\overline{AB} + \overline{ED}}{2} \cdot \overline{AE} = \frac{c+b}{2}(c+b) = \frac{(b+c)^2}{2} = \boxed{\frac{b^2+c^2+2bc}{2}}.$$

E confrontando queste due espressioni si deduce che deve essere

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

CRIPTARITMETICA

OMAGGIO a Roma Capitale d'Italia

★

Ricostruire l'addizione:

$$\begin{array}{r} R\,O\,M\,A\,+ \\ C\,A\,P\,I\,+ \\ T\,A\,L\,E\,+ \\ 1\,8\,7\,0\,= \\ \hline 1\,\star\,9\,7\,0 \end{array}$$

sapendo che $\star = 6$; e che

$P < M < O < L < A$; (I)

$R < C < I < E < T$. (II)

Sono pervenuti, con ragionamento, alla determinazione dell'unica soluzione:

Marco Succi della Sc. Media "Quintino Di Vona" di Milano - Giuseppe Guarato di Valdagno - Giorgio Franco di Padova - Fernando Rossi "L. Cl. "Dante" di Firenze - Aniello Agrosi di Diso (Lecce).

L'addizione ricostruita è:

$$\begin{array}{r} 1\,4\,2\,8\,+ \\ 3\,8\,0\,5\,+ \\ 9\,8\,6\,7\,+ \\ 1\,8\,7\,0\,= \\ \hline 1\,6\,9\,7\,0 \end{array}$$

La seguente *RISOLUZIONE* è stata dedotta dalle ottime risposte di G. Guarato e G. Franco.

Poichè $\star = 6$, il "TOTALE" è 16970 e quindi l'addizione da ricostruire si semplifica nella seguente:

$$\begin{array}{rrrrl} & d & c & b & a \\ & R & O & M & A\ + \\ & C & A & P & I\ + \\ & T & A & L & E\ = \\ \hline 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Poichè nell'operazione compaiono dieci lettere distinte, una di esse deve essere «ZERO». Tenendo conto delle (I) e (II) deve essere «zero» la P o la R. Non potendo il numero "ROMA" iniziare con "zero", sarà

$P =$ ZERO

Si avrà allora:

dalla colonna a):

$A + I + E = 10n$ (III) $(n = 1; 2)$;

dalla colonna b):

$M + L = 10 - n$ (IV);

dalla colonna c):

$O + 2A = 10m$ (V) $(m = 1; 2)$;

dalla colonna d):

$R + C + T = 15 - m$ (VI).

Per la (I) si può porre:

$A = O + r$ $(r = 2; 3; ...; 7)$ (VII)

e dalla V, tenendo conto della VII si ricava:

$$\sigma = \frac{2}{3}(5m - r) \qquad (\text{VIII})$$

— — — — —

Se $m=1$ e $r=2$

$\Rightarrow \quad \sigma=2\,,\ A=4\,,$

e quindi:

$T=9 \Rightarrow R+C=5 \Rightarrow$

$R=1$	oppure $R=2$
$C=4$;	$C=3$;
ma segue	
$A=4=C$ (impossibile)	$\sigma=2=R$ (impossibile)

Se $m=2$, i soli valori accettabili di r, per la VIII, sono:

$r=4$ oppure $r=7$.

Se $r=4 \Rightarrow$

$\sigma=4;\ A=8;\ T=9;$

$R+C=4 \Rightarrow$

$\boxed{R=1}$ e $\boxed{C=3}$

Inoltre (colonna a):

$A+I+E=20;\ (n=2);$

$8+I+E=20 \Rightarrow$

$I+E=12 \Rightarrow$

$\boxed{I=5}$ e $\boxed{E=7}$

Infine (colonna b):

$M+L=8 \Rightarrow$

$\boxed{M=2}$ e $\boxed{L=6}$

Ne segue l'addizione:

R O M A +	1 4 2 8 +
C A P I +	3 8 0 5 +
T A L E =	9 8 6 7 =
1 5 1 0 0	1 5 1 0 0.

Se $m=2$ e $r=7$ segue per la VIII:

$\sigma=2$ e $A=9$;

(colonna a):

$A+I+E=20 \qquad (n=2)$

$9+I+E=20$;

(colonna b):

$M+L=10-2=8 \Rightarrow$

$M=2$ e $L=6$.

Inoltre, poiché

$L \neq 8 \Rightarrow T=8$;

e poiché (colonna d):

$R+C+T+m=15 \Rightarrow$

$R+C=15-T-m=15-8-2=5$

$\Rightarrow R=1$ e $C=4$.

Ma (colonna a):

$A+I+E=20, \qquad (n=2);$

$9+I+E=20,$

$I+E=11 \Rightarrow$

$I=3$	oppure $I=4$
$E=8$	$E=7$
ma segue	ma segue
$E=8=T$ (impossibile)	$I=4=C$ (impossibile).

Si può concludere che la soluzione sopraindicata è UNICA.

AMICI DI "ANGOLO ACUTO" SOSTENITORI:

Prof. Bruno De Finetti - ROMA
Stud. Vittorio Ferrero - TORINO
Prof. Annunziata Palumbo - NAPOLI
Prof. Eduardo Scirè - COSENZA
Stud. Renato Brecciaroli - MESSINA
Prof. Carmelo Aloe - COSENZA
Sig. Eugenio Fortino - AVELLINO
Prof. Anna Fanelli - FIRENZE
Prof. Flora Fiorentini - FIRENZE
Prof. Nicola Ginatempo - MESSINA
Prof. Mario Ventriglia - S. MARIA C.V. (CE)
Prof. Vittorina Faccenda - PAVIA
Prof. Giovanni Lafata - TRAPANI
Prof. Orazio Vecchio - ACICATENA (CT)

ANGOLO ACUTO rivolge un vivo appello alle Autorità Scolastiche ed ai Dirigenti di Case Editrici e di Enti vari perchè vogliano inviarci premi da assegnare ai Giovani che avranno maggiormente impegnato le loro forze intellettuali nelle interessanti gare proposte nella PALESTRA e nelle varie rubriche.

DIFFONDETE "ANGOLO ACUTO" RICHIEDETECI COPIE DI SAGGIO PER I VOSTRI AMICI O INVIATECI I LORO INDIRIZZI ESATTI

A chi ci procurerà DIECI nuovi abbonati invieremo l'abbonamento gratuito.

AVVERTENZE IMPORTANTI PER I RISOLUTORI.

Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte.
Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale.
Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età.
Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad:

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78
50131 FIRENZE

entro il
31 luglio 1971

Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori.
Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.

PER FAVORE, NON CESTINATE.

Se questo periodico non vi interessa, vi preghiamo di passarlo ad un appassionato che voglia sottoscrivere l'abbonamento, oppure di respingere le copie ricevute al MITTENTE:

ANGOLO ACUTO - Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE

Coloro che trattengono ANGOLO ACUTO sono pregati di inviare con sollecitudine la loro quota di abbonamento.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 Gennaio 1970.
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso.*
Stampato dalla Tipolitografia "Gino Capponi" Via G. Capponi 27 - Firenze.