ANNO II - 1971

l'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

luglio

6

periodico mensile
a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE
Telefono 588.429
conto corrente postale 5/27919
Spedizione in abbonamento postale
Gruppo III - 70

LA PALESTRA DELLE GARE

QUESTIONI PROPOSTE

(Non sono poste in ordine di difficoltà)

Avvertenze per i risolutori a pag. 8.

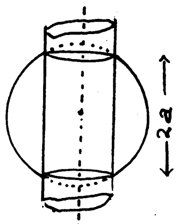
-78-

LA SFERA FORATA

In una sfera piena è stato praticato un foro cilindrico, lungo $2a$, il cui asse passa per il centro della sfera.

Calcolare il volume della sfera forata.

E.E.



-79-

Il prodotto di quattro numeri interi consecutivi, aumentato di 1 è un quadrato perfetto.

L.B.

-80-

Dimostrare che il polinomio:

$$x(x+y)(x+2y)(x+3y)+y^4$$

è uguale al quadrato di un trinomio.

L.B.

continua a pagina 2.

Abbonamento annuale L. 1000. Un fascicolo L. 150.

Abbonamento sostenitore da L. 1500 a Lire 5000.

Ogni appassionato invii la sua quota, secondo le sue possibilità, affinchè ANGOLO ACUTO possa migliorare e aumentare il numero delle pagine.

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio: i nuovi Abbonati hanno diritto a ricevere i fascicoli arretrati.

Prova scritta di Matematica — 3 Luglio 1971
MATURITA' MAGISTRALE

Un trapezio isoscele ha gli angoli alla base maggiore di 60° ; la sua base maggiore è B, la minore è b.
Facendo ruotare il trapezio di un giro completo, attorno alla bisettrice di uno degli angoli formati da un lato obliquo col prolungamento della base maggiore, si ottiene un solido del quale si chiede la descrizione.
Nell'ipotesi che sia $B = 2b$, si calcoli il volume del solido.

Prova scritta di Matematica — 3 Luglio 1971
MATURITA' SCIENTIFICA

Il candidato risolva, a sua scelta, almeno due dei seguenti quesiti:

I) E' dato il triangolo AOB, rettangolo in O, del quale sia h l'altezza relativa all'ipotenusa. Detta x l'ampiezza dell'angolo $O\hat{A}B$, e posto $tg\,\frac{x}{2} = t$, si esprima, per mezzo di h e di t, il perimetro del triangolo e si studi l'andamento della funzione di t così ottenuta.

II) Fra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio assegnato, si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e del doppio della base.

III) Si studi il grafico della funzione
$$y = 2\,sen\,x + sen\,2x\,,$$
nell' intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$.

IV) Considerata la generica parabola di equazione
$$x = ay^2 + by + c\,,$$
si determinino i coefficienti a, b, c in modo che essa passi per i punti $(-6;0)$, $(0;2)$, $(0;6)$; indi si calcoli l'area della regione piana limitata dalla curva e dalle tangenti ad essa nei punti di ascissa nulla.

RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 40

Determinare il 6°, il 7° e l'8° termine della successione

$$2;\ 3;\ 5;\ 9;\ 17;\ldots$$

RISOLUZIONE

di Giorgio Franco di Padova

Detto a_n il termine generico della successione assegnata, essa si può scrivere in uno dei modi seguenti:

1°)

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2 \\
a_2 &= 2a_1 - 1 &&= 3 \\
a_3 &= 2a_2 - 1 &&= 5 \\
a_4 &= 2a_3 - 1 &&= 9 \\
a_5 &= 2a_4 - 1 &&= 17
\end{aligned}$$

e quindi anche:

$$\begin{aligned}
a_6 &= 2a_5 - 1 &&= 33 \\
a_7 &= 2a_6 - 1 &&= 65 \\
a_8 &= 2a_7 - 1 &&= 129.
\end{aligned}$$

Il termine generico è:

$$\boxed{a_n = 2a_{n-1} - 1} \qquad \mathrm{I}$$

2°)

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2 \\
a_2 &= 2 + 2^0 \\
a_3 &= 2 + 2^0 + 2^1 \\
a_4 &= 2 + 2^0 + 2^1 + 2^2 \\
a_5 &= 2 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\boxed{a_n = 2 + 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-2}} \qquad \mathrm{II}$$

3°)

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2^0 + 1 &&= 1+1 \\
a_2 &= 2^1 + 1 &&= 2+1 \\
a_3 &= 2^2 + 1 &&= 4+1 \\
a_4 &= 2^3 + 1 &&= 8+1 \\
a_5 &= 2^4 + 1 &&= 16+1 \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$a_n = 2^{n-1} + 1 \qquad \mathrm{III}$$

Quest'ultima espressione di a_n risulta la più semplice e immediata.

Sono pervenute 13 risposte esatte – vedi tabella a pag. 8 –

QUESTIONE 41

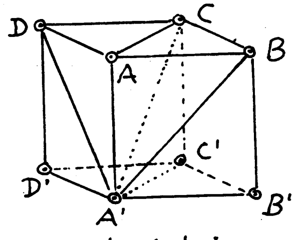
Determinare l'ampiezza dell'angolo formato da una diagonale del cubo con il piano di una delle sue facce.

F. Criscione

RISOLUZIONE

di Marco Barlotti del Liceo Class. "Galileo" di Firenze.

Consideriamo nel cubo



ABCDA'B'C'D' i triangoli A'CB, A'CC', A'CD.

(continua a pag. 6)

NOTE DIDATTICHE

Su alcuni noti teoremi di geometria

di Carmelo Conti

1. Premettiamo il:

Teorema - *Se due triangoli simili hanno un lato non corrispondente uguale, questo lato e' medio proporzionale fra i lati corrispondenti a tale lato nei due triangoli.*

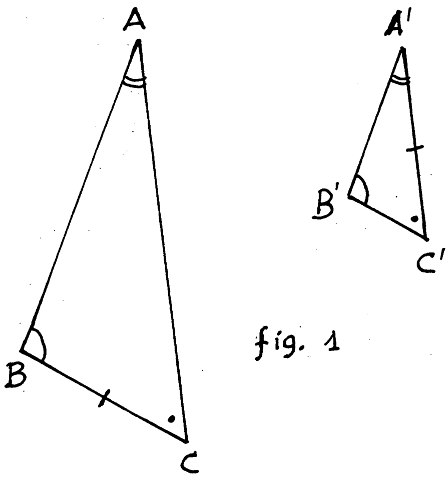


fig. 1

Siano (Fig.1) AB, BC, AC ed A'B', B'C', A'C' i lati corrispondenti dei triangoli simili ABC ed A'B'C' e sia, per esempio, BC = A'C'.
Vogliamo dimostrare che:

$$AC : BC = BC : B'C'$$

Poiché, per ipotesi, i due triangoli ABC ed A'B'C' sono simili, si ha:

$$AC : A'C' = BC : B'C',$$

ma essendo: A'C' = BC si ottiene:

$$AC : BC = BC : B'C'$$

c.v.d.

2. Corollari di questo teorema si possono considerare i seguenti noti teoremi di geometria:

I Teorema di Euclide - *In un triangolo rettangolo un cateto e' medio proporzionale fra l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa.*

Poiché (Fig.2) i due triangoli simili ABC ed HBA hanno il lato non corrispondente AB uguale e sono BC e BH i lati corrispondenti ad AB, si puo' subito scrivere:

BH : AB = AB : BC

c.v.d.

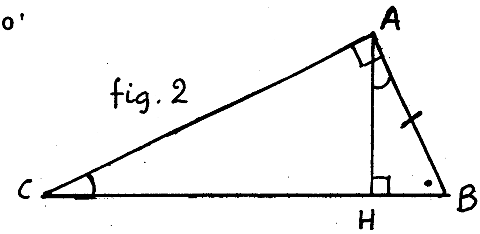


fig. 2

II Teorema di Euclide - *In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa e'media proporzionale fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.*

Poiché (Fig.3) i due triangoli simili ABH ed CAH hanno il lato non corrispondente AH uguale e sono BH e HC i lati corrispondenti ad AH, si puo' subito scrivere:

BH : AH = AH : HC

c.v.d.

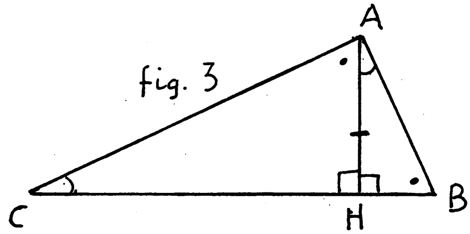


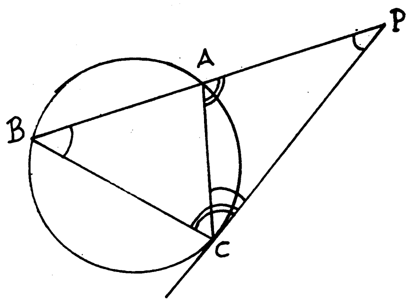
fig. 3

Teorema - *Se da un punto esterno ad una circonferenza si conduce una tangente ed una secante, la tangente e'media proporzionale fra la secante e la sua parte esterna.*

Poiché (Fig.4) i due triangoli simili PBC e PCA hanno il lato non corrispondente PC uguale e sono PB e PA i lati corrispondenti a PC, si puo'subito scrivere:

PB : PC = PC : PA

c.v.d.



Teorema - *Se in un angolo isoscele l'angolo al vertice e' la* *quinta parte di un angolo piatto, la base e' uguale alla sezione aurea del lato.*

Poiché (Fig. 5) i due triangoli simili ABC e CBD (dove CD e' la bisettrice dell'angolo ACB) hanno il lato non corrispondente BC uguale e sono AB e BD i lati corrispondenti a BC, si può subito scrivere:

AB : BC = BC : BD

e poiché è anche

BD = AB - AD =
= AB - DC =
= AB - BC ,

ne segue:

AB : BC = BC : (AB-BC)

cioè BC è la *sezione aurea* di AB.

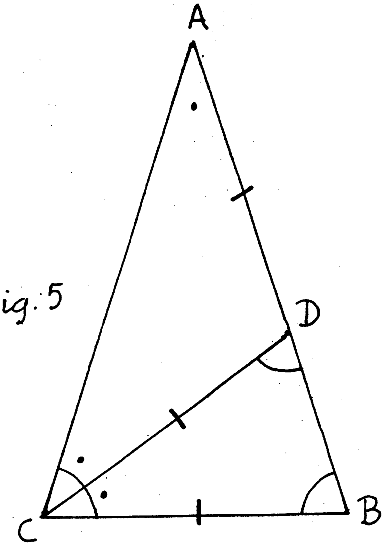


fig. 5

(continua questione 41 - pag.6)

Si deduce facilmente che essi sono uguali (III crit.) e rettangoli; quindi la diagonale A'C determina un angolo costante α con il piano di ciascuna delle tre facce aventi un vertice in A'.
Analogamente si deduce che la stessa diagonale A'C forma lo stesso angolo α con le facce aventi un vertice in C.
Posto $\overline{AB} = \ell$; $C\widehat{A'}C' = \alpha$ e facendo riferimento al triangolo A'C'C, si ha:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{C'C}{AC} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\alpha = \frac{A'C'}{AC} = \frac{\ell\sqrt{2}}{\ell\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} ;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{C'C}{A'C'} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} ;$$

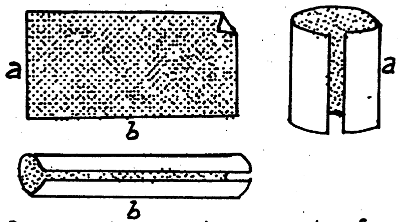
$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{A'C'}{C'C} = \frac{\ell\sqrt{2}}{\ell} = \sqrt{2} .$$

Quest'ultima funzione di α risulta più semplice per il calcolo. Le tavole forniscono:

$$\alpha \simeq 35° \ 15' \ 52''.$$

QUESTIONE 42

Un rettangolo di dimensioni a e b, puo' considerarsi come lo sviluppo della superficie laterale di due cilindri.



Determinare il rapporto fra i volumi dei due cilindri.

RISOLUZIONE

di Sonia Zilio del Liceo Class. "T. Livio" di Padova

Detto ρ il rapporto tra i volumi V_1 e V_2 dei cilindri aventi come altezza rispettivamente il lato b e il lato a del rettangolo, si ha:

$$\rho = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \cdot b}{\pi\left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 a} = \frac{a}{b},$$

Sono pervenute 14 risposte esatte.

QUESTIONE 43

Determinare le coordinate dei punti comuni a tutte le iperboli della *famiglia* di equazione

$$y = \frac{x + 3m - 1}{(m+2)x + 4m} \qquad (I)$$

A.M.

RISOLUZIONE

di Giulio Mosca di Teramo

Si tratta precisamente di un FASCIO [il parametro m infatti figura nella I al 1° grado] di iperboli equilatere aventi gli asintoti paralleli agli assi cartesiani.

Per trovare i punti « BASE » del fascio, cioè i punti comuni a tutte le iperboli (I) basta assegnare ad m due valori arbitrari e considerare il sistema delle due equazioni così ottenute. Quindi dando ad m, ad esempio, i valori 0 e 1 si ottengono rispettivamente le due equazioni:

$$y = \frac{x-1}{2x}, \quad y = \frac{x+2}{3x+4}$$

il cui sistema, risolto, dà i valori:

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = \frac{3}{8} \end{cases}$$

Ne segue che

$$A = (-1;1) \text{ e } B = \left(4; \tfrac{3}{8}\right)$$

sono i punti richiesti. Le coordinate di A e di B verificano identicamente la (**I**).

Per $m = -2$ la (I) fornisce l'equazione $x + 8y = 7$ dell'unica retta del fascio (I).

OSSERVAZIONE

Il prof. F. Fogliotti fa notare, fra l'altro, che rendendo l'equazione data in forma implici-

RISOLUTORI delle QUESTIONI	40	41	42	43
FRANCO GIORGIO	●			
AGROSI ANIELLO	●	●	●	●
BACCI LEONARDO	●		●	
FOGLIOTTI FRANCESCO	●	●	●	●
FRIGERIO EMMA	●		●	
ROSELLI ARMANDO	●		●	●
SUCCI MARCO	●		●	
ROSSI FERNANDO	●	●	●	
MOSCA GIULIO	●	●	●	
BARLOTTI MARCO	●	●	●	
GUARATO GIUSEPPE	●	●	●	
PAOLI GABRIELE	●		●	
DA DALT MARIAGRAZIA	●		●	
FRANCIOLI ROSA			●	
ZILIO SONIA			●	

ta e separando i termini contenenti il parametro m, si ha:

$$2xy-x+1+m(xy+4y-3)=0.$$

Se ne deduce che l'equaz. (I) si può considerare come combinazione lineare delle iperboli

$$2xy-x+1=0\ ,\quad xy+4y-3=0.$$

Sono pervenute 5 risposte esatte.

AVVERTENZE IMPORTANTI PER I RISOLUTORI.

Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte.
Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale.
Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età.
Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad:

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78
50131 FIRENZE

al più presto possibile

NON OLTRE IL 30 NOVEMBRE

Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori.
Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.

PER FAVORE, NON CESTINATE.

Se questo periodico non vi interessa, vi preghiamo di passarlo ad un appassionato che voglia sottoscrivere l'abbonamento, oppure di respingere le copie ricevute al MITTENTE:

ANGOLO ACUTO - Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE

Coloro che trattengono ANGOLO ACUTO sono pregati di inviare con sollecitudine la loro quota di abbonamento.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 Gennaio 1970.
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso.*
Stampato dalla Tipolitografia "Gino Capponi" Via G. Capponi 27 - Firenze.