ANNO II - 1971

l'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

settembre

7

periodico mensile
a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE
Telefono 588.429

conto corrente postale 5/27919
Spedizione in abbonamento postale
Gruppo III - 70

LA PALESTRA DELLE GARE

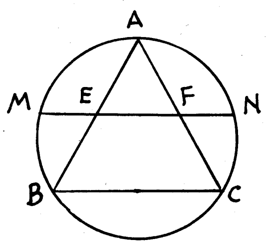
QUESTIONI PROPOSTE

(Non sono poste in ordine di difficoltà)

Avvertenze per i risolutori a pagina 8

81

In una circonferenza è inserito un triangolo equilatero ABC. Una corda MN (M su AB ed N su AC) dimezza il lato AB in E e il lato AC in F.
Dimostrare che il segmento EF è la sezione aurea del segmento MF.

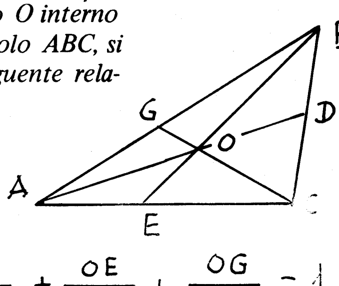


82

Trovare la condizione perchè esistono poligoni con un numero prefissato d *di diagonali.*

83

Se tre segmenti AD, BE, CG, uscenti dai vertici di un triangolo ABC, si incontrano in un punto O interno al triangolo ABC, si ha la seguente relazione:



$$\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OG}{CG} = 1$$

(continua a pag. 8)

Abbonamento annuale L. 1000. **Un fascicolo L. 150.**

Abbonamento sostenitore da L. 1500 a Lire 5000.

Ogni appassionato invii la sua quota, secondo le sue possibilità, affinchè ANGOLO ACUTO possa migliorare e aumentare il numero delle pagine.

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio: i nuovi Abbonati hanno diritto a ricevere i fascicoli arretrati.

GARA MATEMATICA 1971

Sezione della Mathesis di Roma

I

Dati 10 punti del piano a tre a tre non allineati, quante circonferenze si determinano? Quante sfere determinano invece 10 punti dello spazio a quattro a quattro non complanari?

II

Qual è il minimo della somma $a + \frac{1}{a}$ (per a positivo)?
Cosa si può dire della funzione

$$tg\,x + cotg\,x \ ?$$

III

Consideriamo i quadrati inscritti in un quadrato dato, di lato uguale ad a. Diciamo x ($0 \leq x \leq a$) l'ascissa del vertice inferiore A (fig. 1). Dato x, determiniamo:

1) l'altezza g del rettangolo di base a avente area uguale a quella del quadrato inscritto (praticamente: l'area di esso in opportuna scala);
2) la lunghezza h del segmento verticale per A (vertice basso) contenuto nel quadrato inscritto.

Considerando come variano g ed h al variare di x, disegnare i diagrammi delle due funzioni

$$y = g(x) \quad \text{ed} \quad y = h(x).$$

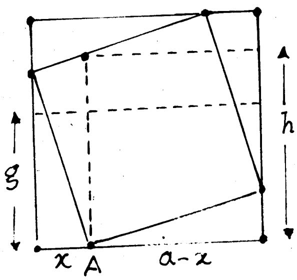


fig. 1

IV

Consideriamo i triangoli ABC, con B e C fissi ed A variabile su una retta r fissata, parallela al segmento BC.
In quali condizioni, e per quali posizioni di A, si hanno triangoli:
- acutangoli - rettangoli, ottusangoli?
- isosceli - equilateri?

Quale proprietà hanno in comune?
Qual è il triangolo di perimetro minimo?

V

Data una reta quadrata di punti (come nella fig. 2), p.es. punti del piano a coordinate intere), diciamo "<u>cammino di k passi</u>" quello formato percorrendo k tratti unitari (lato di un quadrato della rete), in direzione qualunque (anche tornando indietro, magari più volte, sul medesimo tratto).
Per quali valori di k (k = 0,1,2, ecc.) è possibile recarsi da (0,0) in (4,3) con un cammino di k passi?
In quanti modi (per un k possibile)?
(Più in generale, stesse domande per il punto (n,m)).

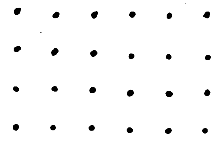


fig. 2

VI

Esistono triangoli equilateri coi vertici nei punti di una rete quadrata (come nell'esercizio 5)?

Gli Appassionati sono invitati ad inviarci al più presto le risoluzioni.

PALESTRA DELLE GARE
RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI PROPOSTE

Questione 44

Risolvere l'equazione

$$\text{sen}\,(2x+30°) = \cos(3x-20°) \qquad \text{I}$$
$$0° < x < 360° \qquad \text{II}$$

PRIMA RISOLUZIONE di Giuseppe Guarato di Valdagno (VI)

Poichè $\cos(3x-20°) = \text{sen}\,[90°-(3x-20)] = \text{sen}\,(110°-3x)$,
l'equazione (I) diventa: $\text{sen}(2x+30°) = \text{sen}\,(110°-3x)$.

Ne segue che gli argomenti $2x-30°$ e $110°-3x$ sono UGUALI oppure SUPPLEMENTARI

Si ha quindi:

$$2x+30° = 110°-2x+K\cdot 360° \quad \Big| \quad 2x+30° = 70°+3x+K\,360°$$

da cui

$$x = 16°+72°\cdot K \quad \Big| \quad x = -40°+360°\cdot K \qquad \text{III}$$

e tenendo conto delle limitazioni assegnate $0° < x < 360°$ si ha:

per $K = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,$ $\quad x = 16°;\ 88°;\ 160°;\ 232°;\ 304°.$

per $K = 1$ $\quad x = 320°$

SECONDA RISOLUZIONE di Giulio Mosca di Teramo.

Mediante le relazioni fra le funzioni di archi complementari si ha:

$$\text{sen}\,(2x+30°) = \cos[90°-(2x+30°)] = \cos\,(60°-2x)\ ;$$

quindi l'equazione I si può scrivere:

$$\cos\,(60°-2x) = \cos\,(3x-20°)$$

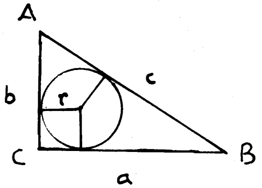
da cui, applicando una delle formule di prostagenesi, si ha:

$$-2\,\text{sen}\,\frac{60°-2x+3x-20°}{2}\cdot\text{sen}\,\frac{60°-2x-3x+20°}{2} = 0$$

(continua a pag. 5)

ANCORA .... una dimostrazione del

TEOREMA DI PITAGORA



ABC triangolo rettangolo in C

$\overline{BC} = a$; $\overline{AC} = b$; $\overline{AB} = c$

r = raggio cerchio inscritto

Si hanno ovviamente le uguaglianze:

$$a + b = c + 2r \qquad \mathrm{I}$$
$$(a+b)^2 = (c+2r)^2 \qquad \mathrm{II}$$
$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 4cr + 4r^2 \qquad \mathrm{III}$$

Inoltre, poichè la doppia area del triangolo ABC si può esprimere in due modi si ha:

$$ab = (a+b+c) \cdot r$$

ovvero

$$ab = (a+b)r + cr$$

e per la (I)

$$ab = (c+2r)r + cr$$

ovvero

$$ab = cr + 2r^2 + cr = 2cr + 2r^2$$

ed anche:

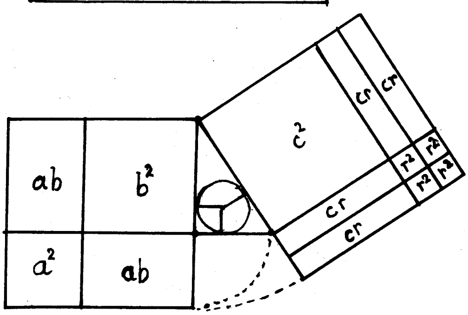
$$2ab = 4cr + 4r^2; \qquad \mathrm{IV}$$

e sottraendo membro a membro

dalla III $\quad a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 4cr + 4r^2$

la IV $\quad 2ab = 4cr + 4r^2$

si ha: $\quad \boxed{a^2 + b^2 = c^2} \qquad \mathrm{V}$



La figura traduce "in linguaggio geometrico" il passaggio dalle relazioni II e IV alla relazione pitagorica V.

e semplificando $\quad \operatorname{sen}\dfrac{x+40^\circ}{2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{80^\circ-5x}{2}=0$

Ne segue

$\operatorname{sen}\dfrac{x+40^\circ}{2}=0$ ovvero $\operatorname{sen}\dfrac{80^\circ-5x}{2}=0$

e quindi

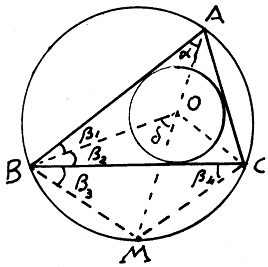
$\dfrac{x+40^\circ}{2}=180^\circ\cdot K$ | $\dfrac{80^\circ-5x}{2}=180^\circ\cdot K$

$x=-40^\circ+360^\circ\cdot K$ | $x=16^\circ+72^\circ\cdot K$;

..... e si ritrovano i valori di x già indicati nella prima risoluzione.

Sono pervenute 7 risposte: alcune non indicano tutte le soluzioni.

Questione 45



Dimostrare che la bisettrice di ogni angolo di un triangolo taglia la circonferenza circoscritta in un punto che è equidistante dagli estremi del lato opposto e dal centro della circonferenza inscritta nello stesso triangolo.

RISOLUZIONE di Sonia Zilio del Liceo Classico "T.Livio" di Padova.

$\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{MC}$ (archi sottesi ad angoli alla circonferenza uguali)

$\Longrightarrow \quad \overline{BM}=\overline{MC}$ (I)

Detto 0 il centro della circonferenza inscritta al triangolo ABC (incentro, punto comune alle tre bisettrici), unito 0 con B, dal triangolo 0AB si ha (vedi figura):

$$\hat{\delta}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}_1 \qquad (2)$$

Inoltre si ha:

$\hat{\alpha}=\hat{\beta}_4$ (angoli che insistono sullo stesso arco BM

$\hat{\beta}_4=\hat{\beta}_3$ (angoli alla base del trian. isosc. BMC.

Ne segue: $\quad \hat{\alpha}=\hat{\beta}_3$

Inoltre è $\quad \hat{\beta}_1=\hat{\beta}_2$ (B0 è bisettrice di ABC)

E sostituendo nella (2)

$$\hat{\delta} = \hat{\beta}_3 + \hat{\beta}_2$$

cioè il triangolo M0B è isoscele.

Ne segue: $$MB = MO \qquad (3)$$

e tenendo conto della (1) e della (3) si ha:

$$MB = MC = M0.$$

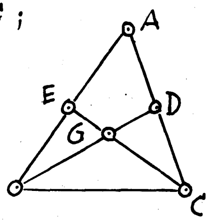
c.d.d.

Questione 46

Se le mediane BD e CE di un triangolo ABC si incontrano nel punto G, dimostrare che il triangolo BCG è equivalente al quadrangolo AEGD.

RISOLUZIONE di Emma Frigerio del Liceo Scient. "Einstein" di Milano.

Si deduce facilmente che $\overset{\triangle}{BDC} \doteq \frac{1}{2}\overset{\triangle}{ABC}, \quad \overset{\triangle}{AEC} = \frac{1}{2}\overset{\triangle}{ABC}$;



$$\Longrightarrow \quad \overset{\triangle}{BDC} \doteq \overset{\triangle}{AEC}$$

E togliendo da ambo i triangoli di questa equivalenza il triangolo CDG, si ha: $\overset{\triangle}{BDC} - \overset{\triangle}{CDG} \doteq \overset{\triangle}{AEC} - \overset{\triangle}{CDG}$

cioè

triangolo (BCG) $\doteq$ quadrilatero (AEGD).

RISOLUTORI delle QUESTIONI	44	45	46	47
FRIGERIO EMMA - L. SC. "Einstein" MILANO	•	•	•	• (1)
ROSSI FERNANDO - L. CL. "Dante" FIRENZE		•	•	•
ZILIO SONIA - L. CL "T. Livio" PADOVA		•	•	•
BARLOTTI MARCO - L. CL. "Galilei" FIRENZE			•	•
SORBI DAYSI - L. CL. "Galilei" FIRENZE			•	•
ROSELLI ARMANDO - L. Sc. "Paleocapa" ROVIGO	•	•		
FRANCIOLI ROSA - IST. TECN. COMM. MOLFETTA (BA)			•	
MORASCHINI MANUELA - L. Sc. "A. Volta" MILANO			•	
AGROSI ANIELLO - DISO (LE)	•	•	•	•
FOGLIOTTI FRANCESCO - GENOVA - SAMPIERD.	•	•	•	•
FRANCO GIORGIO - PADOVA	•	• (2)	•	•
GUARATO GIUSEPPE - VALDAGNO (VI)	•	•	•	•
MOSCA GIULIO - TERAMO	•	•		

(1) Ha inviato due risoluzioni.

(2) Ha inviato anche una interessante generalizzazione relativa alle bisettrici degli angoli esterni del triang.

Questione 47

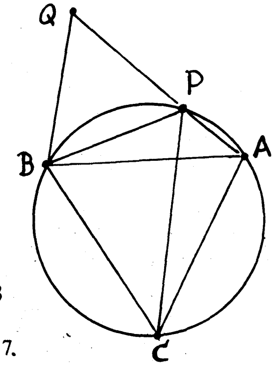
Si consideri il triangolo equilatero ABC e la circonferenza circoscritta.
Dimostrare, senza far uso di nozioni di trigonometria, che detto P un punto qualunque dell'arco AB si ha:

$$PC = PA + PB$$

PRIMA RISOLUZIONE di Emma Frigerio di Milano.

Prolungo AP di un segmento PQ = PB e congiungo B con Q. Il triangolo PBQ è perciò isoscele e poichè $B\widehat{P}Q = 60^\circ$, risulta quindi equilatero:

$$PB = PQ = BQ$$



Considero ora i triangoli ABQ e CBP; essi hanno

AB = CB (per ipotesi), BQ = PB (per costruzione)

$A\widehat{B}Q = C\widehat{B}P$ (perchè somme di angoli uguali).

Quindi essi sono uguali per il I criterio di uguaglianza.
In particolare si ha PC = AQ. E poichè

$$AQ = PA + PQ = PA + PB, \text{ ne segue } PC = PA + PB$$

Nel prossimo numero pubblicheremo altre due risoluzioni della questione 47.

UN ALTRO PROBLEMA SUI CAPPELLI

Una trentina di esploratori venne catturata da una tribù indigena. Il capo era intenzionato a ucciderli tutti, ma temendo che fossero dei maghi, diede loro una possibilità di salvarsi, possibilità che, a suo giudizio, solo uno con poteri non umani avrebbe potuto sfruttare.

"Vi chiuderò tutti - disse - in una prigione per un mese sotto stretta sorveglianza. Metterò ad alcuni di voi un cappello bianco, agli altri uno nero, in modo che ciascuno veda il cappello di tutti gli altri, ma non il suo. Naturalmente non potrete comunicare fra di voi in nessun modo. Ogni mattina passerò dalla prigione e se qualcuno sarà sicuro che il suo cappello è bianco verrà da me e avrà salva la vita. Se poi tutti quelli con il cappello bianco si presenteranno da me, sarete tutti salvati".

I primi giorni nessuno dei prigionieri si presentò al capo, ma il quindicesimo giorno quindici esploratori andarono da lui asserendo di avere il cappello bianco e.... tutti furono salvati.

Come fecero i quindici esploratori ad arrivare alla conclusione esatta?

La risposta .... al prossimo numero.

(continuazione QUESTIONI PROPOSTE)

84

Un tale vuole mescolare in un certo rapporto due qualità di caffè che complessivamente pesano Kg 38.
Per poter utilizzare tutto il caffè della prima qualità di cui dispone gli mancano Kg 12 della seconda qualità; usando invece tutto il caffè della seconda qualità di cui dispone gli rimangono Kg 8 della prima qualità.
Determinare i pesi delle due qualità di caffè ed il rapporto secondo cui quel tale voleva fare il miscuglio.

AMICI DI ANGOLO ACUTO
SOSTENITORI:

Prov. Marisa Ravagnan Dezza - TORINO
Prof. Tullia Panerai - FIRENZE
Istit. Magistrale "G.Pascoli" - BOLZANO
Prof. Salvatore D'Amico - AVELLINO
Prof. Emma Marra - COSENZA
Stud. Alessandro Corti - FIRENZE
Prof. Nello Unghietti - TREVISO
Prof. Gabriella Corsi - FIRENZE
Prof. Angelo Bellosi - MILANO
Stud. Clelia Marchionna - MILANO

AVVERTENZE IMPORTANTI PER I RISOLUTORI.

Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte.
Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale.
Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età.
Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78
50131 FIRENZE

al più presto possibile

NON OLTRE IL 10 DICEMBRE

Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori.
Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.

PER FAVORE, NON CESTINATE.

Se questo periodico non vi interessa, vi preghiamo di passarlo ad un appassionato che voglia sottoscrivere l'abbonamento, oppure di respingere le copie ricevute al MITTENTE:

ANGOLO ACUTO - Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE

Coloro che trattengono ANGOLO ACUTO sono pregati di inviare con sollecitudine la loro quota di abbonamento.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 Gennaio 1970.
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso.*
Stampato dalla Tipolitografia "Gino Capponi" Via G. Capponi 27 - Firenze.