# L'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

ANNO II - 1971

ottobre

8



mensile a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 50131 FIRENZE

conto corrente postale 5/27919
Tel. 588.429


## LA PALESTRA DELLE GARE

### QUESTIONI PROPOSTE

*(Non sono poste in ordine di difficoltà)*

**Avvertenze per i risolutori a pag. 16.**

85

*Dimostrare che esistono infiniti numeri primi.*

*C.B.*

86

*Costruire un triangolo dati il vertice, l'ortocentro e il circoncentro.*

87

*Dimostrare che*

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots - (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

*seguendo prima la via diretta e poi quella in cui si applica il* <u>*principio di induzione.*</u>
*(Vedi pagina 8 di questo numero).*

88

*Dato l'arco AB, quarta parte di una circonferenza di centro 0 e di raggio r, sia M un punto dell'arco stesso, sia P il punto intersezione dell'asse del segmento AM con la semiretta BM.*

*Determinare la posizione di M in modo che sia*

$$\frac{2 \cdot \overline{OH} + 3 \cdot \overline{PH}}{\overline{OM}} = k$$

*essendo k un numero reale positivo.*

(tema assegnato agli esami di ammissione alla 5ª classe del Liceo Scient. "Castelnuovo" di Firenze - Settembre 1971)

## TEMA DI MATEMATICA ASSEGNATO AGLI ESAMI DI MATURITA' SCIENTIFICA NELLA SESSIONE SUPPLETIVA 1971

Il candidato risolva, a sua scelta, almeno due dei seguenti quesiti:

1) In un piano, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale $O(x;y)$, si rappresenti la curva di equazione

$$y = \frac{x-1}{x+1}.$$

condotta per il punto $(-1;+1)$ la retta di coefficiente angolare $m$, si dica per quali valori di $m$ una delle sue intersezioni con la curva appartiene al primo o al quarto o al terzo quadrante.
Si determini inoltre la lunghezza della corda minima intercettata sulla retta dalla curva e si dica qual è il rapporto, maggiore di uno, tra le aree dei triangoli che le tangenti negli estremi di tale curva formano con gli assi cartesiani.

2) Tra i coni circolari retti inscritti in una sfera di raggio $r$, determinare quello per il quale è massima l'area della superficie totale, dopo averne trovata l'espressione in funzione della semiapertura $x$ di un generico cono.

3) Si studi il grafico della seguente funzione

$$y = \operatorname{sen} x + 2\cos x,$$

nell'intervallo

$$0 \leq x \leq 2\pi.$$

4) Si esamini la posizione delle radici della equazione in $x$:

$$(m-1)x^2 - (m+1)x + 2m - 1 = 0,$$

rispetto all'intervallo $(-1;+1)$.

## TEMA DI MATEMATICA ASSEGNATO AGLI ESAMI DI MATURITA' MAGISTRALE NELLA SESSIONE SUPPLETIVA 1971

Un tetraedro ABCV si è ottenuto da un cono circolare retto, avente il raggio di base $r$ e l'altezza $h$, secando il cono con tre piani passanti per il vertice V. Di tali piani, uno contiene il diametro BC del cerchio di base e uno stacca su quest'ultimo una corda che è i $10/13$ di $r$.
Si esprimano per mezzo di $r$ e di $h$:

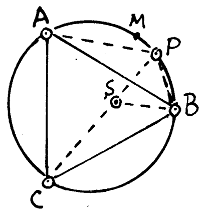
a) le lunghezza dei sei spigoli;
b) le aree delle quattro facce;
c) il volume del tetraedro.

# QUESTIONE 47

Si consideri il triangolo equilatero ABC e la circonferenza circoscritta. Dimostrare, senza fare uso di nozioni di trigonometria, che detto P un punto qualunque dell'arco AB, si ha: $PC = PA + PB$

A pag. 7 del fascicolo 7 abbiamo già pubblicato una prima risoluzione di Emma Frigerio di Milano. Ecco altre risoluzioni:

## SECONDA RISOLUZIONE di *Giorgio Franco di Padova*




La relazione da dimostrare è rapidamente verificata nei seguenti casi particolari:

I) $P \equiv A \Rightarrow \overline{PA} = 0 \Rightarrow PC = PB$.

II) $P \equiv B \Rightarrow \overline{PB} = 0 \Rightarrow PC = PA$.

III) $P \equiv M$ (M punto medio di $\widehat{AB}$) $\Rightarrow$

$\overline{PA} = \overline{PB} = r$ ; $\overline{PC} = 2r = \overline{PA} + \overline{PB}$

Esamino ora il caso generale: P interno all'arco AB. Conduco su CP il segmento $CS = AP$ e considero i triangoli BSC e BPA.

Essi hanno: $CS = AP$ *per costruzione*,

$BC = AB$ *per ipotesi*,

$B\hat{C}S = B\hat{C}P = B\hat{A}P$, *angoli alla circonf. che insistono sullo stesso arco*. I due triangoli sono quindi uguali per il 1° crit. di uguaglianza. In particolare si ha: $BS = BP$, $B\hat{S}C = B\hat{P}A = 120°$, e quindi $B\hat{S}P = 60°$. Sicchè il triangolo PBS risulta isoscele sulla base PS ed avendo un angolo di 60° risulta anche equilatero; quindi $BS = SP = PB$.

Ne segue pertanto:

$$\begin{array}{ccccc} PC & = & CS & + & SP \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ PC & = & PA & + & PB. \end{array}$$

## TERZA RISOLUZIONE di *Marco Barlotti di Firenze*

| | |
|---|---|
| | $a$ = *misura di* AP |
| | $b$ = *misura di* BP |
| | $d$ = *misura di* CP |
| | $\ell$ = *misura di* AB |

Applicando il teorema di TOLOMEO al quadrilatero APBC si ha:

$$R(AB, PC) \doteq R(PA, BC) + R(PB, AC)$$

e passando alle misure:

$$\ell \cdot d = a\ell + b\ell \; ;$$

e dividendo per $\ell$ (certamente diverso da zero) si ha:

$$d = a + b$$

e passando dalle misure ai segmenti: $PC = PA + PB$.

# QUESTIONE 48

Data la famiglia di parabole di equazione:

$$y = kx^2 - 2(k-1)x - 3 \quad ,$$

determinare le coordinate dei punti comuni a tutte le parabole.
Studiare la curva luogo geometrico del vertice delle parabole stesse.

*RISOLUZIONE di Francesco Criscione di Rimini*

I) Per trovare i punti comuni a tutte le parabole della famiglia, attribuiamo al parametro $K$ due valori arbitrari distinti $K_1$ e $K_2$; abbiamo

$$\begin{cases} y = k_1x^2 - 2(k_1-1)x - 3 \\ y = k_2x^2 - 2(k_2-1)x - 3 \end{cases} \qquad (1)$$

Dal confronto delle (1), otteniamo l'equazione in $x$:

$$(K_1 - K_2)x^2 - 2(K_1 - K_2)x = 0 ,$$

e dividendo per $(K_1 - K_2)$, certamente diverso da zero, si ha:

(2) $\qquad x^2 - 2x = 0$, da cui si ricava $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.

Sostituendo questi valori trovati di $x$ nelle (1) troviamo rispettivamente $\quad y_1 = -3 \quad$ e $\quad y_2 = 1$.

Quindi, detti $A$ e $B$ i punti comuni a tutte le parabole, si ha: $\quad A(0; -3) \quad$ e $\quad B(2; 1)$.

II) Per trovare la equazione della curva luogo geometrico del vertice delle parabole, basta eliminare il parametro $K$ nelle coordinate del vertice:

$$x = \frac{K-1}{K} \quad , \qquad y = -\frac{K^2+K+1}{K} \qquad (3)$$

Risolvendo la prima delle (3) rispetto a $K$ si ha $\quad K = \dfrac{1}{1-x}$

e sostituendo nella seconda e semplificando, risulta

$$y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x-1} \qquad (4)$$

CAMPO DI ESISTENZA - ASINTOTI

La curva (4) è definita e continua per tutti i valori di $x$ escluso $x = 1$; quindi la retta $x = 1$ è un *asintoto (verticale)*.

La (4) può scriversi nella forma

$$y = x - 2 + \frac{1}{x-1}$$

La retta $y = x - 2$ è un asintoto (obliquo) della curva; il numero $\frac{1}{x-1}$ tende a zero per $x$ tendente all' $\infty$.

INTERSEZIONI CON GLI ASSI

La curva non incontra l'asse delle $x$ perchè per $y=0$ si ha l'equazione $x^2 - 3x + 3 = 0$ che non ha radici reali; interseca invece l'asse delle $y$ nel punto $(0;-3)$.

VARIAZIONI DI SEGNO DI $f(x)$

| Intervalli | $-\infty$ … $1$ | $1$ … $+\infty$ |
|---|---|---|
| SEGNO del NUMERATORE | + | + |
| SEGNO del. DENOMINATORE | − | + |
| SEGNO della FUNZIONE | − | + |

PUNTI DI MASSIMO E DI MINIMO
INTERVALLI IN CUI $f(x)$ È CRESCENTE o DECRESCENTE

Gli eventuali punti di massimo e di minimo della curva sono da ricercarsi fra quei valori di $x$ per cui $y' = 0$; si ottiene:

$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \quad ; \quad y' = 0 \quad \text{per } x^2 - 2x = 0, \text{ cioè per } x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 2;$$

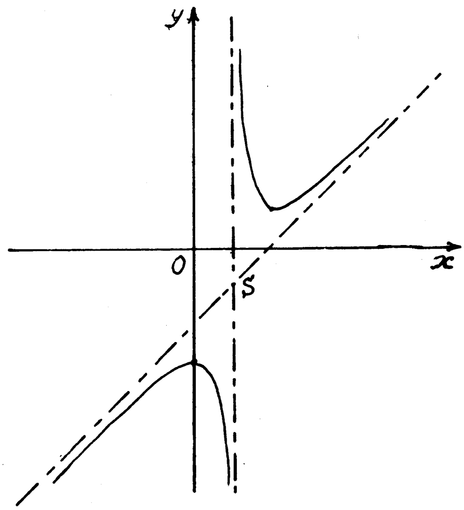
e poichè è $y' < 0$ per $0 < x < 2$,
$y' > 0$ per $x < 0$ e $2 < x$,

ne segue che per $x = 0$ la curva presenta un massimo; $f(x) = -3$;
e per $x = 2$ la curva presenta un minimo ; $f(x) = 1$.

Si può quindi tracciare il grafico della curva che è un' IPERBOLE avente per asintoti le rette di equazioni

$$x = 1 \qquad e \qquad x - y - 2 = 0$$

e il centro di simmetria nel punto $S(1;-1)$.




QUESTIONE 49
a pagina 12.
QUESTIONE 50
a pagina 6.

# QUESTIONE 50 (*Criptarimetica*)

Determinare il numero ROMA, sapendo che:

$$(ROMA)^2 = \bigstar M R \blacktriangle R O M A . \qquad (1)$$

*La seguente RISOLUZIONE risulta dalla fusione delle risposte di Giuseppe Guarato di Valdagno e di Giorgio Franco di Padova*

La relazione (1) si può scrivere:

$$(R\cdot10^3 + O\cdot10^2 + M\cdot10 + A)^2 = \bigstar M R \blacktriangle R O M A \ ;$$

e sviluppando e ordinando si ha:

$$R^2\cdot10^6 + 2\cdot R\cdot O\cdot10^5 + (O^2+2\cdot R\cdot M)\cdot10^4 + (2\cdot R\cdot A + 2\cdot M\cdot O)\cdot10^3 + (M^2+2\cdot A\cdot O)\cdot10^2 +$$
$$+ (M^2+2\cdot A\cdot O)\cdot10^2 + 2\cdot M\cdot A\cdot10 + A^2 =$$
$$= \bigstar\cdot10^7 + M\cdot10^6 + R\cdot10^5 + \blacktriangle\cdot10^4 + R\cdot10^3 + O\cdot10^2 + M\cdot10 + A .$$

Poichè deve essere $A^2 = A + 10\cdot r$, A può assumere solo i valori

$$0, \quad 1, \quad 5, \quad o \quad 6 .$$

Non può essere $A = 0$ perchè si avrebbe $M = 0 = A$.
Non può essere $A = 1$ perchè si avrebbe $M = 0 = O$.
Per $A = 5$, $A^2 = 25 = 2\cdot10 + 5 \Rightarrow r = 2$; ne segue:

a) $r + 2\cdot M\cdot A = M + 10 r_1$ ossia
$2 + 10\cdot M = M + 10 r_1$ cioè
$2 + 9\cdot M = 10 r_1$ ; $\Rightarrow M = 2$ ; $r_1 = 2$.

b) $r_1 + M^2 + 2\cdot A\cdot O = O + 10 r_2$ ossia
$2 + 4 + 10\cdot O = O + 10 r_2$ cioè
$6 + 9\cdot O = 10 r_2$ ; $\Rightarrow O = 6$ ; $r_2 = 6$.

c) $r_2 + 2\cdot R\cdot A + 2\cdot M\cdot O = R + 10 r_3$ ossia
$6 + 10\cdot R + 24 = R + 10 r_3$ cioè
$30 + 9\cdot R = 10 r_3$ ; $\Rightarrow R = 0$ ; $r_3 = 3$.

ma R, essendo la prima cifra di ROMA, non può essere uguale a zero.
quindi non può essere $A = 5$.

Per $\boxed{A = 6}$, $A^2 = 36 = 3\cdot10 + 6 \Longrightarrow r = 3$; ne segue:

a) $r + 2\cdot M\cdot A = M + 10 r_1$ ossia
$3 + 12 M = M + 10 r_1$ cioè
$3 + 11 M = 10 r_1 \Longrightarrow \boxed{M = 7}$ ; $r_1 = 8$

b) $r_1 + M^2 + 2\cdot A\cdot O = O + 10 r_2$ ossia

$8 + 49 + 12\cdot O = O + 10 r_2$ cioè

$57 + 11\cdot O = 10 r_2 \Longrightarrow \boxed{O = 3}$ ; $r_2 = 9$.

c) $r_2 + 2\cdot R\cdot A + 2\cdot M\cdot O = R + 10 r_3$ ossia

$9 + 12\cdot R + 42 = R + 10 r_3$ cioè

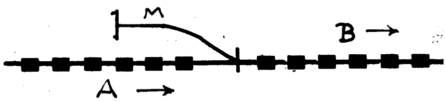
$51 + 11\cdot R = 10 r_3 \Longrightarrow \boxed{R = 9}$ ; $r_3 = 15$

Pertanto l'UNICA SOLUZIONE è ROMA = 9376.

# QUESTIONE 51

51. PROBLEMA FERROVIARIO

Un treno A percorre una linea ferroviaria a binario unico e viene fermato al "disco rosso" di una piccola stazione S, munita di un "binario morto", che può contenere soltanto metà del treno A.
Questo treno deve "sorpassare" un altro treno B, di lunghezza uguale, fermo nella stazione S.
Dire se è possibile che il treno A possa effettuare il sorpasso del treno B e, in caso affermativo, descrivere le manovre che occorre effettuare.




*RISOLUZIONE*

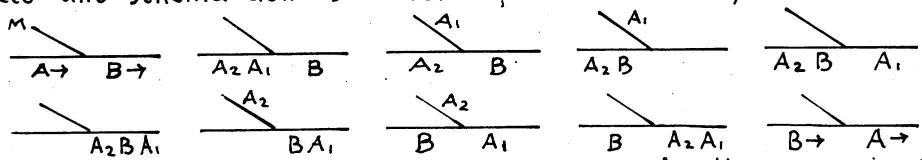
*di «Mido» di Biella (VC)*

Precisiamo la posizione del «binario morto»: I due treni possono immettervisi solo *a marcia indietro* come nella figura indicata nell'enunciato.
In queste condizioni il "sorpasso" è sempre possibile, qualunque sia la lunghezza dei due treni.
Si divida A, a partire dallo scambio in $n$ tronchi $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ in modo che ciascun tronco possa essere contenuto in M e che $A_1$ contenga la motrice di A.
Il treno B rimane indiviso.

Le manovre da effettuare sono le seguenti:

1) $A_1$ si porta in M; B va ad agganciare $A_2$, liberando lo scambio; $A_1$ esce e si porta in linea.
2) B tira $A_2$, lo spinge in M e va ad agganciare $A_2$ liberando lo scambio; $A_1$ va ad agganciare $A_2$ e se lo tira in linea.
3) Si continua in modo analogo: B porta in M i successivi tronchi di A e libera lo scambio in modo che $A_1$ possa ricuperare successivamenti i vari tronchi e ricostituirsi in linea di marcia.

Ecco uno schema delle successive posizioni: *per* $n = 2$




(continua a pagina 13)

# IL PRINCIPIO di INDUZIONE

*di Claudio Bernardi.*

Tempo fa era stata proposta ad alcuni studenti la seguente questione: dimostrare che per ogni *n* vale la relazione

$$(1+2+3+...+n)^2 = 1^3+ 2^3+ 3^3+ ...+ n^3$$

cioè che il quadrato della somma dei primi n numeri interi è uguale alla somma dei cubi degli stessi numeri.

Alcuni si limitarono a verificare che la relazione era effettivamente valida per particolari valori di n, concludendo che la uguaglianza valeva in generale. Una affermazione del genere è evidentemente troppo affrettata: anche dopo aver verificato che l'uguaglianza data o altre analoghe valgono, ad esempio per n = 1, 2, 3, 4, nulla ci assicura che valga anche per n = 5. D'altra parte se una relazione in cui compare un certo numero n (dipendente da un parametro n) è soddisfatta per un certo numero di valori attribuiti ad n, puo' essere ragionevole supporre che non si tratti di semplice coincidenza, ma di una proprietà realmente valida per ogni numero. Il principio di induzione riesce in un certo senso a conciliare questa idea intuitiva con esigenze di rigore.

**Principio di induzione** - Supponiamo che P sia una proprietà che dipende da un numero intero positivo n; supponiamo inoltre: a) che la proprieta' valga per 1; b) che assumendo come ipotesi che valga per n, si possa dimostrare che vale per n + 1. In queste condizioni la proprietà P vale per tutti i numeri positivi n.

*Dimostrazione* - Ragioniamo per assurdo: supponiamo che esista una proprietà P che soddisfa ai punti a) e b) ma tale che non valga per tutti i numeri positivi. Consideriamo allora l'insieme di tutti i numeri per cui la proprietà P non è verificata; osserviamo che ogni insieme (non vuoto) di numeri positivi ammette un minimo elemento, come si verifica immediatamente.

Sia allora a il più piccolo numero per cui la proprietà data non vale; evidentemente $a \neq 1$ perché per ipotesi per 1 P è verificata. Allora a - 1 è un numero positivo; inoltre siccome a - 1 è minore di a, P vale per a - 1, perché a è il piu' piccolo numero che non la verifica. Quindi per l'ipotesi b) la proprietà, valida per $a-1$, è valida anche per $(a-1)+1$, cioè per $a$, e questo in contraddizione con il modo in cui avevamo definito $a$. Siamo arrivati ad un assurdo per aver supposto che la tesi non fosse vera; quindi abbiamo dimostrato il principio di induzione.

Vediamo ora se è possibile applicarlo alla relazione considerata all'inizio. Evidentemente l'uguaglianza è soddisfatta per $n = 1$; infatti si ha $1^3 = 1^2$. Dimostriamo che se la relazione vale per $n$, allora vale per $n+1$, cioè supposto che sia vero

$$(1+2+\dots+n)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3,$$

dimostriamo che è vero anche

$$(1+2+\dots+n+n+1)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3.$$

Infatti consideriamo la differenza (di due quadrati)

$$(1+2+\dots+n+n+1)^2 - (1+2+\dots+n)^2 =$$

$$= (n+1)(1+2+\dots n + n+1 + 1+2+\dots+n)\ ;$$

tenendo conto che $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, la somma che compare nell'ultima parentesi vale

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1 + \frac{n}{2}\right) = (n+1)(n+1) =$$
$$= (n+1)^2.$$

In definitiva

$$(1+2+\dots+n + n+1)^2 - (1+2+\dots+n)^2 = (n+1)^3$$

Ma per l'ipotesi d'induzione sappiamo che

$$(1+2+\dots+n)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3, \text{ da cui sostituendo}$$

$$(1+2+\dots+n + n+1)^2 - 1^3 - 2^3 - \dots - n^3 = (n+1)^3,$$

e infine trasportando al secondo membro tutti i cubi si trova la tesi con una dimostrazione corretta.

Osserviamo subito che da un punto di vista intuitivo il principio di induzione ha questo significato:

*Quando una proprietà che vale per un numero va-*

le anche per il successivo e vale per $n = 1$, allora è valida anche per $n = 2$; analogamente, essendo valida per $n = 2$, vale anche per $n = 3$ e cosi' via.

Nell'enunciato abbiamo fatto due ipotesi indicate con a) e con b); si pone la domanda se sono entrambe necessarie per dimostrare la tesi: non potrebbe essere sufficiente ad esempio la sola ipotesi b)? Si vede facilmente che cio' non è vero: facciamo un esempio.

E' chiaro che se $n > 1000$ allora anche $n + 1 > 1000$; ma non possiamo certo concludere che tutti i numeri siano maggiori di 1000; in effetti la relazione $n > 1000$ non soddisfa alla prima ipotesi del principio di induzione.

Vogliamo ora dimostrare un risultato molto importante nella teoria degli insiemi: se A è un insieme con n elementi allora esistono esattamente $2^n$ sottoinsiemi di A. (NOTA: *Si ricorda che si dice che B e' sottoinsieme di A se B e' costituito soltanto da elementi di A, cioe' se tutti gli elementi di B sono anche elementi di A. Fra i sottoinsiemi di A vengono sempre considerati anche l'insieme vuoto e A stesso*).

Dimostriamo quanto sopra enunciato per induzione: la proprietà P in questo caso è "il teorema vale per insiemi con n elementi". Se A ha un solo elemento è chiaro che esistono solo $2^1 = 2$ sottoinsiemi di A: l'insieme vuoto e A. Supponiamo che la prorietà valga per tutti gli insiemi con n elementi; sia B un insieme con n+1 elementi che chiamiamo $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Dobbiamo dimostrare che esistono $2^{n+1}$ sottoinsiemi di B.

Consideriamo l'insieme $B' = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$; sappiamo per l'ipotesi d'induzione che ci sono $2^n$ sottoinsiemi di B'; d'altra parte tutti questi $2^n$ sottoinsiemi di B' sono anche sottoinsiemi di B. Ci sono pero' altri sottoinsiemi di B: tutti quelli che si ottengono aggiungendo a un sottoinsieme di B' l'elemento $a_{n+1}$: questi ultimi sono ancora tanti quanti i sottoinsiemi di B', cioe' $2^n$, e sono tutti distinti dai precedenti.

Abbiamo già trovato quindi $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ sottoinsiemi di B: basterà dimostrare che non ce ne sono altri. Infatti se C è un sottoinsieme di B si possono presentare due casi: o C non contiene $a_{n+1}$ e quindi C è anche sottoinsieme di B'; oppure C contiene $a_{n+1}$ ed è quindi formato dall'unione di un sottoinsieme di B' con questo ultimo elemento. In ogni caso non ci sono altri sottoinsiemi di B oltre ai $2^{n+1}$ che abbiamo contato. Sfruttando il principio di induzione possiamo concludere che ogni insieme con n elementi possiede $2^n$ sottoinsiemi.

* * *

Analogamente si puo' dimostrare un altro risultato importante nella teoria degli insiemi: per ogni numero positivo e' $2^n > n$. Anche qui non è sufficiente verificare la relazione per i più piccoli valori di n; lasciamo al lettore la dimostrazione per induzione.

* * *

Consideriamo ora un esempio di carattere geometrico: vogliamo dimostrare che la somma degli angoli interni di un poligono di n lati è $(n-2) \cdot 180°$, supponendo naturalmente di aver già dimostrato che la somma degli angoli interni di un triangolo è $180°$.

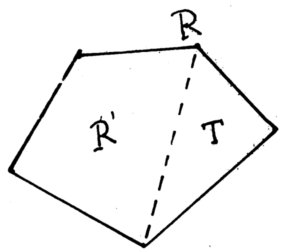
Qui ci troviamo subito di fronte a una difficoltà: il teorema enunciato non ha senso (e quindi non puo' considerarsi valido) per $n = 1$ e nemmeno per $n = 2$; non possiamo quindi applicare il principio di induzione cosi' come lo abbiamo enunciato. Evidentemente occorre generalizzarlo, per poterlo applicare anche ai casi in cui la proprietà vale non per tutti i numeri positivi, ma solo per tutti gli n maggiori o uguali di un certo numero a (nel nostro esempio per $n \geq 3$).

E a questo punto la cosa è piuttosto facile; potremo cioè rienunciare il principio di induzione nella seguente forma:

- se una proprietà in cui compare un numero (parametro) n, vale per $n = a$ (dove a è un qualsiasi numero intero fissato) e inoltre, se vale per n, vale per $n+1$, allora la proprietà data vale per tutti gli $n \geq a$.

Lasciamo anche qui al lettore la dimostrazione del tutto analoga a quella data nel primo caso. Notiamo che questo secondo enunciato comprende in particolare il caso $a = 0$ e sotto questa ultima forma è presentato in molti testi.

Torniamo al teorema sulla somma degli angoli interni di un poligono: è ora chiaro che applicheremo il principio di induzione per $a = 3$. Infatti per $n = 3$ si ottengono i triangoli e la proprietà è nota. Supposto poi il teorema valido per i poligoni di n lati, consideriamo un poligono R con $n+1$ lati. Se uniamo con una diagonale due vertici di R consecutivi a uno stesso vertice, suddividiamo R in un poligono R' con un lato in meno di R (cioè con n lati) e in un triangolo T; inoltre la somma degli angoli interni di R è evidentemente uguale alla somma degli angoli interni di R' e di T. D'altra parte per R' il teorema è supposto valido e per un triangolo sappiamo che la somma degli angoli interni è 180°; si puo' concludere che, come voluto, la somma degli angoli interni di R vale




$$(n-2)180° + 180° = (n-1)180°.$$

Concludiamo queste note con un paradosso che mostra come in certi casi occorra usare particolari cautele nell'applicare il principio di induzione.

Ci proponiamo di dimostrare addirittura che preso un qualunque insieme finito A di numeri, questi sono sempre tutti uguali fra loro; procediamo per induzione sul numero degli elementi di A. Se A ha un solo elemento (n = 1) la cosa è ovvia (non ci possono essere due elementi distinti). Supponiamo, poi, che la proprietà sia valida per gli insiemi di n numeri; sia A un insieme di n+1 elementi; dobbiamo dimostrare che $a_1 = a_2 = \dots = a_{n+1}$. Consideriamo i due insiemi B e C che si ottengono togliendo da A rispettivamente $a_1$ e $a_{n+1}$: B e C hanno n elementi e quindi per l'ipotesi d'induzione questi sono fra loro uguali, cioè $a_2 = a_3 = \dots = a_{n+1}$ e $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Infine per la proprietà transitiva dell'uguaglianza si ottiene

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = a_{n+1} .$$

Il teorema sembrerebbe cosi' dimostrato, ma evidentemente questa dimostrazione non puo' essere corretta. In effetti nell'ultima parte, nell'applicare la proprietà transitiva, abbiamo senz'altro supposto $n > 1$; la dimostrazione cade in difetto nel passaggio da $n = 1$ a $n+1 = 2$. Infatti in questo caso sappiamo soltanto che $a_1$ è uguale a se stesso e $a_2$ pure, il che non ci autorizza a concludere che $a_1 = a_2$. E' indispensabile invece che la dimostrazione dell'ipotesi b) valga per ogni n senza alcuna eccezione.

---

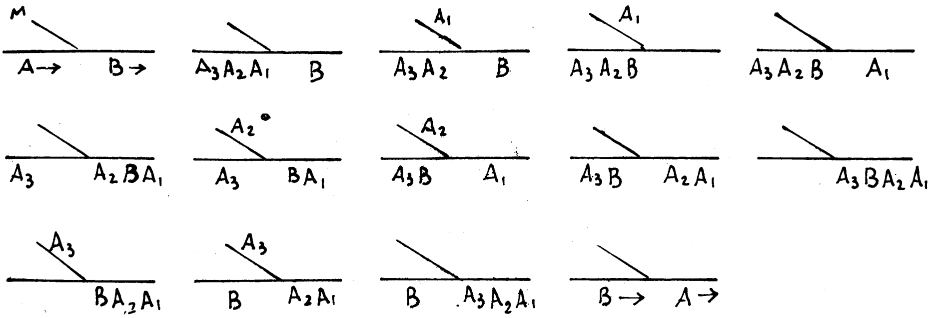
QUESTIONE 49

Poichè nell'enunciato era stata omessa la parola "solo" riproponiamo la questione:

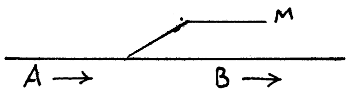
*"Qual è la probabilità di vincere un SOLO "terno" giocando al "Lotto" quattro numeri "per una sola "ruota"?*

continuazione da pagina 7 (QUESTIONE 51)

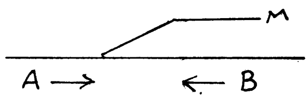
SCHEMA DELLE SUCCESSIVE POSIZIONI per $n = 3$




*Il Lettore studi anche il caso in cui il «binario morto» sia posto in modo che i due treni possano immettervisi* a marcia avanti:




*Si propone inoltre analogo quesito nel caso però che i due treni* incrocino *nella* stazione, *cioè procedano in senso inverso:*




| RISOLUTORI delle QUESTIONI | | | 47 | 48 | 50 | 51 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| FRIGERIO EMMA | L.SC. "Einstein" | MILANO | • | | | • |
| BARLOTTI MARCO | L.CL. "Galilei" | FIRENZE | • | | | • |
| ZILIO SONIA | L.CL. "T. Livio" | PADOVA | • | | | • |
| SORBI DAISY | L.CL. "Dante" | FIRENZE | • | | | • |
| ROSSI FERNANDO | L.CL. "Dante" | FIRENZE | • | | • | • |
| VIOLA PAOLO | L.CL. "Alighieri" | TRIESTE | | | | • |
| FRANCO GIORGIO | ..................... | PADOVA | • | | • | • |
| GUARATO GIUSEPPE | ..................... | VALDAGNO (Vi) | • | • | • | • |
| AGROSI ANIELLO | ..................... | DISO (Le) | • | • | | • |
| FOGLIOTTI FRANCESCO | ..................... | GE-SAMPIERD. | • | • | • | • |
| DA DALT MARIAGRAZIA | L.CL. "Rinaldini" | ANCONA | | | | • |
| SILVESTRI LUIGI | L.SC. "L. Spallanzani" | REGGIO EM. | | | | • |
| LANDINI MAURIZIA | L.SC. "L. Spallanzani" | REGGIO EM. | | | | • |
| BERTOLINI NADIA | L.SC. "L. Spallanzani" | REGGIO EM. | | | | • |
| SVALUTO PIERLUIGI | L.SC. "Collegio Brandolini" | ODERZO (TV) | | | | • |
| CRISCIONE FRANCESCO | ..................... | RIMINI (Fo) | | • | | |
| COGNOLATI FRANCESCO | L. Sc. "L. Spallanzani" | REGGIO EM. | • | | | |
| FRANCIOLI ROSA | I.T.C. "Salvemini" | MOLFETTA (Ba) | | • | | |
| PANSINI MICHELE | I.T.C. "Salvemini" | MOLFETTA (Ba) | | • | | |

**AMICI SOSTENITORI di "Angolo acuto"**

Prof. Ermanno Celli - L.Scient. di Castel di Sangro (AQ) - Dott. Gianluca Ottaviani - Milano - Stud. Stefano Fiorello - Firenze - Stud. Marco Tarlini - FIRENZE

## MATEMATICA DILETTEVOLE

Nel numero 7, pagina 7, abbiamo proposto:

"UN ALTRO PROBLEMA SUI CAPPELLI"

Ne ripetiamo il testo:

*Una trentina di esploratori venne catturata da una tribù indigena. Il capo era intenzionato a ucciderli tutti, ma temendo che fossero dei maghi, diede loro una possibilità di salvarsi, possibilità che, a suo giudizio, solo uno con poteri non umani avrebbe potuto sfruttare.*

*"Vi chiuderò tutti - disse - in una prigione per un mese sotto stretta sorveglianza. Metterò ad alcuni di voi un cappello bianco, agli altri uno nero, in modo che ciascuno veda il cappello di tutti i compagni, ma non il suo. Naturalmente non potrete comunicare fra di voi in nessun modo. Ogni mattina passerò dalla prigione e se qualcuno sarà sicuro che il suo cappello è bianco, verrà da me e avrà salva la vita. Se poi tutti quelli con il cappello bianco si presenteranno da me, sarete tutti salvati".*

*I primi giorni nessuno dei prigionieri si presentò al capo, ma il quindicesimo giorno quindici esploratori andarono da lui asserendo di avere il cappello bianco e... tutti furono salvati.*

*Come fecero i quindici esploratori a arrivare alla conclusione esatta?*

Ed ecco la soluzione:

*Per capire il ragionamento dei quindici esploratori supponiamo dapprima che il capo avesse dato a un solo esploratore il cappello bianco. Costui allora, sapendo che qualcuno aveva il cappello bianco e vedendo tutti i compagni con il cappello nero, avrebbe potuto concludere subito, il primo giorno, che il suo cappello era bianco. Se poi invece i cappelli bianchi fossero stati messi a due esploratori, ciascuno di questi avrebbe visto guardando i compagni un solo cappello bianco. Il primo giorno non avrebbe potuto dir niente e quindi non si sarebbe presentato al gran capo. Avrebbe però visto che anche l'unico compagno che vedeva con il cappello bianco rimaneva fermo e avrebbe potuto ragionare così: "Io vedo solo uno dei miei compagni con il cappello bianco; se io avessi il cappello nero, lui vedrebbe tutti gli altri con il cappello nero e quindi si sarebbe presentato subito al capo. Però non si è mosso e quindi vuol dire che anche lui vede un cappello bianco, che non può essere che il mio. Domani quando verrà il capo potrò presentarmi da lui sicuro di avere il cappello bianco".*

*Abbiamo così visto che se solo due esploratori avessero avuto il cappello bianco, questi si sarebbero presentati il secondo giorno. Supponiamo ora che i cappelli bianchi fossero stati tre: in queste condizioni nessuno si sarebbe potuto presentare al capo né il primo né il secondo giorno. Allora ciascuno dei tre esploratori con il cappello bianco, il secondo giorno, dopo aver visto che nessuno si alzava, avrebbe potuto pensare: "Se i cappelli bianchi fossero stati dati solo ai due che vedo, questi si sarebbero presentati oggi al capo, ma visto che sono rimasti fermi vuol dire che ciascuno di loro vede un altro cappello bianco che io non vedo: cioè anche il mio cappello è bianco". Così in quest'ultimo caso i tre esploratori si sarebbero alzati il terzo giorno.*

*Continuando così, con ragionamenti del tutto analoghi, si vede facilmente che nel ca-*

*so in cui quindici esploratori avessero il cappello bianco, questi si sarebbero presentati il quindicesimo giorno, cioè dopo aver visto i quattordici compagni restare fermi il giorno precedente.*

*Notiamo che è essenziale sapere che almeno uno dei cappelli era bianco; inoltre naturalmente ciascun esploratore conosceva bene i compagni e... doveva avere molta fiducia nelle loro capacità di ragionamento.*

Claudio Bernardi

## LA POSTA DEI LETTORI

### Errata - corrige

Riceviamo e pubblichiamo:

**Ai Redattori responsabili di "ANGOLO ACUTO"**

**A pag.8 del n.6 (anno II) della pubblicazione "ANGOLO ACUTO" si legge:-concludendo la risoluzione della questione n.43 r.:**

**" ..... se ne deduce che l'equazione (1) si può considerare come combinazione lineare delle iperboli...."**

**Come mai "un'equazione combinazione lineare di due curve"? Non si sarebbe dovuto dire : "combinazione lineare delle equazioni delle due iperboli"?**
**Certe abbreviazioni di linguaggio non sono consone al rigore del nostro linguaggio matematico, di quella Matematica che insegna- o dovrebbe insegnare- la precisione, l'esattezza da tutti i punti di vista; oltre che sono controproducenti per i giovani allievi che a quella esattezza si devono abituare per poi poterla riportare in tutte le altre discipline.**

**Con scuse ed ossequi**

**Un lettore di "ANGOLO ACUTO" che nell'insegnamento della Matematica si attiene sempre alla precisione di linguaggio.**

RISPOSTA. Certo che si sarebbe dovuto dire e si deve dire:
"....... l'equazione (1) si può considerare come combinazione lineare delle equazioni delle due iperboli".
Non si tratta di una voluta "abbreviazione di linguaggio" ma di un'imperdonabile e involontaria omissione delle tre parole sottolineate.
Ringraziamo comunque il Lettore per l'attenta segnalazione e rivolgiamo al Lettore stesso la preghiera di non volerci negare per il futuro la Sua collaborazione e le Sue critiche che accettiamo, anzi, sollecitiamo.
Preferiamo però ricevere lettere firmate.

per la Redazione

Spedizione in abbonamento postale - Gruppo III - 70%

Coloro che trattengono
ANGOLO ACUTO
sono pregati di inviare
con sollecitudine
la loro quota
di abbonamento
per il 1971
e di rinnovarlo
per il 1972

**PER FAVORE, NON CESTINATE.** Se questo periodico non vi interessa, vi preghiamo di respingere le copie ricevute al MITTENTE:

ANGOLO ACUTO - Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE

In caso di mancata consegna al destinatario il Portalettere è pregato di specificare il motivo contrassegnando con una X il quadratino corrispondente:

| | | |
|---|---|---|
| DESTINATARIO | ☐ | SCONOSCIUTO |
| | ☐ | TRASFERITO |
| INDIRIZZO | ☐ | INSUFFICIENTE |
| | ☐ | INESATTO |

**ABBONAMENTI PER IL 1972**

| | |
|---|---|
| Studenti | L. 1.200 |
| Abb. ordinario | L. 1.500 |
| " sostenitore | L. 3.000 |
| " benemerito | L. 5.000 |

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio

A chi ci procurerà DIECI nuovi abbonati invieremo l'abbonamento gratuito.

Diffondete
"Angolo acuto"

**LA PALESTRA DELLE GARE**

*AVVERTENZE IMPORTANTI PER I RISOLUTORI. Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte. Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale. Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e la età. Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad:*

*ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78*
*50131 FIRENZE*

al più presto possibile

*Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori. Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.*

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 gennaio 1970.
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso*
Stampato dalla Tipolitografia "Gino Capponi" Via G.Capponi 27 - Firenze.