L'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

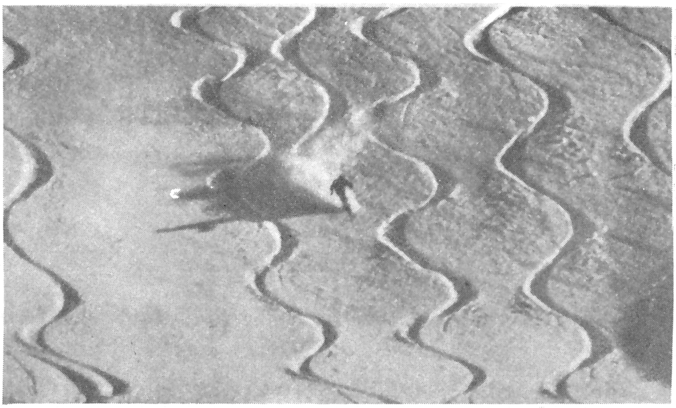
ANNO II - 1971
NOVEMBRE DICEMBRE

9-10

mensile a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 50131 FIRENZE

spedizione in abb.postale - gruppo III 70°/o
conto corrente postale 5/27919

CON QUESTE SINUSOIDI SCIISTICHE



"Angolo acuto" *AUGURA A TUTTI*

FERVIDI AUGURI PER LE FESTIVITA' NATALIZIE E

*BUON ANNO 1972 * * * **

****

COMUNICATO AI RISOLUTORI *(STUDENTI)*

Gli studenti che si sono distinti per assiduità, esattezza ed ordine nella partecipazione alla - PALESTRA DELLE GARE - nel 1970, sono stati ammessi alla Gara Nazionale di Matematica, *indetta a Roma dalla MATHESIS per il giorno 8 Dicembre 1971.*

LA PALESTRA DELLE GARE

QUESTIONI PROPOSTE

(Non sono poste in ordine di difficoltà)

Avvertenze per i risolutori a pag. 16

QUESTIONE **88**

Dato l'arco AB, quarta parte di una circonferenza di centro 0 e di raggio r, sia M un punto dell'arco stesso, sia P il punto intersezione dell'asse del segmento AM con la semiretta BM e sia H la proiezione ortogonale di P sulla semiretta OA.

Determinare la posizione di M in modo che sia $\dfrac{2 \cdot \overline{OH} + 3 \cdot \overline{PH}}{\overline{OM}} = k$

essendo k un numero reale positivo.

(tema assegnato agli esami di ammissione alla 5^classe del Liceo Scient. "Castelnuovo" di Firenze - Sett. 1971)

QUESTIONE **89**

(Teoria degli insiemi)

Dimostrare sia per mezzo dei diagrammi del Venn, sia mostrando l'uguaglianza degli elementi, che

$$C_A(B \cup C) = (C_A B) \cap (C_A C)$$

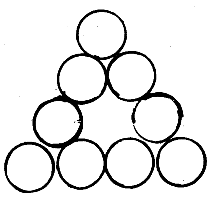
(formule di De Morgan) $$C_A(B \cap C) = (C_A B) \cup (C_A C)$$

QUESTIONE **90**

In un quadrato ABCD, ($\overline{AB} = a$), inscrivere un triangolo equilatero e determinarne l'area.

QUESTIONE **91**

Triangoli magici



Disporre nei nove cerchietti disposti a forma di triangoli (vedi figura) i primi nove numeri naturali

1, 2,, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

in modo che sia costante la somma delle quattro cifre poste nei cerchietti allineati.

Quante soluzioni diverse esistono?

QUESTIONE 92

Disporre nei nove cerchietti posti a forma di triangolo (vedi figura questione 91) i quadrati dei primi numeri naturali:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

in modo da ottenere ancora un TRIANGOLO MAGICO.

QUESTIONE 93

Dati quattro punti di un piano M, N, P, R (tre a tre non allineati) costruire un quadrato ABCD tale che la retta di ciascun lato passi per uno dei quattro punti dati.

TEMA DI MATEMATICA ASSEGNATO AGLI ESAMI DI MATURITA' MAGISTRALE NELLA SESSIONE SUPPLETIVA 1970.

Si tagli una sfera di raggio r con due piani paralleli aventi dal centro distanza $\frac{2}{3} \cdot r$.

Nel segmento sferico a due basi così ottenuto si considerino le due piramidi aventi per vertice il centro della sfera e per basi, rispettivamente, il triangolo equilatero ed il quadrato iscritti nei due cerchi sezione, e si esprimano per mezzo di r l'area e il volume del solido costituito dalle due piramidi.

TEMA DI MATEMATICA ASSEGNATO AGLI ESAMI DI MATURITA' SCIENTIFICA NELLA SESSIONE SUPPLETIVA 1970.

Si trovino i coefficienti della funzione

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

sapendo che:

1) essa si annulla per $x = 0$;
2) la sua derivata prima si annulla per $x = 0$, $x = 1$; $x = 2$;
3) il suo grafico, in un riferimento cartesiano ortogonale $0(x; y)$, ha, nel punto di ascissa $x = -1$, la tangente parallela alla retta di equazione $y = -x$.

Si descriva l'andamento del grafico.

Infine, si determini l'area del rettangoloide, relativo al grafico, avente per base l'intervallo di estremi $x = 0$, $x = 2$.

RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI PROPOSTE

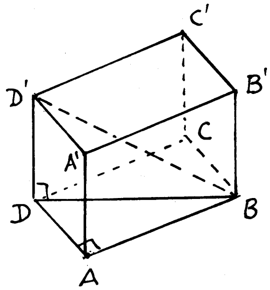
QUESTIONE 52

Determinare le misure delle dimensioni di un parallelepipedo retto-rettangolo e della sua diagonale, sapendo che esse sono indicate rispettivamente dai binomi

$$4x+8, \quad 3x+6, \quad 12x-3, \quad 13x+3.$$

RISOLUZIONE

di Sonia Zilio del Liceo Class. "T.Livio" di PADOVA.



Tra i lati e la diagonale di una parallelepipedo retto-rettangolo (vedi figura) sussiste la seguente relazione

$$\overline{BD'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DD'}^2 \qquad (I)$$

Infatti applicando il teorema di Pitagora ai triangoli BDD' e BAD, rispettivamente rettangoli nei vertici D ed A, si ha:

$$\overline{BD'}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DD'}^2 \qquad e \qquad \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 ;$$

da queste uguaglianze segue la (I); sostituendo le misure date si ha l'equazione:

$$(13x+3)^2 = (4x+8)^2 + (3x+6)^2 + (12x-3)^2$$

da cui risolvendo si ricava $\qquad x = 2.$

Ne segue che le misure delle dimensioni e della diagonale del parallelepipedo dato sono rispettivamente

16, 12, 21 e 29

riferite ad una unità di misura arbitraria prescelta.

Hanno inviato ottime risoluzioni:

Mariagrazia DA DALT- L.Cl. "Rinaldini" ANCONA; Marco BARLOTTI- L.Cl. "Galileo" FIRENZE; Nadia BERTOLINI, Francesco CAGNOLATI e Luigi SILVESTRI-L.Sc. "Spallanzani" REGGIO EMILIA; Emma FRIGERIO-L.Sc. "Einstein" MILANO; Paolo VIOLA-L.Cl. "Alighieri" TRIESTE; Fernando ROSSI e Daisy SORBI-L.Cl. "Dante" FIRENZE; Pier Luigi SVALUTO FERRO-L.Sc. "Brandolini" ODERZO (TV); Giorgio FRANCO-PADOVA; Giuseppe GUARATO-VALDAGNO (Vi); Aniello AGROSI-DISO (Le); Francesco FOGLIOTTI-GENOVA Sampierd.

Il Prof. Fogliotti ha inviato anche la seguente osservazione:

Se a e b sono numeri interi qualsiasi, i quattro numeri:

$$ab, \quad a(a+b), \quad b(a+b), \quad a^2+ab+b^2,$$

sono le misure intere rispettivamente dei lati e della diagonale di un parallelepipedo retto-rettangolo:

Infatti si verifica l'identità: $(ab)^2 + [a(a+b)]^2 + [b(a+b)]^2 = (a^2+ab+b^2)^2$

Analogamente i quattro numeri

$$ab, \quad a(a-b), \quad b(a-b), \quad (a^2-ab+b^2), \quad [\text{con } a>b],$$

misure dei segmenti sopra descritti, verificano l'identità:

$$(ab)^2 + [a(a-b)]^2 + [b(a-b)]^2 = (a^2-ab+b^2)^2.$$

QUESTIONE 53

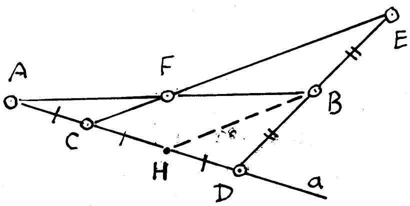
Dimostrare che le seguenti costruzioni, eseguibili senza l'uso del compasso, conducono alla determinazione

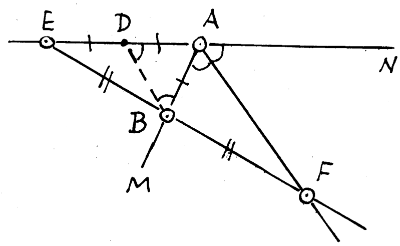
del PUNTO MEDIO di un segmento:

a) Dato il segmento AB, si conduca per A una semiretta a e si prendano su di essa, a partire da A, due segmenti: AC arbitrario e CD = 2 AC. Si congiunga D con B e sul prolungamento di DB si prenda il segmento BE = DB. Dimostrare che il punto F, intersezione di AB con CE, è il punto medio di AB.

della BISETTRICE di un angolo:

b) Dato l'angolo MAN, sul lato AM e sul prolungamento di NA, si stacchino i tre segmenti AB, AD, DE arbitrari ma uguali fra loro. Si congiunga E con B e sul prolungamento di EB, si riporti il segmento BF = EB. Dimostrare che AF è la bisettrice dell'angolo MAN.





RISOLUZIONE
di Giuseppe GUARATO di VALDAGNO (VI)
e di Armando MANETI del L.Cl. "D.Manin" di CREMONA.

a) Detto H il punto medio di CD, H e B sono i punti medi dei lati CD e DE del triangolo CDE, per cui risulta BH // CE. Essendo AC = CH, sarà anche per il teorema di TALETE, AF = FB.

b) Analogamente al caso a), D e B risultano punti medi dei lati EA e EF del triangolo AEF e quindi BD // AF; inoltre il triangolo ABD è isoscele sulla base BD. Allora risulta

$$\underbrace{\widehat{FAN} = \widehat{BDA}}_{\text{angoli corrispondenti}} \underbrace{= \widehat{ABD}}_{\text{ang. alla base del triang. isoscele ABD}} \underbrace{= \widehat{BAF}}_{\text{angoli alterni interni}}$$

Ne segue:

$$\widehat{FAN} = \widehat{BAF}.$$

L'elenco dei Risolutori è a pag. 15.

QUESTIONE 54 (CRIPTARITMETICA)

Trovare un numero di tre cifre, sapendo che, nei sistemi di numerazione in base 7 e in base 9, si scrive con le stesse cifre ma disposte in ordine diverso:

$$(SEI)_7 = (IES)_9 .$$

RISOLUZIONE

di Giuseppe GUARATO di Valdagno (VI) e di Emma FRIGERIO del L.Sc. "Einstein" di Milano.

I dati del problema forniscono:

$$49\cdot S + 7\cdot E + I = 81\cdot I + 9\cdot E + S$$

ossia

$$16(3\cdot S - 5\cdot I) = 2\cdot E$$

e quindi:

$$8(3\cdot S - 5\cdot I) = E$$

da cui risulta E = 0, oppure E= multiplo di 8.
Non può essere E multiplo di 8 perchè deve essere E < 7; è quindi E = 0; da cui segue, per S < 7 e I<7: S= 5 e I = 3. Pertanto si ha:

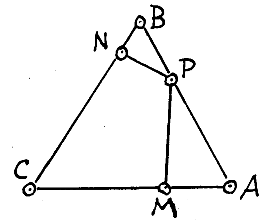
$$(503)_7 = (305)_9 \quad [= 248 \text{ in base } 10],$$

come si può facilmente verificare.

QUESTIONE 55

Sul lato AB di un triangolo equilatero ABC,, determinare un punto P in modo che, dette M ed N le sue proiezioni ortogonali rispettivamente sui lati AC e CB, si abbia la relazione

$$2\cdot(A\hat{M}P) + 3\cdot(B\hat{N}P) = K\,(C\hat{M}PN).$$



Discussione.
(Tema assegnato agli esami di ammissione alla V classe del L.Sc. "L.da Vinci" di Firenze nel settembre 1968).

Hanno risolto e discusso esattamente il problema:

Marco BARLOTTI del L.Cl. 'Galileo" di FIRENZE; Emma FRIGERIO del L.Sc. "Einstein" di MILANO; Pierluigi SVALUTO FERRO del L.Sc. "Brandolini" di ODERZO (Tv); Francesco FOGLIOTTI di GENOVA Samp.; Giuseppe GUARATO di VALDAGNO (Vi).

RISOLUZIONE

Posto $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = s$, e $\overline{AP} = x$, la questione si traduce nel seguente sistema misto :

$$\begin{cases} (5+2K)x^2 - 2(3+K)s\,x + (3-K)s^2 = 0 & (\mathrm{I}) \\ 0 \leq x \leq s , \quad K > 0 \end{cases}$$

La risoluzione e la discussione conducono alle seguenti conclusioni:

$$x = \frac{k+2 \mp \sqrt{3k^2+5k-6}}{2k+5}\, s$$

per $k = \dfrac{\sqrt{97}-5}{6} \quad \rightarrow \quad 0 < x_1 = x_2 = \dfrac{11-\sqrt{97}}{2}\, s < s$;

per $\dfrac{\sqrt{97}-5}{6} < k < 2 \quad \rightarrow \quad 0 < x_1 < x_2 < s$;

per $k = 2 \quad \rightarrow \quad 0 < x_1 = \dfrac{s}{9} < x_2 = s$;

per $2 < k < 3 \quad \rightarrow \quad 0 < x_1 < s < x_2$;

per $k = 3 \quad \rightarrow \quad 0 < x_1 < s < x_2 \left[= \dfrac{12}{11} s \right]$.

Il Prof. F;Fogliotti osserva: - Poichè nell'equazione (I) il parametro k figura sempre di I° grado, si può condurre la discussione nel modo seguente:
Risolvendo la (1) rispetto a k, ponendo k = y, studiando il grafico della curva di equazione

$$y = \frac{5x^2 - 6sx + 3s^2}{-2x^2 + 2sx + s^2}$$

e le sue intersezioni con la retta y=k, nell'intervallo $0 \leq x \leq s$.
Si ritrovano così le conclusioni precedenti.

RISOLUZIONE ANALITICA
di Giuseppe GUARATO di VALDAGNO (Vi)

Posto $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = s$, $\overline{AP} = x$, $\overline{PB} = y$,
le equazioni derivanti dalle condizioni poste sono:

$$2 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{8} + 3\,\frac{y^2\sqrt{3}}{8} = k\left(\frac{s^2\sqrt{3}}{4} - \frac{x^2\sqrt{3}}{8} - \frac{y^2\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$x + y = s$$

Riducendo e semplificando la prima si ha:

1) $(k+2)\,x^2 + (k+3)\,y^2 = 2ks^2$

2) $x + y = s$

con le condizioni $k > 0$; $0 \leq x \leq s$; $0 \leq y \leq s$,
ritenendo valide le soluzioni che portano P a coincidere con i vertici A e B del triangolo.

La 1) è l'equazione di una *ellisse* γ avente per assi gli assi coordinati e il centro nell'origine: infatti la 1) si può scrivere

$$\frac{x^2}{\frac{2ks^2}{k+2}} + \frac{y^2}{\frac{2ks^2}{k+3}} = 1$$

Ne segue che i semiassi sono

$$a = s\sqrt{\frac{2K}{K+2}} = s\sqrt{2 - \frac{4}{K+2}}\ ; \qquad b = s\sqrt{\frac{2K}{K+3}} = s\sqrt{2 - \frac{6}{K+3}}\ ;$$

Si osservi che i semiassi aumentano al crescere di K e che $a > b$.
La equazione 2) rappresenta la retta fissa r che stacca su gli assi due segmenti uguali ad s.
Le soluzioni del problema sono date dalle coordinate dei punti di intersezione di γ con r, appartenenti al primo quadrante.
Per quanto è stato detto, consegue che

il MINIMO valore di $k (= k_0)$ si ha quando γ è tangente ad r,

il MASSIMO valore di k si ha quando $b = s$, ossia per $k=3$.

Si hanno *due soluzioni* per $k > k_0$ e per $a \leq s$, ossia per $k \leq 2$ e quindi per

$$K_0 < K \leq 2$$

Si ha *una soluzione* per $2 < k \leq 3$ (vedi figura)
Per determinare ora il valore di k_0, si indichi con $T \equiv (x_0 ; y_0)$ il punto di tangenza di γ con r.
La retta tangente in T a γ ha per equazione :

$$3) \qquad (K_0+2)\, x_0 x + (K_0+3)\, y_0 y = 2K_0 s^2$$

Affinchè la 3) coincida con la 2) deve essere:

$$(K_0+2)\, x_0 = (K_0+3)\, y_0 = 2K_0 s$$

da cui $\qquad x_0 = \dfrac{2K_0 s}{K_0+2} \qquad y_0 = \dfrac{2K_0 s}{K_0+3}$

Inoltre, dovendo T appartenere ad r, l'equazione 2) deve essere verificata per $x = x_0$ e $y = y_0$. Tale sostituzione conduce all'equazione

$$3K_0^2 + 5K_0 - 6 = 0 \qquad (= 4)$$

– continua a pagina 12 –

I NUMERI CARDINALI

di Claudio Bernardi

La presente nota non pretende di essere una trattazione rigorosa della teoria dei cardinali, ma vuole soltanto presentare nel modo più intuitivo possibile questo ramo della teoria degli insiemi, ancora poco noto sebbene molto importante. Del resto una impostazione rigorosa di questo argomento richiede conoscenza di logica e viene raramente data anche nelle università.

Chiamiamo *cardinalità* o *numero cardinale* o *potenza* di un insieme finito il numero dei suoi elementi: quindi la cardinalità sarà in generale un numero intero positivo, nullo nel caso dell'insieme vuoto.

Due insiemi di ugual cardinalità si possono porre in corrispondenza biunivoca (si possono cioè far corrispondere gli elementi dei due insiemi in modo che ad ogni elemento dell'uno corrisponda *un solo elemento* dell'altro e viceversa).

Es.:
$$\begin{array}{ccc} \{a, & b, & c\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \{h, & m, & n\} \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{cc} \{6, & 7\} \\ \updownarrow & \updownarrow \\ \{2, & 10\} \end{array}$$

Viceversa se due insiemi hanno cardinalità diversa ciò risulta impossibile.

Es.:
$$\begin{array}{c} \{a, b, c, d\} \\ \{h, m\} \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{c} \{2, 3, 5, 7\} \\ \{2, 4\} \end{array}$$

In base a questa osservazione si può estendere il concetto di cardinalità anche agli insiemi *con un numero infinito* di elementi, o, come si dice, *infiniti:* in tal caso diremo che due insiemi hanno ugual cardinalità se si possono mettere in corrispondenza biunivoca; due insiemi *di ugual cardinalità* si dicono *equipotenti.*

Succede però che mentre possiamo parlare di numero cardinale di un insieme finito, per un insieme infinito possiamo solo dire se abbia o no la stessa cardinalità di un altro. Conviene allora dare un nome del tutto arbitrario alla cardinalità di certi insiemi particolari: risulterà così individuato il numero cardinale di ogni altro insieme che possa essere messo in corrispondenza biunivoca con uno di quelli considerati.

Così la cardinalità dell'insieme N dei numeri naturali si indica con $\aleph_0$ *(alef con zero)*; un insieme di cardinalità $\aleph_0$ (che può cioè essere posto in corrispondenza biunivoca con N) si chiama <u>numerabile</u>. La cardinalità di un insieme A si indica con $\overline{A}$

Es.: $\overline{\{a, b, c\}} = 3 \qquad \overline{\emptyset} = 0 \qquad \overline{N} = \aleph_0$

Dimostriamo che l'insieme dei numeri *interi relativi* è numerabile ($\overline{Z} = \aleph_0$). Infatti possiamo far corrispondere rispettivamente ai

numeri naturali	0	1	2	3	4	5	6	7	8	.	.	2n-1	.	.	2n	.	.
i num. relativi	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	.	.	n	.	.	-n	.	.

Osserviamo quindi che se un insieme è infinito può accadere che esista un suo *sottoinsieme proprio* di ugual cardinalità: $N \subset Z$, ma abbiamo dimostrato che i numeri cardinali dei due insiemi sono uguali ($\overline{N} = \overline{Z}$). Si verifica subito che questo non può accadere partendo da un insieme finito; invece si dimostra che dato un insieme infinito A, si può sempre trovare un suo sottoinsieme proprio B tale che $\overline{A} = \overline{B}$. In altri termini la proprietà sopra detta è caratteristica degli insiemi infiniti: potremo allora definire con più rigore gli insiemi infiniti dicendo che

un insieme A è infinito se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio. Ciò è in contrasto con l'idea intuitiva secondo cui un insieme non potrebbe mai essere posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte. Notiamo più in generale che può succedere che dati due insiemi A e B esista una corrispondenza biunivoca fra A e un sottoinsieme proprio di B e, ciò nonostante, A e B siano equipotenti.

Riferendoci sempre all'ultimo esempio, se si fa corrispondere ad ogni numero naturale n se stesso (pensato come numero relativo), si ottiene una corrispondenza biunivoca fra i naturali e un sottoinsieme proprio dei relativi. Del resto la definizione di equipotenza richiede solo l'esistenza di una corrispondenza biunivoca fra i due insiemi, senza alcuna ipotesi su eventuali altre possibili corrispondenze.

Osserviamo anche che se un insieme A ha la stessa cardinalità di B e B la stessa di C allora A e C hanno la stessa cardinalità e possono essere posti in corrispondenza biunivoca. Cioè se $\overline{A} = \overline{B}$ e $\overline{B} = \overline{C}$ allora $\overline{A} = \overline{C}$.

Si dimostrano le seguenti proprietà:

a) *l'insieme dei numeri pari* P ha cardinalità uguale a quella degli interi, cioè $\overline{P} = \aleph_0$. Infatti si possono porre in corrispondenza biunivoca

i numeri interi	. . .	-1	0	1	2	3	4	. . .	n	. . .
e i numeri pari	. . .	-2	0	2	4	6	8	. . .	2n	. . .

b) *i numeri razionali* hanno cardinalità uguale a quella degli interi (sono numerabili). Tralasciamo la dimostrazione.

c) non esiste alcuna corrispondenza biunivoca fra R e N, cioè i *reali hanno cardinalità diversa da* $\aleph_0$. La cardinalità dei reali, detta *del continuo,* si indica con C. Abbiamo così già trovato che, contrariamente a quanto si potrebbe pensare, esistono varie cardinalità infinite, nel senso che non tutti gli insiemi infiniti si possono porre in corrispondenza biunivoca. Si può comunque estendere la relazione di maggiore e minore. Avremo quindi $C > \aleph_0$.

Dimostriamo che R e N non sono equipotenti (la dimostrazione è dovuta a Cantor). *Ragioniamo per assurdo:* supponiamo che esista una corrispondenza biunivoca fra R e N. Ad ogni numero naturale corrisponderà così un numero reale; ad esempio siano associati:

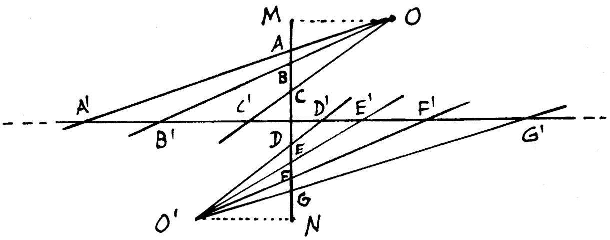
0	e	36,19473.......
1	e	0,23579.......
2	e	7,00000.......
3	e	4,57366.......
....		

Mostriamo che *esiste almeno un numero reale r che non è associato a nessun numero naturale,* cioè che la corrispondenza non è biunivoca. Costruiamo r nel modo seguente: la parte intera sia 0, la prima cifra decimale sia diversa dalla prima cifra decimale del numero reale associato a 0 (ad es. 4 $\neq$ 1), la seconda cifra decimale sia diversa dalla seconda cifra del numero associato ad 1 (ad es. 5 $\neq$ 3), la terza cifra sia diversa dalla terza del terzo numero (ad es. 8 – 8 $\neq$ 0) ecc. Avremmo così ad esempio r = 0,4582.....

Notiamo che r è diverso da tutti i numeri reali che abbiamo scritto: infatti è diverso dal primo perchè ha la prima cifra decimale diversa, dal secondo per la seconda cifra, dall'ennesimo per l'ennesima cifra. Nella corrispondenza che abbiamo supposto esistere avevamo quindi escluso almeno un numero reale: ad r non corrisponde alcun numero naturale e quindi la corrispondenza non è biunivoca.

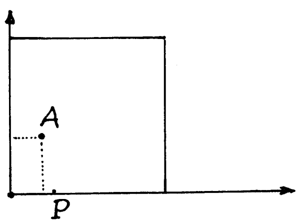
d) l'insieme dei *punti di una retta* ha cardinalità uguale a quella dei *numeri reali.* Infatti introducendo le *coordinate ascisse sulla retta* facciamo corrispondere a ogni punto un numero reale e viceversa: la corrispondenza è biunivoca.

e) *i punti di un segmento* hanno cardinalità uguale a quella dei *punti di una retta.* Diamo una dimostrazione geometrica: disegnamo la retta perpendicolare al segmento nel suo punto di mezzo. Si corrispondono le coppie di punti allineate con 0 e 0' come indicato in figura. La corrispondenza è biunivoca.



f) i *punti di un piano* hanno cardinalità uguale a quella dei punti di una retta. (Cantor scoprendolo disse la celebre frase: *"lo vedo ma non lo credo").* Noi dimostreremo soltanto che i punti di un quadrato si possono mettere in corrispondenza biunivoca con quelli di un suo lato, pur essendo un lato un sottoinsieme del quadrato.

Consideriamo ad esempio un quadrato di lato unitario. Ad A punto qualunque del quadrato possiamo associare 2 numeri compresi fra 0 e 1 (ascissa e ordinata), siano ad esempio: x = 0,1246827 ..., y = 0,3056400...
Ad A facciamo corrispondere allora il punto P di ascissa uguale a 0,13204566842070..... ottenuta prendendo *alternativamente* una cifra dell'ascissa e una dell'ordinata di A. La corrispondenza è biunivoca: ad A corrisponde uno e un solo P; viceversa dato P possiamo ricostruire in modo unico l'ascissa e l'ordinata di A, prendendo rispettivamente le cifre di posto dispari e quelle di posto pari dopo la virgola dell'ascissa di P.



g) dai punti e) ed f) segue che un segmento qualsiasi, una retta e un piano (pensati come insieme di punti) sono tutti equipotenti (il loro numero cardinale è C); in termini poco rigorosi potremmo enunciare un risultato ben strano: *i punti di un segmento sono tanti quanti quelli di un piano.*

A questo punto si potrebbe pensare che non esistano cardinali più grandi di C; ciò è falso: si può dimostrare ad esempio che l'insieme di tutte le funzioni reali di variabili reali ha cardinalità maggiore di quella del continuo.

Ma più in generale esiste un numero cardinale più grande di tutti? La risposta è nagativa e ne accenneremo una dimostrazione. Cominciamo con il considerare la cardinalità dell'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ di un insieme finito di cardinalità nota α. Si può trovare in vari modi che è $\mathcal{P}(A) = 2^{\alpha}$; cioè se un insieme ha ad esempio 4 elementi, $\mathcal{P}(A)$ ne ha $2^4 = 16$. Inoltre si ha anche che 2^{α} è sempre maggiore di α: infatti $2^0 > 0$, $2^1 > 1$, $2^2 > 2$ ecc. (*)

Si può dimostrare che questi due risultati vangono anche nel caso di insiemi infiniti (bisognerà naturalmente estendere il concetto di *potenza*). Si trova così che non c'è nessun cardinale maggiore di tutti gli altri: infatti se fosse H il cardinale massimo 2^H è maggiore di H.

In base a questo risultato si trova anche che è assurdo parlare di "*insieme di tutti gli insiemi*". Infatti detto A tale insieme esso dovrebbe avere una certa cardinalità α, ma l'insieme delle parti di A ($\mathcal{P}$ (A)) avrebbe cardinalità $2^{\alpha} > \alpha$, il che è assurdo essendo A l'insieme di tutti gli insiemi e quindi "*più grande*" di ogni altro insieme.

Bisogna allora evitare espressioni del tipo "insieme di tutti gli insiemi" e limitare il campo in cui si opera: occorre cioè fissare un certo insieme (grandissimo ma determinato) detto "*universo*" e operare sempre all'interno di esso, considerando sempre solo i sottoinsiemi dell'*universo*.

(*) CFR. la nota: « IL PRINCIPIO DI INDUZIONE di Claudio Bernardi, pubblicata a pag. 6 del num. 8 - 1971 di ANGOLO ACUTO.

CONTINUAZIONE QUESTIONE 55 da pag. 8.

Risolvendo e tenendo presente la condizione $k > c$ si ricava:

$$K_0 = \frac{\sqrt{97} - 5}{6} \quad \text{e quindi} \quad x_0 = \frac{11 - \sqrt{97}}{2}, \quad y_0 = \frac{\sqrt{97} - 9}{2}$$

Nel caso di $K_0 < K \leq 2$ le soluzioni sono date da

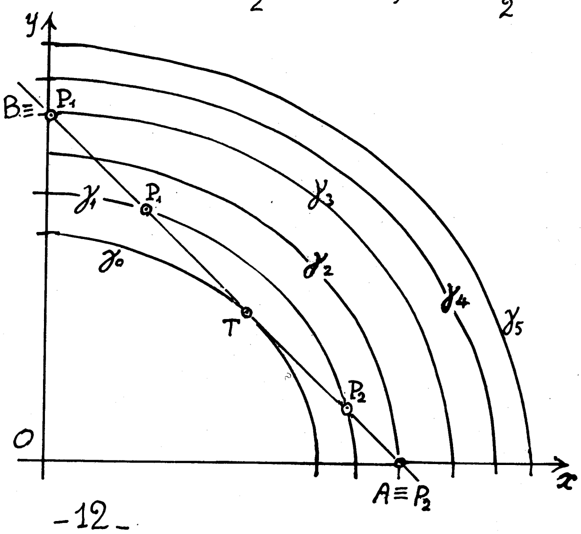
$$x = \frac{K + 3 \pm \sqrt{\Delta}}{2K + 5},$$

$$y = \frac{K + 2 \mp \sqrt{\Delta}}{2K + 5}.$$

Nel caso di $2 < K \leq 3$ la soluzione è data da

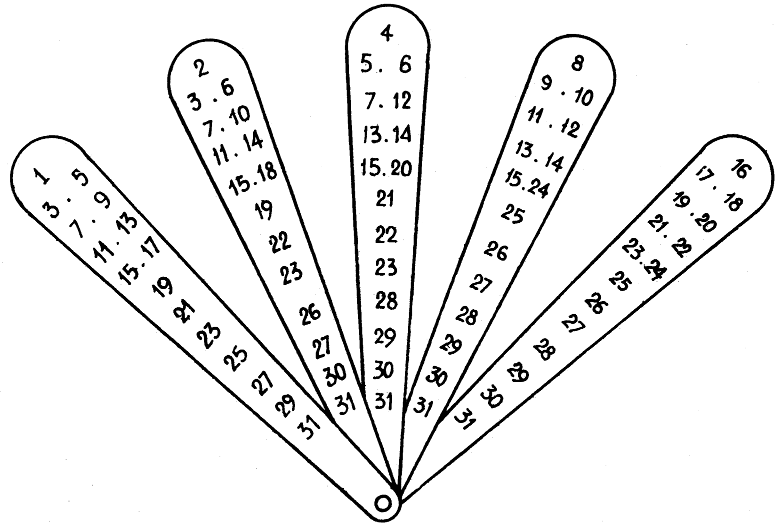
$$x = \frac{K + 3 - \sqrt{\Delta}}{2K + 5},$$

$$y = \frac{K + 2 + \sqrt{\Delta}}{2K + 5}.$$



A pagina 2 del n. 2, anno I, 1970, avevamo presentato ai nostri lettori:

Un ventaglio misterioso



Costruite con strisce di cartoncino un ventaglio simile alla figura.

Invitate una persona a pensare un numero (non maggiore di 31) e fatevi indicare su quali dei suddetti cartoncini tale numero è scritto.

Sommate i primi numeri (in alto) dei cartoncini indicati....... e la somma ottenuta sarà il numero pensato.

Chi sa dare una spiegazione del giuoco?

Chi sa costruire un ventaglio ugualmente misterioso a sei cartoncini?

* * *

Sveliamo ora..... il mistero:

A base del giuoco sta il noto teorema:

Ogni numero intero è scomponibile, in modo unico, nella somma di potenze di 2, aventi esponenti crescenti.

Si ha infatti:

$1 = 2^0$	$5 = 2^0 + 2^2$	$9 = 2^0 + 2^3$
$2 = 2^1$	$6 = 2^1 + 2^2$	$10 = 2^1 + 2^3$
$3 = 2^0 + 2^1$	$7 = 2^0 + 2^1 + 2^2$	$11 = 2^0 + 2^1 + 2^3$
$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	$12 = 2^2 + 2^3$

$$\begin{aligned} 31 &= 1 + 2\cdot 15 = 1 + 2(1 + 2\cdot 7) = \\ &= 1 + 2\left[1 + 2(1 + 2 + 2^2)\right] = \\ &= 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 . \end{aligned}$$

Altro esempio: $371 = 1 + 2\cdot 185 = 1 + 2(1 + 2\cdot 92) = \dots$

$$\dots = 2^0 + 2^1 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^8 .$$

Prendiamo ora un qualsiasi numero di cartoncini, per esempio n, e scriviamo su essi, in alto, i numeri

$$2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ \dots\dots,\ 2^{n-1}$$

cioè

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \dots\dots,\ 2^{n-1}.$$

Il numero massimo che si può inserire è

$$N = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 .$$

Per completare gli n cartoncini basta porre ogni numero N' (minore o uguale a N) sotto la forma polinomiale di somma di potenze di 2 con esponenti crescenti:

$$N' = 2^a + 2^b + 2^c + \dots\dots + 2^h$$

$$\text{con} \quad a < b < c < \dots\dots < h \leq n-1 .$$

Esempio: Il numero 27 si può scrivere:

$$27 = 2^0 + 2^1 + 2^3 + 2^4,$$

perciò esso deve essere scritto soltanto nel 1°, 2°, 4° e 5° cartoncino.

Ne segue, viceversa, che sommando i numeri in alto dei cartoncini sui quali esiste il numero scelto, si ottiene come risultato il numero stesso.

OSSERVAZIONI

I) La prima "stecca" del ventaglio contiene i numeri del sistema <u>decimale</u> che scritti nel sistema <u>binario</u> hanno "la cifra 1" come prima cifra a destra. (e cioè i <u>numeri dispari</u>).
La seconda (terza, quarta,...) "stecca" contiene i numeri del sistema <u>decimale</u> che scritti nel sistema binario hanno "la cifra 1" come seconda (terza, quarta,...) cifra, sempre a cominciare da destra.

Esempio: Seconda "stecca"

(base 2)	10,	11,	110,	111,	1010,	1011,	...
(base 10)	2,	3,	6,	7,	10,	11,	...

II) In pratica si può costruire un ventaglio con un numero qualsiasi di cartoncini, per esempio, con sei nel modo seguente:

Si scrivano in 6 colonne i numeri naturali da *zero a 63.*
Nella prima colonna, partendo dallo zero, si cancelli alternativamente un numero (un numero sì e uno no),
nella seconda si cancellino alternativamente due numeri successivi (due sì e due no),
nella terza colonna si cancellino alternativamente quattro numeri successivi (quattro sì e quattro no) e così via.

In generale nella colonna r^{ma} si cancellino alternativamente

2^{r-1} numeri successivi.

Esempio: Colonna terza:

~~0~~ ~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ - 4 5 6 7 - ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ ~~11~~ - 12 13 14 15 - ~~16~~ ~~17~~ ~~18~~ ~~19~~ - 20....

Sarà facile quindi al lettore costruire il ventaglio a 6 o più cartoncini.

QUESTIONE 53

Hanno inviato ottime risposte:
Sonia ZILIO - L.Cl. "T.Livio" PADOVA; Luigi SILVESTRI e Francesco CAGNOLATI - L.Sc. "L.Spallanzani" REGGIO EMILIA; Mariagrazia DA DALT - L.Sc. "Rinaldini" ANCONA; FERNANDO ROSSI e Daisy SORBI - L.Cl. "Dante" FIRENZE; Giorgio FRANCO - PADOVA; Aniello AGROSI - DISO (Le); Emma FRIGERIO - L.Sc. "Einstein" - MILANO; Pierluigi SVALUTO FERRO - L.Sc. "Brandolini" ODERZO (TV); Francesco FOGLIOTTI - GENOVA Samp.; Francesco DI TEMPORA - L.Cl. "Properzio" ASSISI (Pg); Andrea BECONI e Ivana BUCCIONI - L.Cl. "Galileo" FIRENZE.

QUESTIONE 54 Sono pervenute anche le risoluzioni di:
Mariagrazia DA DALT - L.Cl. "Rinaldini" ANCONA; Fernando ROSSI e Daisy SORBI - L.Cl. "Dante" FIRENZE; Paolo VIOLA - L.Cl. "Alighieri" TRIESTE; Giorgio FRANCO - PADOVA; Aniello AGROSI - DISO (LE); Pierluigi SVALUTO - L.Sc. "Brandolini" ODERZO (TV) e Francesco FOGLIOTTI di GENOVA Samp.

AMICI di "ANGOLO ACUTO"

BENEMERITI

Prof. Ermanno Celli - L.Sc. - CASTEL di Sangro (Aq)
Stud. Stefano Fiorello - L.Sc. Scuole Pie Fior.-FIREN.
Prof. Maria Albanese - L.Sc. L.da Vinci - FIRENZE
Dott.Ing. Dino Masini - PAVIA
Prof. Pietro Castaldo - CITTA' DI CASTELLO (PG)

SOSTENITORI

Dott. Gianluca Ottaviani - MILANO
Prof. Lorenzo Fucci - NAPOLI
Prof. Simonetta Galigani - FIRENZE
Prof. Margherita Fontana - VICENZA
Prof. Giovanni La Fata - TRAPANI
Stud. Riccardo e Alessandro Fantechi - FIRENZE
Prof. Luisa Piegai MILANO

ABBONAMENTI PER IL 1972

Studenti	L. 1.200
Abb. ordinario	L. 1.500
" sostenitore	L. 3.000
" benemerito	L. 5.000

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio

A chi ci procurerà DIECI nuovi abbonati invieremo l'abbonamento gratuito.

Diffondete "Angolo acuto"

LA PALESTRA DELLE GARE

AVVERTENZE IMPORTANTI PER I RISOLUTORI. Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte. Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale. Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e la età. Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad:

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78
50131 FIRENZE

al più presto possibile

Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori. Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati dei premi in libri.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n.2051 in data 13 gennaio 1970
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso*
Stampato dalla Tipolitografia "Gino Capponi" Via G. Capponi 27 - Firenze