L'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

ANNO III - 1972

GENNAIO - FEBBRAIO

1

Periodico bimestrale
a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

spedizione in abb. postale - gruppo IV
conto corrente postale 5/27919

ABBONAMENTI PER IL 1972

Studenti	L.	1 200
Abb. ordinario	L.	1 500
" sostenitore	L.	3 000
" benemerito	L.	5 000

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio.

LA PALESTRA DELLE GARE

I MIGLIORI "ANGOLISTI" dell'anno scolastico 1970/71

ROSSI Fernando -	L.Cl. "Dante" -	FIRENZE
FRIGERIO Emma -	L.Sc. "Einstein" -	MILANO
ROSELLI Armando -	L.Sc. "Paleocapa"-	ROVIGO
BARLOTTI Marco -	L.Cl. "Galileo" -	FIRENZE
DA DALT Mariagrazia -	L.Cl. "Rinaldini" -	ANCONA
ZILIO Sonia -	L.Cl. "T.Livio" -	PADOVA
BACCI Leonardo - -	Ist. Tecn. Agrario-	FIRENZE

AVVERTENZE IMPORTANTI PER I RISOLUTORI. Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte. Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale. Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età. Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE
al più presto possibile

Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori. Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.

QUESTIONI PROPOSTE

(Non sono poste in ordine di difficoltà)

QUESTIONE 94

Un metodo curioso per calcolare il prodotto di due numeri interi.

Qualsiasi moltiplicazione fra due numeri interi si può effettuare facendo solamente moltiplicazioni e divisoni per 2.

Dati i due numeri interi da moltiplicare conviene scegliere il minore come primo fattore. Sotto questo fattore si scrive la sua metà (per difetto, se esso è dispari); sotto la metà, sempre in colonna, ancora la metà e così via, finché si ottiene il numero 1.

A destra del primo fattore si scrive il secondo fattore; sotto questo il suo doppio; sotto il doppio sempre in colonna ed in corrispondenza dei numeri della prima colonna, si scrive il doppio e così via finché si giunge all'1 della prima colonna.

La somma dei numeri della seconda colonna che corrispondono ai numeri dispari della prima colonna, è il prodotto richiesto.

ESEMPIO: Sia da moltiplicare 46 per 52.

L'operazione si dispone come segue:

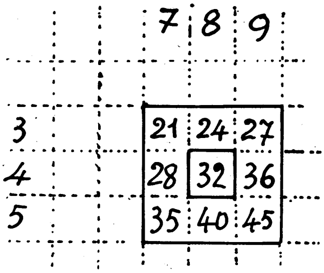
46	52		
23	104 .	→	104
11	208 .	→	208
5	416 .	→	416
2	832		
1	1664 .	→	1664
			2392

Come si può giustificare l'esattezza di questo procedimento?

QUESTIONE 95

Una curiosità della tavola pitagorica.

Dimostrare che la somma degli 8 numeri che circondano un numero **qualunque** della tavola pitagorica è uguale al prodotto di quel numero per 8.



QUESTIONE 96

Costruire un trapezio dati i quattro lati. Discussione.

QUESTIONE 97

Risolvere e discutere il sistema

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ xy + x - 1 = y^2 + 2y \end{cases}$$

T. L.

QUESTIONE 98

È noto che con il simbolo $\binom{m}{n}$ si indica il numero delle combinazioni che si possono ottenere con **m** oggetti presi a n a n.

Verificare la seguente relazione:

$$\binom{m}{n}\binom{n}{k} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}$$

QUESTIONE 99

Dati i punti A (3;0), B (– 1; 2) e C (0; 1) scrivere:

1) l'equazione della parabola α) avente l'asse parallelo all'asse delle y e passante per i punti A, B e C;

2) l'equazione della circonferenza β) circoscritta al triangolo ABC.

Determinare infine le coordinate dell'ulteriore punto di intersezione fra la parabola α) e la circonferenza β) sopra descritte.

QUESTIONE 56

Dimostrare che se un numero intero è somma di due quadrati, anche il suo quadrato è somma di due quadrati.

RISOLUZIONE di *Sonia Zilio* del L. Cl. « T. Livio » di Padova.

Sia $N = a^2 + b^2$ con $a > b$ ne segue $N^2 = (a + b)^2 - 2ab$.
Ed elevando a quadrato ambo i membri:

$$N^2 = [(a+b)^2 - 2ab]^2, \qquad \text{ovvero}$$

$$N^2 = (a+b)^4 + (2ab)^2 - 4ab(a+b)^2 =$$
$$= (2ab)^2 + (a+b)^2[(a+b)^2 - 4ab] =$$
$$= (2ab)^2 + (a+b)^2(a-b)^2 = (2ab)^2 + (a^2-b^2)^2;$$

quindi $\boxed{N^2 = (2ab)^2 + (a^2-b^2)^2}$

cioe il quadrato del numero N è uguale alla somma dei quadrati dei 2ab e di $(a^2 - b^2)$.
OSSERVAZIONE. La questione può estendersi:

Dimostrare che se un numero è somma di due quadrati, è pure somma di due quadrati:

1) il suo quadrato; 2) il suo doppio; 3) la sua metà.

1) Già dimostrato.

2) Se $N = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$, è anche:

$$2N = 2(a+b)^2 - 4ab = (a+b)^2 + (a+b)^2 - 4ab; =$$

quindi
$$2N = (a+b)^2 - (a-b)^2 \qquad (a > b)$$

3) Dividendo ambo i membri della precedente uguaglianza per 4, è

$$\frac{N}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \qquad (a > b)$$

RISOLUZIONE di *Giuseppe Guarato* di Valdagno (VI).

La proprietà espressa dall'enunciato è vera se i due quadrati di cui N è somma, sono *disuguali* ($a \neq b$).

Infatti si ha: $N = a^2 + b^2, \quad a > b$

$$N^2 = (a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2.$$

Se invece i due quadrati sono uguali (a = b), N^2 risulta uguale alla *differenza* di due quadrati:

Infatti si ha:

$$N = a^2+a^2=2a^2; \quad N^2 = 4a^4; \quad \text{da cui}:$$

$$N^2 = a^8+2a^4+1-a^8+2a^4-1; \quad \text{oppure} \quad N^2 = a^2\cdot 4a^2;$$

$$N^2 = (a^4+1)^2-(a^4-1)^2. \quad\Big|\quad N^2 = a^2(a^2+1)^2 - a^2(a^2-1)^2;$$

$$N^2 = [a(a^2+1)]^2 - [a(a^2-1)]^2.$$

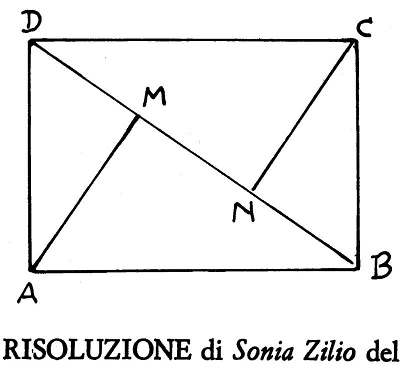
Fernando Rossi del L. Cl. « Dante » di Firenze aggiunge alla sua risoluzione la seguente:

OSSERVAZIONE. Procedendo in modo analogo si può dimostrare che se un numero è scomponibile nella *differenza* di due quadrati, anche il suo quadrato è scomponibile nella *differenza* di due quadrati.

Infatti, posto $N = a^2-b^2$ $(a > b)$ si ha:

$$N^2 = (a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 =$$
$$= (a^4+2a^2b^2+b^4) - 4a^2b^2;$$
$$N^2 = (a^2+b^2)^2 - (2ab)^2$$

QUESTIONE 57



Un rettangolo ABCD ha il lato maggiore AB uguale alla diagonale del quadrato costruito sul lato minore BC. Se dagli estremi della diagonale AC si conducono le perpendicolari AM e CN all'altra diagonale BD, questa risulta divisa in tre parti uguali:

$$BN = NM = MD$$

E reciprocamente.

RISOLUZIONE di *Sonia Zilio* del L. Cl. «T. Livio » di Padova.

Posto $\overline{BC} = a$ è $\overline{AB} = a\sqrt{2}$.
Dal triangolo ABD, per il teor. di PITAGORA, risulta $\overline{BD} = a\sqrt{3}$.

Dal triangolo DCB, per il 1° teor. di EUCLIDE, si ha:
$\overline{CB}^2 = \overline{DB} \cdot \overline{NB}$, $\Rightarrow$ $a^2 = a\sqrt{3} \cdot \overline{NB}$,
da cui $\overline{NB} = a\sqrt{3}/3$.
Analogamente, dal triangolo ABD, si ha: $\overline{DM} = a\sqrt{3}/3$.
Essendo
$\overline{MN} = \overline{DB} - (\overline{DM} - \overline{NB})$
segue:
$\overline{MN} = a\sqrt{3} - (a\sqrt{3}/3 + a\sqrt{3}/3) = a\sqrt{3}/3$
Concludendo:
$\overline{DM} = \overline{MN} = \overline{NB}$.

VICEVERSA: Se $\overline{DM} = \overline{MN} = \overline{NB}$
$\Rightarrow$ $\overline{DC} = \overline{CB}\sqrt{2}$.
Posto infatti $\overline{DM} = \overline{MN} = \overline{NB} = K$ risulta $BD = 3K$. Dal triangolo DCD, per il 1° teor. di EUCLIDE, si ha:
$\overline{CB}^2 = \overline{DB} \cdot \overline{NB} = 3K \cdot K$
da cui $\overline{CB} = K\sqrt{3}$.
E ancora:
$\overline{DC}^2 = \overline{DB}^2 \cdot \overline{DN} = 3K \cdot 2K$;
da cui: $DC = K\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$
ovvero $DC = CB \cdot \sqrt{2}$ c.v.d.

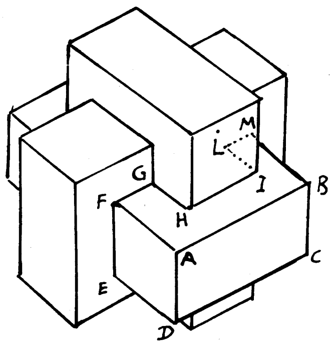
RISOLUZIONE di *Giuseppe Guarato* di Valdagno (Vi).

Ricordando che in ogni triangolo rettangolo il rapporto fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è uguale al quadrato del rapporto fra i rispettivi cateti e *viceversa* si ha:

$\overline{AB} : \overline{AD} = \sqrt{2} : 1$;
$\Rightarrow$ $\overline{BN} : \overline{MD} = 2 : 1$ e
$\overline{MD} = \overline{NB} = \frac{1}{3}\overline{BD} = MN$.

VICEVERSA
$\overline{BM} : \overline{MD} = 2 : 1$;
$\Rightarrow$ $\overline{AB} : \overline{AD} = \sqrt{2} : 1$
e $\overline{AB} = \overline{AD}\sqrt{2}$.

QUESTIONE 58



Calcolare l'area della superficie e il volume del solido qui disegnato, che rappresenta tre parallelepipedi retti-rettangoli uguali, incastrati in modo che abbiano lo stesso centro e gli stessi assi di simmetria. Le dimensioni di ciascun parallelepipedo sono:

4a, 6a, 8a.

La RISOLUZIONE più rapida è quella del bravissimo M° *Giuseppe Guarato* di Valdagno.

L'area S della superficie del solido è data da:

$$S = 6\,[2\,ADEF + 2\,AFGHILMB + ABCD] =$$
$$= 6\,(16a^2 + 16a^2 + 24a^2) = 336a^2.$$

Il volume V del solido è dato dalla somma del volume del cubo centrale di spigolo 4a (*) e dal sestuplo del parallelepipedo retto-rettangolo di dimensioni:

$\overline{AB} = 6a$, $\overline{AD} = 4a$, $\overline{AF} = 2a$ per cui

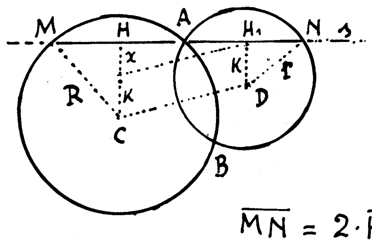
$$V = (4a)^3 + 6\,(6a \cdot 4a \cdot 2a) = 64a^3 + 288a^3 = 352a^3.$$

(*) sono pervenute diverse risposte errate: alcuni non hanno « visto » il *cubo centrale* di spigolo 4a.

QUESTIONE 59

Per uno dei punti di intersezione di due circonferenze giacenti sullo stesso piano e secantisi, condurre la secante che determina il massimo segmento come intersezione con l'insieme dei due cerchi.

RISOLUZIONE di *Sonia Zilio* del L. Cl. « T. Livio » di Padova.



Riferimento alla figura, dal punto H_1, traccio la parallela alla retta congiungente i centri C e D.

Detti R ed r i raggi delle circonferenze date, K la distanza DH_1 e $K + x$ la distanza CH, si ha:

$$\overline{MN} = 2 \cdot \overline{HH'} = 2\sqrt{R^2 - (K+x)^2} + 2\sqrt{r^2 - K^2}.$$

MN diventa massimo per x = o; perciò MN risulta parallelo alla retta congiungente i centri C e D.

RISOLUZIONE di *Emma Frigerio* del L. Sc. « Einstein » di Milano
e di *Giuseppe Guarato* di Valdagno (Vi).

Congiuto M ed N con B, considero l'insieme dei triangoli BMN al variare della direzione di MN entro gli angoli opposti al vertice EAF ed HAG, aventi per lati le tangenti alle due circonferenze in A e non comprendenti B. Tale insieme contiene tutti i triangoli *simili,* stante l'invarianza dell'ampiezza degli angoli BMN e BNM in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AB.

- continua a pag. 11. -

CENNI DI LOGICA: I POSTULATI

di Claudio Bernardi

Quando in geometria o in qualsiasi altro ramo della matematica dimostriamo un *teorema*, ci rifacciamo ad altri teoremi già noti; questi ultimi a loro volta erano stati dimostrati facendo uso di proprietà precedentemente dimostrate e così via. Un tale processo all'indietro deve naturalmente avere termine (non può cioè continuare all'infinito); perciò è necessario assumere come veri certi enunciati senza dimostrarli e ricavare via via da questi tutti i teoremi. Questi enunciati base si usano chiamare *postulati o assiomi.*

Un processo analogo si incontra nelle *definizioni*: ad esempio per definire il triangolo diciamo che un triangolo è la parte finita di piano limitata da tre segmenti consecutivi a due a due. Così per definire il triangolo occorre già conoscere che cosa sia il piano e che cosa siano i segmenti; per definire poi il segmento occorre rifarsi ai concetti di retta e punto. In altri termini per dare una nuova definizione si deve ricorrere ad altre definizioni precedenti, e queste a loro volta erano state date riferendosi a concetti già noti e così via. Ancora una volta dobbiamo evitare che il processo vada all'infinito e accettare senza definizione certi enti (nella geometria i concetti di punto retta e piano): questi verranno chiamati *enti primitivi*. Essi dunque non possono essere definiti se no occorrerebbe far uso di altri concetti che diverrebbero a loro volta primitivi e il problema sarebbe solo rimandato; d'altra parte servono per definire tutti gli enti che è utile introdurre.

Ci troviamo così necessariamente di fronte a questa duplice situazione: da un lato i *postulati* che vanno ammessi senza dimostrazione, dall'altro gli *enti primitivi*, cioè nozioni che non possono essere definite. Ma che cosa sono in realtà i postulati e gli enti primitivi? e come se ne può giustificare la presenza nella geometria e in ogni altro ramo della matematica?

Una prima risposta la troviamo, più o meno esplicita, in Euclide (IV-III sec. a. C.). Nella concezione di Euclide, che è forse la più intuitiva e la più facile da accettare, gli enti primitivi vanno intesi come concetti così semplici da essere noti a tutti: ogni uomo possiede, per natura, le nozioni di punto retta e piano e quindi il tentativo di definirli, oltre che assurdo per i motivi sopra esposti, sarebbe anche inutile.

Analogamente i postulati non sono altro che *proprietà evidenti* riguardanti gli enti primitivi; si tratta cioè di proprietà così naturali da potersi senz'altro ritenere vere: tutti sanno ad esempio che per due punti distinti passa una sola retta o che per uno solo ne passano infinite.

Secondo questa concezione euclidea la matematica è quindi lo studio di oggetti ben precisati (anche se non definiti), di cui alcune proprietà, particolarmente intuitive vanno senz'altro accettate. Queste idee furono accettate per molti secoli; più che criticare il concetto di postulato in Euclide, molti matematici tentarono, senza per altro riuscirci, di dimostrare *il famoso V postulato di Euclide*, secondo cui, *data una retta r e un punto P non appartenete ad essa, per P passa una e una sola retta parallela*[1] *ad r*[2].

Finalmente verso il XIX secolo inizia un nuovo indirizzo di studi: sorgono le *geometrie non euclidee* nelle quali non si accetta più il V postulato. In particolare Riemann cerca di costruire una geometria accettando al posto del V il seguente postulato: *per un punto fuori da una retta non passa alcuna retta parallela alla retta data* (si ha così la *geometria ellittica*); Lobacevskij invece assume come postulato che *per un punto passino più parallele a una retta data* (*geometria iperbolica*). Da questi due postulati scendono nuovi teoremi che in generale sono diversi da quelli della geometria euclidea: ad esempio *in geometria ellittica la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di un angolo piatto, in geometria iperbolica è minore.*

È chiaro comunque che con la nascita di altre geometrie si esce dalla concezione euclidea sulla matematica: non si può più ritenere che i postulati siano *proprietà evidenti* e intuitive se si è disposti ad accettare postulati diversi sia pure in teorie diverse. In altre parole se pensiamo alla retta come a qualcosa di oggettivamente dato, allora di rette parallele a una data per un punto fuori di essa, o ne esistono o non ne esistono: se noi accettiamo più di una geometria con postulati e teoremi diversi, vuol dire che non consideriamo i postulati come enunciati evidenti, ma assumiamo un atteggiamento diverso.

Si arriva così alla seconda concezione sulla geometria che viene riassunta e chiarita da Hilbert. Si affrontano contemporaneamente il problema dei postulati e quello degli enti primitivi: *i postulati* – dice Hilbert – *vanno intesi solo come definizioni implicite degli enti primitivi.* Nel caso della geometria ad esempio, non occorre pensare al punto e alla retta come a concetti naturali, ma a qualsiasi classi di *enti che verifichino le proprietà espresse dai postulati.*

---

[1] Il termine parallela va inteso: « *senza punti in comune* ».

[2] La formulazione originaria di questo postulato è diversa, ma i due enunciati sono equivalenti.

In questo senso possiamo dare agli enti primitivi anche significati diversi da quelli più intuitivi: ad esempio possamo considerare un « *piano* » con *soli quattro* « *punti* » che denotiamo con le lettere *A, B, C, D,* chiamando « *retta* » le coppie di « *punti* » (si hanno quindi sei « *rette* » formate rispettivamente dai « *punti* » *AB, AC, AD, BC, BD, CD*). Questi enti soddisfano ai primi postulati della geometria euclidea: infatti per due punti distinti passa una e una sola retta (ad es. per i punti *B* e *D* passa la retta *BD*), per un punto passa una e una sola parallela a una retta non passante per il punto dato (ad es. considerata la retta*AB* e il punto *D*, la retta *CD* è quella cercata, perché passa per *D* ed è parallela alla retta *AB*, nel senso che non ha con questa punti in comune). Quindi possiamo senz'altro applicare anche a questa situazione alcuni teoremi noti della geometria, quelli che non dipendono dagli altri postulati che nel nostro caso non hanno senso (ad es. riguardanti la perpendicolarità di due rette).

Cambia a questo punto anche la visione della matematica: la matematica è ora una scienza che studia classi di oggetti qualsiasi, richiedendo soltanto che soddisfino a certe proprietà (postulati) e si propone di trovare le conseguenze più importanti (teoremi) dei postulati ammessi; naturalmente se *una qualsiasi famiglia di enti* soddisfa ai postulati verificherà anche i teoremi.

Sono almeno tre i vantaggi più evidenti di questa concezione di Hilbert rispetto a quella classica euclidea: innanzitutto maggior rigore, perché se può essere ragionevole ritenere che tutti sappiamo, più o meno, che cosa si intende per retta, ciò non è certo sufficiente per costruire una scienza sopra nozioni di questo genere. Inoltre i teoremi che si trovano hanno un più vasto campo d'applicazione: non precisando la natura degli oggetti che si studiano, lo stesso teorema, dimostrato una sola volta, potrà applicarsi a vari casi fra loro a prima vista nettamente diversi.

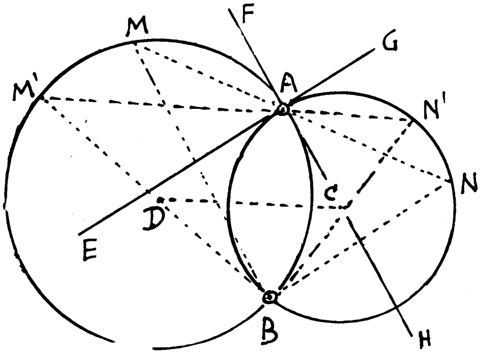
Infine si arriva, e questo è molto importante da un punto di vista più strettamente logico, a *una sistemazione coerente delle varie geometrie*; le geometrie non euclidee vanno accettate né più né meno di quella euclidea: soltanto la « retta di Euclide » è qualcosa di diverso (un ente con proprietà diverse) dalla « retta di Riemann »; in altre parole *le varie geometrie non si contraddicono a vicenda,* ma sono scienze che studiano oggetti distinti e possono quindi senz'altro sussistere senza contraddizioni.

* * *

C'è una cosa più importante delle più belle scoperte:
la conoscenza del metodo con cui esse sono state effettuate.

Goffredo Guglielmo Leibnitz

Il segmento MN avrà la massima larghezza in corrispondenza delle massime lunghezze dei lati BM e BN: ciò avviene quando questi lati sono diametri e di conseguenza quando MN $\perp$ AB.



Infatti detti M' ed N' gli estremi dei due diametri per B, M'N' passa per A, ché, in caso contrario, esisterebbero due rette distinte perpendicolari ad M'N', passanti per B (date dalle congiungenti il punto B con i punti di intersezione di M'N' con le circonferenze - non più coincidenti in A.

QUESTIONE 60

Dimostrare che il numero $N = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ è multiplo di 7 quando n è un numero intero (non negativo).

RISOLUZIONE *di Giampaolo Cecchetto di Ceregnano (Ro)*

Darò la dimostrazione seguendo il ragionamento per *ricorrenza* che si fonda sul seguente

TEOREMA: Sia $R\{n\}$ una relazione contenente una variabile $n \in \mathcal{N}$. Supposto che $R\{0\}$ sia vera e che la relazione

$$R\{n\} \Longrightarrow R\{n+1\}$$

sia vera per ogni $n \in \mathcal{N}$, allora $R\{n\}$ è vera per ogni $n \in \mathcal{N}$.

Ritornando al quesito proposto, verifico che per $n=0$ N è multiplo di 7. Infatti si ha:

" " $N = 3^1 + 2^2 = 3 + 4 = 7$.

Ammetto dunque che

$$N = 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7K \qquad (I)$$

essendo $K = 1; 2; 3; 4; \ldots$

Se ora dimostro che anche il numero $N = 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$ è multiplo di 7, posso affermare, in base al teorema premesso la veridicità della questione proposta.

Si ha infatti successivamente:

$$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = \dots = 3^2 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2} = 9 \cdot 3^{2n+1} + (9-7) \cdot 2^{n+2} =$$

$$= 9[3^{2n+1} + 2^{n+2}] - 7 \cdot 2^{n+2} = \quad \text{per la (I)}$$

$$= 9 \cdot 7K - 7 \cdot 2^{n+2} = 7(9K - 2^{n+2}). \qquad \text{c. v. d.}$$

***RISOLUZIONE** del Ten. G. S. di Udine.*

Dimostrazione per mezzo del PRINCIPIO DI INDUZIONE.

Si verifica facilmente che il numero $N = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ è multiplo di 7 per $n = 0; 1; 2$. Ammettiamo che lo sia per un certo valore di n e dimostriamo che lo è anche per $n+1$. Ammettiamo quindi che sia

(1) $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7K$ $\qquad$ K è un numero intero

e vogliamo dimostrare che sia anche

$$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 7h \qquad h \text{ è un numero intero}$$

Se è vera la (1) deve essere:

$$(2) \quad \begin{cases} 3^{2n+1} = 7r + \ell \\ 2^{n+2} = 7s + (7-\ell) \end{cases} \qquad \begin{cases} r, s \text{ sono numeri interi} \\ \ell = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. \end{cases}$$

Si ha quindi successivamente:

$$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 3^2 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2} = \quad \text{per le (2)}$$

$$= 9(7r + \ell) + 2[7s + (7-\ell)] = 9 \cdot 7r + \underline{9\ell} + 2 \cdot 7 \cdot s + 2 \cdot 7 - \underline{2\ell} =$$

$$= 9 \cdot 7 \cdot r + 7\ell + 2 \cdot 7 \cdot s + 2 \cdot 7,$$ che evidentemente è divisibile per 7.

GENERALIZZAZIONE.

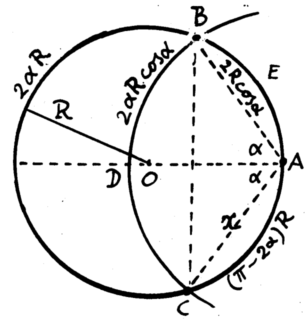
Il numero $a^{2n+1} + b^{n+2}$ è divisibile per $a^2 - b$, se $a^2 - b = a + b^2$, ovvero se $a^2 - b^2 = a + b$, ovvero (poichè $a + b \neq 0$) se $a - b = 1$, cioè se $\mathbf{b = a - 1}$.

Perciò la questione proposta è un caso particolare della seguente:

Il numero $a^{2n+1} + (a-1)^{n+2}$ è divisibile per $a^2 - (a-1)$, per qualsiasi valore di intero (non negativo) di n.

A pag. 16: un'altra RISOLUZIONE, *di G. Guarato.*

RUBRICA INTERMEDIARIO



DOMANDA 1

Un cerchio di raggio *R*, è diviso in due parti equivalenti da un arco di raggio *x*, che ha il centro sulla circonferenza data. Determinare il raggio *x*.

Sauro Amboni — Dalmine (BG)

Risoluzione di Carlo Cosimo Pasciuto di Roma al quale va assegnato il premio di L. 2000 elargito dallo stesso proponente Stud. Univ. Sauro Amboni.

Detto α l'angolo OAB (misura in radianti), l'area del settore circolare BACD è data da $4R^2\alpha\cos^2\alpha$ e l'area del segmento circolare ABE è data da

$$(\pi - 2\alpha)\cdot\frac{R^2}{2} - R^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

Si ha così l'equazione:

$$4R^2\alpha\cos^2\alpha + (\pi - 2\alpha)R^2 - 2R^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \pi\frac{R^2}{2},$$

e quindi semplificando:

$$4\alpha\cos 2\alpha - 2\operatorname{sen} 2\alpha + \pi = 0 \qquad (1)$$

Questa equazione può essere risolta per successive approssimazioni e si può ottenere α con l'approssimazione desiderata.

Ponendo $f(\alpha) = 4\alpha\cos 2\alpha + 2\operatorname{sen} 2\alpha + \pi$ si trova che

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0 \quad e \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$$

e quindi in prima approssimazione

$$(2) \quad \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3} \quad e \quad R < x < R\sqrt{2}.$$

Assegnando ad α valori decrescenti a cominciare da 60° si perviene ai seguenti risultati:

$$54°35' < \alpha < 54°36'$$

$$1{,}15856\,R < x < 1{,}15904\,R.$$

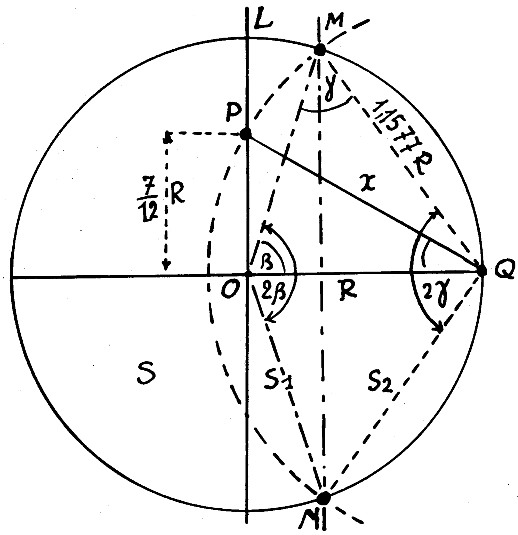
La stessa questione era stata proposta su ANGOLO ACUTO - PESARO, Prima serie-anno IV-1951 - pag. 389.

Allora ci era pervenuta la seguente:

RISPOSTA dell'Ing. M. Tamanini di Trieste:

La risoluzione teorica del problema è complessa e poco allettante.

Suggerisco perciò una costruzione pratica ed immediata, come indicato nella figura



Sul raggio OL, perpendicolare al raggio OQ, si fissa il punto P tale che sia $OP = 7R/12$ ed il segmento PQ è il raggio x cercato.

Difatti si ha: $R \, tag \, \alpha = 7R/12$ da cui $\alpha = 30° \, 59' \, 20''$,

$$PQ = \frac{R}{\cos \alpha} = 1,1577 \, R.$$

Risolvendo il triangolo isoscele OMQ di cui sono noti i tre lati si ricava $\beta = 70° \, 44' \, 20''$ e $\gamma = 54° \, 37' \, 50''$.

Gli angoli al centro dei segmenti circolari $\widehat{MPNM} = S_1$ e $\widehat{MQNM} = S_2$ sono pertanto $2\beta = 141° \, 28' \, 40''$ e $2\gamma = 109° \, 15' \, 40''$.

Con l'ausilio delle tabelle (p. es. Colombo, tab. 9) si ottengono le aree dei due segmenti circolari la cui somma dovrebbe essere eguale alla metà dell'area del cerchio di raggio R.

Nel caso nostro, assumendo R come unità, abbiamo:

$$\begin{array}{lr} & S_1 = 0{,}64541 \\ & S_2 = 0{,}92334 \\ \hline & S_1 + S_2 = 1{,}56875 \\ \text{l'area del semicerchio} & S = 1{,}57080 \\ \hline \text{DIFFERENZA} & = 0{,}00205 \end{array}$$

Tale differenza rappresenta appena uno scarto dello 0,125% in difetto rispetto alla misura esatta e non è praticamente sensibile.

Si potrebbe per tentativi avvicinarsi ancor più al risultato esatto ma ritengo che ciò sciuperebbe l'estrema semplicità della risoluzione suggerita.

Un'altra costruzione pratica ma meno precisa è quella di segnare il vettore PQ a 30° sul diametro del cerchio R.

Lo scarto ammonta in questo caso allo 0,555% in difetto sulla misura esatta.

Rischiatutto

Qual è il NOME dato al numero formato da 1 seguito da CENTO ZERI – cioè alla potenza 10^{100} – scritto nella numerazione decimale?

RISPOSTA A PAG. 16.

RISOLUTORI DELLE QUESTIONI	56	57	58	59	60
AGROSI ANIELLO - DISO (LE)	●	●	●	●	●
CECCHETTO GIAMPAOLO - CEREGNANO (RO)	●	–	–	–	–
FRANCO GIORGIO - PADOVA	–	●	●	●	–
FRIGERIO EMMA - L. Sc. « Einstein » MILANO	●	●	●	●	●
GRAZZINI ELISABETTA - FIRENZE	●	●	–	–	–
GUARATO GIUSEPPE - VADAGNO (VI)	●	●	●	●	●
MILANI CARLA - Ist. Magistr. CASERTA	–	●	–	●	–
ROSSELLI ARMANDO - ROVIGO	●	–	●	●	●
ROSSI FERNANDO - L. Cl. « Dante » FIRENZE	●	●	●	●	–
ZILIO SONIA - L. Cl. « T. Livio » PADOVA	●	●	●	●	●
FOGLIOTTI FRANCESCO - GENOVA-Sampierd.	●	●	●	●	●
IMPERATO CIRO - ROMA	●	●	●	●	●

continuazione QUESTIONE 60 - da pag. 12.

RISOLUZIONE di G. Guarato di Valdagno.

Si può scrivere: $N = 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3 \cdot 9^n + 4 \cdot 2^n =$

$$= 3(7+2)^n + 4\cdot 2^n = 3\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}7^{n-i}\cdot 2^i + 4\cdot 2^n =$$

$$= 3\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}7^{n-i}2^i + 3\cdot 2^n + 4\cdot 2^n = 7\left\{3\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}7^{n-1-i}2^i + 2^n\right\}.$$

Ciò prova che N è multiplo di 7.

Domanda "Rischiatutto" (vedi pag. 15) *RISPOSTA: - UN GOOGOL -*

AMICI di "ANGOLO ACUTO"

BENEMERITI

Prof. Asprella Vincenzo - MATERA
Prof. La Paglia Alfonso - BIELLA (VC)
Prof. Ing. Masini Dino - PAVIA
Prof. Mosca Giulio - TERAMO

SOSTENITORI

Prof. Bignami Rosetta - CREMONA
Prof. Castaldo Pietro - CITTA' DI CASTELLO (Pg)
Dott. Caselli Cecilia - FIRENZE
Prof. Dall'Oca Carla - BOLOGNA
Prof. De Finetti Bruno - ROMA
M° Guarato Giuseppe - VALDAGNO (Vi)
Prof. Giacconi Canni Elsa - MILANO
Prof. La Fata Giovanni - TRAPANI
Prof. Liverani Tebaldi - FIRENZE
Classe III A - L. Scient. - LA SPEZIA
Prof. Maggio Oreste - PALERMO
Prof. Maggi Alessandro - FIRENZE
Prof. Nobile Carolina - NAPOLI
Prof. Ottaviani Riccardo -- ROMA
Prof. Piegai Luisa - MILANO
Prof. Palmieri Sabina - ERCOLANO (Na)
Prof. Palumbo Annunziata - NAPOLI
Dott. Prampolini Costante - REGGIO EMILIA
Prof. Rizzi Bruno - ROMA
Prof. Rivelli Bargero Elsa - TORINO
Prof. Spilimbergo Luigia - ODERZO (Tv)
Prof. Serra Mario - TORINO
Prof. Sandroni Franco - PISA
Prof. Sestini Giorgio - FIRENZE
Prof. Signorini Maria - FIRENZE
Sig. Toninelli Francesco - TORINO

ANGOLO ACUTO rivolge un vivo appello alle Autorità Scolastiche ed ai Dirigenti di Case Editrici e di Enti vari perchè vogliano inviarci premi da assegnare ai Giovani che avranno maggiormente impegnato le loro forze intellettuali nelle interessanti gare proposte nella PALESTRA e nelle varie rubriche.

DIFFONDETE "ANGOLO ACUTO" RICHIEDETECI COPIE DI SAGGIO PER I VOSTRI AMICI O INVIATECI I LORO INDIRIZZI ESATTI

A chi ci procurerà DIECI nuovi abbonati invieremo l'abbonamento gratuito.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 gennaio 1970
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso.*
Stampato dalla Tipolitografia Gino Capponi" Via G.Capponi, 27 - Firenze

Associato all'USPI
Unione Stampa Periodica Italiana