L'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

ANNO III - 1972

marzo-aprile

2

Periodico bimestrale
a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

spedizione in abb. postale - gruppo IV
conto corrente postale 5/27919

ABBONAMENTI PER IL 1972

Studenti	L.	1 200
Abb. ordinario	L.	1 500
" sostenitore	L.	3 000
" benemerito	L.	5 000

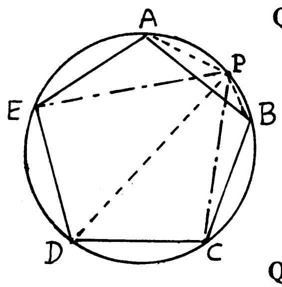
L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio.

LA PALESTRA DELLE GARE

QUESTIONI PROPOSTE

(Non sono poste in ordine di difficoltà)

Avvertenze per i risolutori a pag. 16



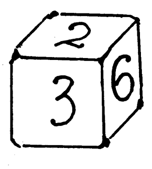
QUESTIONE 100

Siano A, B, C, D, E i vertici di un **pentagono regolare** inscritto in una circonferenza e sia P un punto qualunque dell'arco AB. Dimostrare che si ha:

$$PC + PE = PA + PB + PD.$$

QUESTIONE 101

In quanti modi diversi possono essere segnati i numeri 1, 2, 3, 4, 5 e 6 sulle facce di un dado, con la sola condizione che 1 e 6, 2 e 5, 3 e 4, siano su facce opposte?



Marco Barlotti

QUESTIONE 102

Determinare il numero delle intersezioni interne determinate dalle poligonali di un poligono convesso di n lati.

Esistono poligoni convessi aventi il numero delle diagonali uguale a quello delle intersezioni interne determinate dalle stesse diagonali?

G. C.

QUESTIONE 103

Tutte le sezioni di una sfera sono circolari.

Ma è anche vero, inversamente, che una superficie avente tutte le sezioni circolari è necessariamente una sfera?

Per poter rispondere SI occorre indicare una dimostrazione.

Per poter rispondere NO basta trovare un controesempio.

– *Quesito proposto alla* GARA MATEMATICA NAZIONALE della MATHESIS - *1971.*

QUESTIONE 104

Dimostrare che se p e q sono numeri interi dispari, l'equazione

$$x^n + 2px + 2q = 0$$

non ha radici razionali ($n = 0; 1; 2; 3; 4;\ldots$)

– Da un quesito proposto agli esami di ammissione alla Scuola Normale Superiore di Pisa - 1971.

QUESTIONE 105

Si consideri il numero ottenuto moltiplicando tra loro tutti gli interi da 1 a 10 000, (il cosidetto *fattoriale* di 10 000 = 10 000 ! = 1 • 2 • 3 • 4 • 5 • .... • 10 000).

Quante volte vi è contenuto come fattore il numero 7?

Quesito proposto alla GARA MATEMATICA NAZIONALE della MATHESIS - 1971.

QUESTIONE 106

Scomporre un triangolo equilatero in 5 parti con le quali si possono ricomporre:

a) *due triangoli equilateri* ; b) *tre triangoli equilateri.*

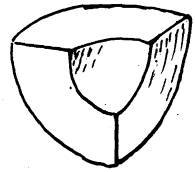
Nota: Nelle due ricostruzioni, alcune delle parti componenti del triangolo originario possono essere ribaltate.

Marco Barlotti

RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 61

Una sfera cava (solido limitato da due superficie sferiche aventi lo stesso centro) è stata tagliata in otto parti uguali con tre piani passanti per il centro e, due a due, perpendicolari fra loro.



Il raggio della sfera esterna è doppio del raggio della sfera interna.

Determinare le misure dei due raggi, sapendo che l'area della superficie totale di una delle otto parti è

$$19\pi a^2.$$

RISOLUZIONE
di *Sonia Zilio* del Liceo Scient. "Einstein" di Milano

Indicando con x il raggio della sfera interna, il raggio della sfera esterna è $2x$.

L'area della superficie totale del solido in esame è data dalla somma delle tre aree:

1/8 area della superf. sfera interna = $\pi x^2/2$
1/8 area della superf. sfera esterna = $2\pi x^2$
3/4 area della corona circolare = $9/4 \cdot \pi x^2$

Si ha quindi l'equazione risolvente:

$$\frac{\pi}{2} r^2 + 2\pi r^2 + \frac{9}{4}\pi x^2 = 19\pi a^2.$$

Risolvendo e scartando la radice negativa si ha:

x = 2a (raggio sfera interna)

Il raggio della sfera esterna è 4a.

QUESTIONE 62

CRIPTARITMETICA..... FACILE

Ricostruire la moltiplicazione :

N N N ×
N N
★ ★ ★
★ ★ ★
★ ★ ★ ★ ★

RISOLUZIONE
di *Miriam Pescini* dell'Ist. Magistr. "V. Gambara" di Brescia.

Siccome i prodotti parziali sono di tre cifre deve essere $N^2 \leqslant 9$ e quindi $N \leq 3$.

Ma non può essere $N < 3$, ad esempio $N = 2$, perchè il prodotto $NNN \cdot NN$ sarebbe un numero di *quattro* cifre e non di *cinque.*

Quindi $N = 3$ e l'operazione ricostruita è

$$\begin{array}{r} 333\times \\ 33 \\ \hline 999 \\ 999 \\ \hline 10989 \end{array}$$

QUESTIONE 63

Risolvere la seguente equazione logaritmica:

$$\lg_3 x = \lg_9 x + 4.$$

RISOLUZIONE
di *Giulio Mosca* di Teramo.

Tenendo presente l'identità $\lg_b a = \lg_{b^n} a^n$ l'equazione data può scriversi:

$$\lg_9 x^2 - \lg_9 x = 4 \ ,$$

da cui, operando successivamente, si ha:

$$\lg_9 \frac{x^2}{x} = 4 \ ;$$

(e poichè è ovviamente $x > 0$)

$$\lg_9 x = 4 \ ;$$

cioè $x = 9^4 = 6561$.

QUESTIONE 64

Marco nacque nel giorno di un compleanno del padre. L'età del padre corrisponde oggi, compleanno di entrambi, ai 7/3 della età del figlio, mentre due anni fa, l'età del figlio era uguale ai 2/5 dell'età del padre.

Fra quanti anni l'età del padre sarà doppia dell'età del figlio?

RISOLUZIONE
di *Sonia Zilio* dell' L. Cl. "T. Livio" di Padova.

Oggi l'età di Marco è x; l'età del padre è $\frac{7}{3} \cdot x$;
due anni fa l'età di Marco era $x - 2$; l'età del padre era $\frac{7}{3} x - 2$.

Ne segue l'equazione:

$$x - 2 = \frac{2}{5}\left(\frac{7}{3}x - 2\right);$$

da cui, risolvendo, $x = 18$ (anni), età di Marco, oggi.

L'età del padre è, oggi $\frac{7}{3} \cdot 18 = 42$ (anni)

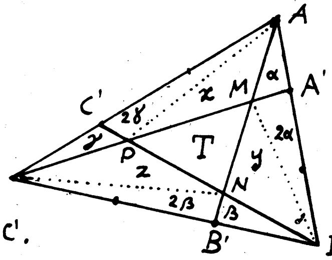
***

Se fra y anni l'età del padre sarà doppia dell'età del figlio si avrà.

$$42 + y = 2(18 + y) \Rightarrow y = 6.$$

cioè fra 6 anni l'età del padre (48 anni) sarà doppia dell'età del figlio (24 anni).

QUESTIONE 65



ABC è un triangolo qualsiasi e si sa che:

$$\overline{AA'} = \frac{\overline{AB}}{3}; \quad \overline{BB'} = \frac{\overline{BC}}{3}; \quad \overline{CC'} = \frac{\overline{CA}}{3};$$

$$M = AB' \cap CA'; \quad N = AB' \cap BC'; \quad P = CA' \cap BC'.$$

Calcolare il rapporto fra la superficie del triangolo MNP e quella del triangolo ABC.

RISOLUZIONE
di *Emma Frigerio* del L. Sc. "Einstein" Milano.

Dai dati del problema, si ha subito:

$$ABB' \doteq ABC/3; \quad BCC' \doteq ABC/3; \quad CAA' \doteq ABC/3$$

Sarà quindi $ABB' + BCC' + CAA' \doteq ABC$.

Si osservi che, sommando i tre triangoli ABB', BCC', CAA', vengono considerati *due volte* i tre triangoli:

$$AA'M \doteq \alpha; \quad BB'N \doteq \beta; \quad CC'P \doteq \gamma,$$

mentre *non viene* considerato il triangolo $MNP \doteq T$; ne segue

$$T \doteq \alpha + \beta + \gamma. \qquad (1)$$

Congiunti ora

M con B, N con C, P con A

si ottiene: $A'BM \doteq 2\alpha$; $B'CN \doteq 2\beta$; $C'AP \doteq 2\gamma$.

Inoltre si ha:

$$PBA' \doteq 2 \cdot PAA'; \quad MCB' \doteq 2 \cdot MBB'; \quad NAC' \doteq 2 \cdot NCC'.$$

Queste tre equivalenze, ponendo

$$AMP = x, \quad BNM = y, \quad CPN = z.$$

danno luogo al sistema:

$$\begin{cases} T + y + 2\alpha \doteq 2(x+\alpha) \\ T + z + 2\beta \doteq 2(y+\beta) \\ T + x + 2\gamma \doteq 2(z+\gamma) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T + y \doteq 2x \\ T + z \doteq 2y \\ T + x \doteq 2z \end{cases} \qquad (2)$$

da cui, sommando membro a membro, e semplificando si ha:

$$x + y + z = 3T \qquad (3)$$

Osservando ora il triangolo ABC e tenendo conto della (1) e della (3) si ha:

$$ABC \doteq 3\alpha + 3\beta + 3\gamma + T + x + y + z \doteq$$
$$\doteq 3T + T + 3T \doteq 7T;$$

ne segue: $$T = MNP \doteq \frac{1}{7} ABC.$$

OSSERVAZIONE. Risolvendo il sistema (2) si ottiene $x \doteq T$; $y \doteq T$; $z \doteq T$ e se ne deducono le uguaglianze

$$AM = MN; \quad BN = NP; \quad CP = PM.$$

per cui i punti M, N, P, risultano rispettivamente punti medi dei segmenti AN, BP, CM.

Nota della Redazione: Alcuni risolutori hanno ammesso questa conclusione *a priori*, senza una dimostrazione rigorosa.

L'Angolista F. Fogliotti ha inviato tre risoluzioni *(una analitica)*. Gli Angolisti A. La Paglia e C. Imperato hanno *generalizzato* la questione ponendo

$$AA' = AB/K; \quad BB' = BC/K; \quad CC' = CA/K$$

ed hanno determinato il rapporto $$\frac{S(MNP)}{S(ABC)} = \frac{(K-2)^2}{K^2-K+1}$$

QUESTIONE 66

Data la circonferenza avente il centro nel punto C (O; 7a) e il raggio uguale ad *a* determinare il LUOGO GEOMETRICO dei centri delle circonferenze tangenti alla suddetta circonferenza e tangenti all'asse delle ascisse.

RISOLUZIONE
di *Giorgio Franco* di Padova

vedi figura a pag. 8

Detto P (x, y) il centro di una qualsiasi circonferenza soddisfacente alle condizioni poste, la distanza di P dall'asse x è y, e anche la distanza di P dal punto di tangenza fra le due circonferenze è y. Sicchè la distanza PC è costantemente uguale a

$y + a$ se le due crf. sono tangenti internamente l'una all'altra

$y - a$ se le due crf. sono tangenti esternamente

Esprimendo PC in funzione delle coordinate di P e di C si ha:

$$\overline{PC} = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2} = \dots = \sqrt{x^2 + y^2 - 14ay + 49a^2}.$$

Esaminando i due casi separatamente si ha:

$$y + a = \sqrt{x^2 + y^2 - 14ay + 49a^2}$$

$y + a > 0$; [la minima distanza tra un punto della crf. di centro C e l'asse x è la 6a, per cui il raggio minimo della crf. col centro giacente sul luogo cercato è 3a] Pertanto elevando al quadrato e semplificando si ha l'equazione:

$$y = \frac{x^2}{16a} + 3a \,. \quad (I)$$

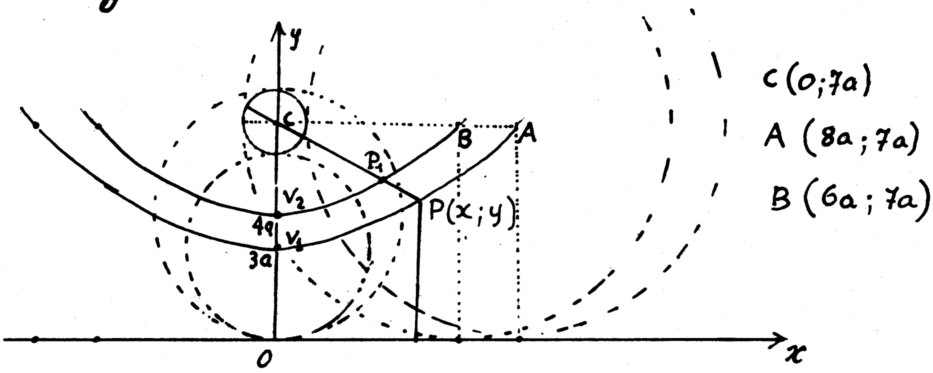
$$y - a = \sqrt{x^2 + y^2 - 14ay + 49a^2}$$

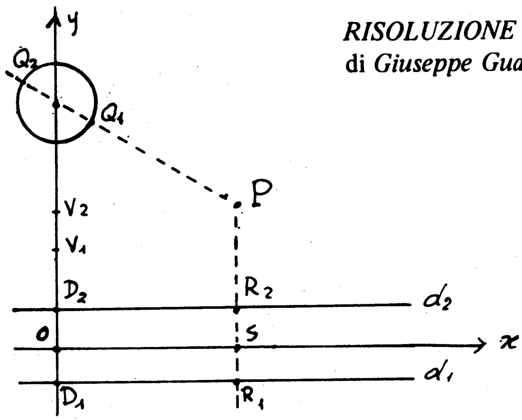
$y - a > 0$; [il diametro minimo della crf. col centro giacente sul luogo cercato e soddisfacente alle condizioni di tangenza risulta 8a]

Pertanto elevando al quadrato e semplificando si ha l'equazione :

$$y = \frac{x^2}{12a} + 4a \,. \quad (II)$$

Quindi il luogo geometrico richiesto è dato dalle due parabole di equazione I e II.





RISOLUZIONE
di *Giuseppe Guarato* di Valdagno (Vi).

Se P è uno di tali centri, detti Q_1 e Q_2 le intersezioni della circonferenza $C(0; 7a)$ con la PC ($PQ_1 < PQ_2$) ed S la proiezione di P sull'asse x, deve essere:

$$1)\ \begin{cases} \overline{PQ_1} = \overline{PS} \\ PQ_2 = PS \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad 2)\ \begin{cases} \overline{PC} = \overline{PR_1} \\ \overline{PC} = PR_2 \end{cases},$$

dove R_1 e R_2 sono punti simmetrici rispetto ad S sulla PS e distanti da S del segmento a con $R_1P > R_2P$.

Tali punti stanno ovviamente sulle rette di equazioni:

$$d_1)\quad y = -a; \qquad d_2)\quad y = a \quad .$$

Il luogo dei centri P è dato per la 2) da due parabole omofocali (fuoco comune C) e di direttrici d_1 e d_2. I parametri delle due parabole sono dati da $\overline{D_1C} = p = 8a$; $\overline{D_2C} = p_2 = 6a$ e i vertici hanno per coordinate V_1 (0; 3a), V_2 (0; 4a);

Se ne deducono le due equazioni (I) e (II) — vedi prima risoluzione.

RISOLUZIONE
di *Francesco Fogliotti* di Genova

Occorre che la distanza dei centri sia uguale alla $\left|\begin{smallmatrix}\text{somma}\\\text{differenza}\end{smallmatrix}\right|$ dei raggi e che l'ordinata del centro richiesto sia uguale al rispettivo raggio della crf. variabile. Siano x, y le coordinate del centro variabile; dovrà essere:

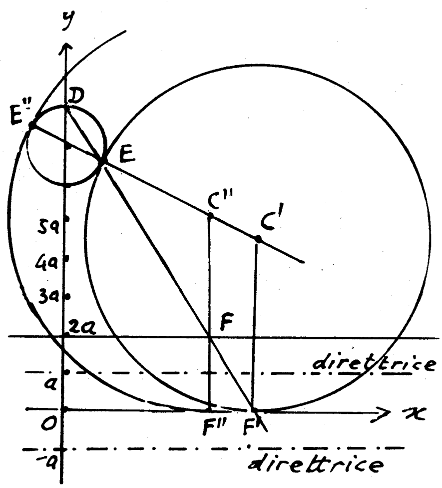
Distanza dei centri = $\left|\begin{matrix}\text{somma}\\\text{differenza}\end{matrix}\right|$ dei raggi.

$$(x-0)^2+(y-7a)^2=(y\pm a)^2;$$
$$x^2+y^2-14ay+49y^2=y^2\pm 2ay+a^2,$$

da cui seguono ancora le (I) e (II).

COSTRUZIONE GEOMETRICA

I centri delle circonferenze richieste devono essere equidistanti dall'asse x e dalla crf. data; ora ciò si può ottenere facilmente conducendo dal punto D (0; 8a) un'obliqua qualsiasi che intersechi in E la crf. data e in F e F′ rispettivamente la retta di equazioni $y=2a$ e l'asse x. Le intersezioni delle perpendicolari all'asse x da F e F′ con la congiungente i punti C ed E (cioè C′ e C″) sono i centri di due crf. tangenti esternamente e internamente; i punti E ed F′ ed ancora E″ ed F″ sono i punti di tangenza.



DIMOSTRAZIONE

I triangoli CDE; EC′F′; EC″F′ sono in posizione omotetica di centro E e pertanto *simili*.

poichè $C\hat{D}E$ è isoscele (CD = CE), saranno anche *isosceli*:

il triangolo $EC'F'$ $(\Rightarrow EC'=C'F')$
e il triangolo $EC''F$ $(\Rightarrow EC''=C''F)$;
ma è anche: $EE''=FF''(=2a)$;

quindi, sommando membro a membro le ultime due uguaglianze, si ha:
$$EC'' + EE'' = C''F + FF'' ,$$
cioè
$$C''E'' = C''F'' .$$

Variando l'obliqua passante per D si ottiene il luogo geometrico richiesto.

Una delle crf. tangenti $\left| \begin{matrix} \text{internamente} \\ \text{esternamente} \end{matrix} \right|$ ha il centro nel punto $\left| \begin{matrix} 0;3a \\ 0;4a \end{matrix} \right|$.

Conducendo la retta $\left| \begin{matrix} y=-a \\ y=+a \end{matrix} \right|$ tutti i centri richiesti devono essere equidistanti da C (fuoco) e da questa retta (direttrice).

Pertanto il luogo geometrico dei centri è costituito da due parabole di vertice $\left| \begin{matrix} 0;3a \\ 0;4a \end{matrix} \right|$ e parametro $2p = \left| \begin{matrix} 16a \\ 12a \end{matrix} \right|$ .... e si ritrovano le I e II.

Nel prossimo fascicolo sarà pubblicata una RISOLUZIONE TRIGONOMETRICA GENERALIZZATA: $C \equiv (0;c)$; raggio $= r$; $c \geq r$.

LA RISOLUZIONE DELLA QUESTIONE 67 E' RIPORTATA A PAG. 11

QUESTIONE 68

Un cubo di 9 cm di lato, dipinto di rosso su tutte le facce, viene diviso in 27 cubetti di 3 cm di lato. Quanti di questi cubetti saranno dipinti su tre 3 facce, su 2, su 1, su nessuna? Come avete risolto il problema, con un disegno o con l'immaginazione?

Assegnato dalla Mathesis (sezione di Cosenza) Gara Matem. Scuola di 1^grado - 1971.

RISOLUZIONE
di Marco Barlotti del L. Cl. "Galileo" di Firenze.

Gli **8** cubetti ai vertici del cubo (uno per vertice) risulteranno dipinti su **3** facce.

I **12** cubetti sugli spigoli ma non ai vertici (uno per spigolo) risulteranno dipinti su **2** facce.

I **6** cubetti che appaiono nelle facce ma non sugli spigoli (uno per faccia), risulteranno dipinti su **UNA** faccia.

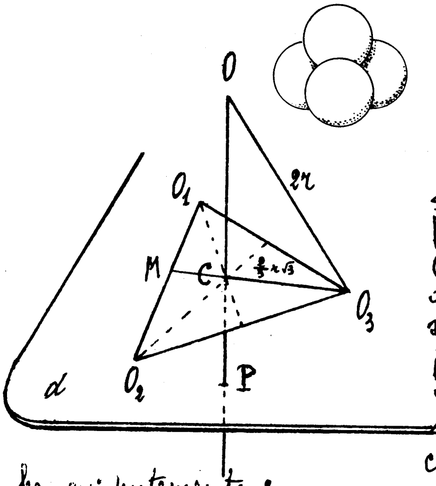
Resta **UN** cubetto, completamente interno, dipinto su **NESSUNA** faccia.

QUESTIONE 67 *Le quattro bocce*

Si pongano tre bocce sferiche di raggio r su un piano orizzontale in modo che ciascuna tocchi le altre due. Si ponga una quarta boccia di raggio r sul gruppo delle prime tre.

A quale distanza dal piano orizzontale si troverà il centro della quarta boccia?

RISOLUZIONE



Nel piano determinato dai centri O_1, O_2, O_3 delle bocce poste su un piano d orizzontale e a questo parallelo, si consideri il triangolo equilatero avente per vertici detti centri ed il lato uguale a 2r. - Siano O il centro della quarta boccia posta sul gruppo delle prime tre e C il baricentro del triangolo considerato. - La retta OC, perpendicolare ai due piani, incontra il piano d nel punto P. - Si unisca O con uno dei tre centri, es. O_3, e si conduca la mediana O_3M. - Il triangolo OCO_3, così ottenuto, è rettangolo in C ed ha, evidentemente:

$$\overline{OO_3} = 2r, \quad \overline{O_3C} = \frac{2}{3}\overline{O_3M} = \frac{2}{3}\frac{2r\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}r\sqrt{3}, \quad \text{quindi}$$

$$\overline{OC} = \sqrt{(2r)^2 - \left(\frac{2}{3}r\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4r^2 - \frac{4}{3}r^2} = \sqrt{\frac{8r^2}{3}} = 2r\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Poichè risulta $\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{CP}$, tenendo presente che $\overline{CP} = r$, si ottiene:

$$\overline{OP} = \frac{2}{3}r\sqrt{6} + r = \frac{2r\sqrt{6}+3r}{3} = r\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}+1\right)$$

che è la distanza cercata. —

Giulio Mosca
viale F. Crispi, 95 - TERAMO - 64100

PUBBLICHEREMO VOLENTIERI "GLI ORIGINALI" DELLE RISOLUZIONI ESATTE E NON PROLISSE, CHE CI PERVERRANNO SCRITTE CHIARAMENTE SU FOGLI SEPARATI, CON INCHIOSTRO NERO DI CHINA.

Dal teorema di Pitagora ai due teoremi di Euclide per via algebrica.

Indichiamo con m ed h ordinatamente le misure, rispetto alla medesima unità, della mediana AO e dell'altezza AD relative alla ipotenusa di misura a [rispetto alla stessa unità] del triangolo rettangolo ABC e poniamo OD = k, BD = x, onde è DC = a − x (1).

Essendo BC il diametro della crf. circoscritta al triangolo considerato è

$$m = AO = OB = OC = \frac{a}{2},$$

e quindi il triangolo rettangolo ODA, per il *teorema metrico* di PITAGORA dà:

$$k = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - h^2}.$$

Per conseguenza è

$$x = BD = BO - k = \frac{a}{2} - k = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - h^2},$$

da cui segue che

$$\frac{a}{2} - x = \sqrt{\frac{a^2}{4} - h^2},$$

e quadrando:

$$\frac{a^2}{4} + x^2 - ax = \frac{a^2}{4} - h^2,$$

la quale fornisce súbito

$$h^2 = ax - x^2 = x(a - x), \qquad (1)$$

ed esprime nella forma metrica il 2° *teorema* di EUCLIDE.

Il teorema metrico di PITAGORA applicato al triangolo rettangolo ABD dà poi:

$$c^2 = h^2 + x^2.$$

la quale, per la (1), si scrive

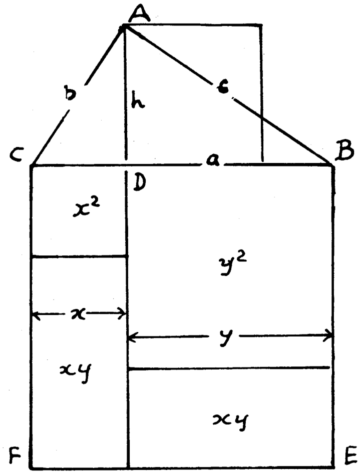
$$c^2 = x(a - x) + x^2 = ax,$$

e questa esprime nella forma metrica il 1° *teorema* di EUCLIDE.

BRUNO PARISI.
[*Reggio Cal.*]

(1) Il Lettore è pregato di disegnare la semplice figura.

LA NOTA DIDATTICA qui riprodotta, apparsa a pag. 177 del num. 4 del BOLLETTINO della Società Matematica Calabrese (Liceo Scientifico di Reggio Cal.) ci suggerisce di risolvere la stessa questione, più semplicemente, per via geometrica.



Con riferimento alla figura, per il teor. di PITAGORA, dal tr. rett. ABC si ha: $a^2 = b^2 + c^2$;
e dai tr. rett. ADC e ABD $a^2 = h^2 + x^2 + h^2 + y^2$

ovvero $a^2 = 2h^2 + x^2 + y^2$. (I)

Inoltre, dal quadrato CBEF, si ha

$a^2 = 2xy + x^2 + y^2$ (II)

e dal confronto delle I e II

$\boxed{h^2 = xy}$ (II TEOR. DI EUCLIDE). (III)

Inoltre, dal triang. rettangolo ACD, sempre per il teor. di PITAGORA, si ha $b^2 = x^2 + h^2$ e per la III,

$b^2 = x^2 + xy = (x + y)x$, ovvero

$\boxed{b^2 = ax}$

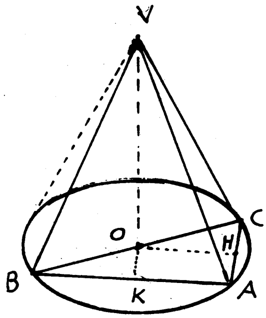
I TEOR. DI EUCLIDE

TEMA DI MATEMATICA ASSEGNATO AGLI ESAMI DI MATURITA' MAGISTRALE NELLA SESSIONE SUPPLETIVA 1971.

Un tetraedro ABCV si è ottenuto da un cono circolare retto, avente il raggio di base r e l'altezza h, secando il cono con tre piani passanti per il vertice V. Di tali piani, uno contiene il diametro **BC** del cerchio di base e uno stacca su quest'ultimo una corda che è i 10/13 di r.

Si esprimano per mezzo di r e di h:

a) le lunghezze dei sei spigoli;
b) le aree delle quattro facce;
c) il volume del tetraedro.



RISOLUZIONE
di *F. Fogliotti* di Genova-Samp. e
di *G. Guarato* di Valdagno (Vi).

La faccia VBC del tetraedro descritto dall'enunciato è perpendicolare alla base del cono circolare retto; si deduce che $\overline{VO} = h$ e che il tetraedro in esame *non è* un tetraedro *retto*.

Dai dati: $\overline{BC} = 2r$; $\overline{AC} = \frac{10}{13}r$; si deduce $\overline{VA} = \overline{VB} = \overline{VC} = \sqrt{r^2 + h^2}$. Poichè BC è un diametro l'angolo BAC è retto. Ne segue, per il teorema di Pitagora:

$$AB = BC^2 - AC^2 = (2r)^2 - \left(\frac{10}{13}r\right)^2 = \cdots = \frac{24}{13}r .$$

Si ha inoltre

$$OH \perp AC \implies VH \perp AC,$$
$$OK \perp AB \implies VK \perp AB,$$

quindi VH e VK sono rispettivamente le altezze delle facce laterali VAC, VAB .

$$\overline{OH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{12}{13}r \; ; \qquad \overline{OK} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{5}{13}r \; ;$$

$$\overline{VH} = \sqrt{\overline{VO}^2+\overline{OH}^2} = \frac{1}{13}\sqrt{169h^2+144r^2}\,; \quad \overline{VK} = \sqrt{\overline{VO}^2+\overline{OK}^2} = \frac{1}{13}\sqrt{169h^2+25r^2}.$$

Le aree delle quattro facce sono rispettivamente :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{13}r\cdot\frac{24}{13}r = \frac{120}{169}r^2 ; \qquad S_{VBC} = \frac{1}{2}\cdot 2r\cdot h = rh .$$

$$S_{VAC} = \cdots = \frac{5}{169}r\sqrt{169h^2+144r^2} \; ; \quad S_{VBC} = \cdots = \frac{12}{169}r\sqrt{169h^2+25r^2}$$

Il volume della piramide è $\quad V = \frac{1}{3}\cdot\frac{120}{169}\cdot r^2h = \frac{40}{169}r^2h .$

RUBRICA INTERMEDIARIO

DOMANDA 2

Si chiede di dimostrare se la seguente affermazione è vera o falsa:

"Se due numeri interi sono primi con 7, la somma dei loro cubi (o la loro differenza) è multipla di 7".

Hanno inviato risposte soddisfacenti:

Giulio Mosca di Teramo, Giuseppe Guarato di Valdagno e Fernando Rossi del L. Cl. "Dante" di Firenze.

Pubblichiamo le risposte dei primi due che, ci sembra, si completino vicendevolmente.

RISOLUZIONE
di G. Mosca

I numeri interi primi con 7 possono essere indicati con i seguenti binomi aritmetici:
$7K + 1$; $7K + 2$; $7K + 3$; $7K + 4$; $7K + 5$; $7K + 6$ in cui K è un numero intero qualunque zero compreso.

Se con n si indica un numero intero positivo che varia da 1 a 6, i binomi possono essere sintetizzati con la scrittura $7K + n$. Presi comunque due numeri di detta forma, la somma e la differenza dei cubi di due numeri interi primi con 7, si possono scrivere:

$$(7K + n_1)^3 + (7K + n_2)^3 \quad (1)$$
$$(7K + n_1)^3 - (7K + n_2)^3. \quad (2)$$

Facilmente si può verificare, sviluppando i cubi, che la (1) è multiplo di 7 se lo è la somma $n_1^3 + n_2^3$, e la (2) è multipla di 7 se lo è la differenza $n_1^3 - n_2^3$. L'uno dei casi esclude l'altro, infatti se fosse

$$n_1^3 + n_2^3 = 7K_1$$
$$n_1^3 - n_2^3 = 7K_2$$

dovrebbe aversi:

$$2\, n_1^3 = 7\,(K_1 + K_2)$$

il cui secondo membro deve contenere 2 come fattore, perciò ponendo $K_1 + K_2 = 2\,Z$, si può scrivere: $2\, n_1^3 = 7 \cdot 2\, Z$ cioè: $n_1^3 = 7 \cdot Z$.

Ciò è assurdo, essendo $1 \leqslant n \leqslant 6$, con $n \in N$.

Ora, prendendo in considerazione tutti i casi possibili, dando ad n valori da 1 a 6 (con $n_1 \neq n_2$), si trova che o la somma $n_1^3 + n_2^3$ o la differenza $n_1^3 - n_2^3$ è multipla di 7.

Quindi, l'affermazione di cui alla domanda è vera.

RISOLUZIONE
di *G. Guarato.*

L'affermazione è vera nel senso che lo è la somma o la differenza, mai entrambe contemporaneamente.

Infatti dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $a; b \in A$ con $a > b$, e detti $a - b = d$, $a + b = s$ e $ab = p$, escludendo i casi in cui sia $s = 7$, risulta

$$a^3 + b^3 = s(s^2 - 3p) \; ; \quad a^3 - b^3 = d(d^2 + 3p)$$

Si può formare il seguente quadro.

a	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	6
b	1	1	2	1	2	1	3	4	2	3	4	5
s	3	4	5	5	6	6	8	9	8	9	10	11
d	1	2	1	3	2	4	2	1	4	3	2	1
3p	6	9	18	12	24	15	45	60	36	54	72	90
$s^2 - 3p$	3	7	7	13	12	21	19	21	28	27	28	31
$d^2 + 3p$	7	13	19	21	28	31	49	61	52	63	76	91

Dall'esame del quadro appare che o $a^3 + b^3$ o $a^3 - b^3$ è multiplo di 7 e mai tali eventi si verificano contemporaneamente. Se ora $x = 7m + a$ e $y = 7n + b$ con $a; b \in A$ e $m; n \in N$, e supposto $x > y$, si ha:

$$x^3 \pm y^3 = 7^3(m^3 \pm n^3) + 3 \cdot 7^2(m^2 a \pm n^2 b) + 3 \cdot 7(m a^2 \pm n b^2) + a^3 \pm b^3,$$

la quale dimostra, tenuti presenti i risultati del quadro, la verità dell'affermazione.

RISOLUTORI DELLE QUESTIONI 61-68

Agrosi A. DISO (tutte); Franco G. PADOVA (61-65); Mosca G. CAVARZERE (61-66); Mosca G. TERAMO (61-66); Rossi F. L.Cl. "Dante" FIRENZE (61-64 e 68); Bonanno R. L.Sc. COSENZA (61-66); Barlotti M. FIRENZE (61-67); Guarato G. VALDARNO (tutte); Zilio S. L.Cl. PADOVA (61-64 e 66-68); Frigerio E. L.Sc. MILANO (tutte); Grazzini E. FIRENZE (63-64; 66 e 68); Criscione C. L.Sc. RIMINI (63-66); Eramo V. L.Cl. PESCARA (64); Milani C. Ist.Mag. CASERTA (64); Imperato C. (61-66); Giordano S. L.Sc. COSENZA (62-66); Cognolati F. L.Sc. REGGIO EMILIA (66-68); Fogliotti F. GENOVA (tutte).

AVVERTENZE IMPORTANTI PER I RISOLUTORI. Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte. Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale. Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età. Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE
al più presto possibile

Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori. Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.

AMICI DI "ANGOLO ACUTO"

BENEMERITI
Prof. Vincenzo Marseguerra - ROMA

SOSTENITORI
Prof. Salvatore Amico - AVELLINO
" Massimo Cencetti - FIRENZE
" Pasquale De Crescenzo - NOLA (Na)
" Pia Forte - BRESCIA
" Lorenzo Fucci - NAPOLI
" Nicola Ginatempo - MESSINA
Prof. Teresa Monari - MILANO
" Pietro Mancini - FOGGIA
" Gaetano Maltoni - FORLI'
" Mariarosa Mavilla - BRESCIA
Dott. Carlo Felice Ottaviani - FIRENZE
Prof. Ricciardo Rizzi - BOLOGNA
" Carlo Raccichini - FABRO (Tr)
" Sergio Ricci - FIRENZE
" Rosario Reganati - CATANIA
" Paolo Siviglia - PALLANZA (No)
" Antonio Tropeano - GROTTOLELLA (Av)
" Gianna Maria Vaghi - MILANO

ANGOLO ACUTO rivolge un vivo appello alle Autorità Scolastiche ed ai Dirigenti di Case Editrici e di Enti vari perchè vogliano inviarci premi da assegnare ai Giovani che avranno maggiormente impegnato le loro forze intellettuali nelle interessanti gare proposte nella PALESTRA e nelle varie rubriche.

DIFFONDETE "ANGOLO ACUTO" RICHIEDETECI COPIE DI SAGGIO PER I VOSTRI AMICI O INVIATECI I LORO INDIRIZZI ESATTI

A chi ci procurerà DIECI nuovi abbonati invieremo l'abbonamento gratuito.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 gennaio 1970
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso.*
Stampato dalla Tipolitografia Gino Capponi" Via G.Capponi, 27 - Firenze

Associato all'USPI
Unione Stampa Periodica Italiana