ANNO III - 1972
maggio-giugno

L'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

3

Da questo fascicolo ANGOLO ACUTO si rivolge ANCHE agli Alunni delle SCUOLE MEDIE, riservando loro almeno due QUESTIONI della PALESTRA delle GARE (v. Avvertenze e premi a pag. 20)

Periodico bimestrale
a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

spedizione in abb.postale - gruppo IV
conto corrente postale 5/27919

Abbonamenti per il 1972

Studenti	L. 1.200
Abb. ordinario	L. 1.500
" sostenitore	L. 3.000
" benemerito	L. 5.000

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio.

RELAZIONE ANNO 1971
(Questioni 56 - 93)

Ecco l'elenco dei Giovani Angolisti che si sono distinti per il numero e per l'originalità delle risoluzioni inviate:	RISOLUZIONI INVIATE	PREMIO
ZILIO Sonia del L.Cl. "Livio" di Padova	27	L. 5 000
FRIGERIO Emma del L.Sc. "Einstein" di Milano	18	L. 3 000
ROSSI Fernando del L.Cl. "Dante" di Firenze	16	L. 2 000
MILITELLO Giuseppe del L.Sc. "Kennedy" di Roma	14	
GIORDANO Silvio del L. Sc. di Cosenza	11	
BARLOTTI Marco del L.Cl. "Galilei" di Firenze	10	
CAGNOLATI Francesco del L.Sc. di Rovigo	10	
ALBERICI Marco del L.Sc. di Parma	8	
BONANNO Roberto del L. Sc. di Cosenza	6	
DA DALT Mariagrazia del L.Cl. di Ancona	6	
MARRONE Elena del L.Cl. "Manara" di Roma	6	
PASCIUTO Sandro del "XIV" L.Sc. di Roma	6	
PELLINI Roberto del L.Cl. "Manara" di Roma	6	

Un particolare elogio agli appassionati Angolisti: Dott. AGROSI Aniello, Prof. FOGLIOTTI Francesco, M° GUARATO Giuseppe, e Sig. MOSCA Giulio; che ci hanno inviato interessanti risoluzioni di quasi tutte le questioni proposte e che, implicitamente, si possono considerare i principali Redattori della PALESTRA DELLE GARE.

ATTENZIONE: Da ora in poi la *Palestra delle gare* è riferita all'anno scolastico. La gara attuale ha inizio con la questione 94 e comprenderà le questioni proposte nel fascicolo 4 (luglio-agosto).

LA PALESTRA DELLE GARE

QUESTIONI PROPOSTE

Avvertenze e premi a pagina 20.

★ QUESTIONE 107

Un padre bizzarro ma ... giusto.

Un padre lascia in eredità ai suoi figli una somma che deve essere divisa nel modo seguente:

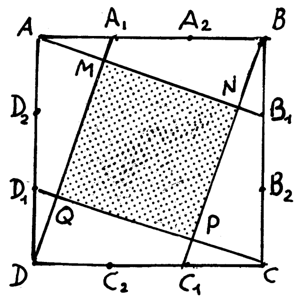
al maggiore L. 1000 000 più 1/10 della parte rimanente,
al secondo L. 2000 000 più 1/10 del nuovo resto,
al terzo L. 3000 000 più 1/10 del resto successivo
e così di seguito.

Fatta la divisione ciascuno dei figli ha la stessa somma. Determinare l'importo di tutta l'eredità e il numero dei figli.

★ QUESTIONE 108

Sui lati di un quadrato ABCD di lato $\overline{AB} = 3a$, sono dati i punti
A_1, A_2 ; B_1, B_2 ; C_1, C_2 ; D_1, D_2
in modo che sia:

$$AA_1 = A_1A_2 = A_2B = a$$
$$BB_1 = B_1B_2 = B_1C = a$$
$$CC_1 = C_1C_2 = C_2D = a$$
$$DD_1 = D_1D_2 = D_2A = a$$



Le rette AB_1, BC_1, CD_1, DA_1 determinano un quadrato MNPQ (v. figura).
Determinarne il perimetro e l'area.

QUESTIONE 109

In quali casi la somma di due unità frazionarie è ancora un'unità frazionaria?

Cioè per quali valori interi positivi di x, y, z si ha:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \quad ?$$

Quesito assegnato alla Gara Matematica della Sezione della Mathesis di Messina - 21-3-1972.

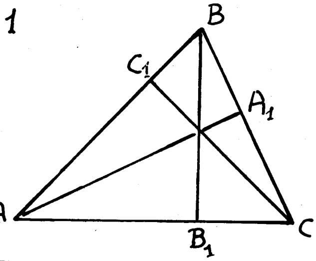
QUESTIONE 110

Dati: una circonferenza di centro O e di raggio R, una retta MN ed un punto A su MN, DETERMINARE GRAFICAMENTE la posizione del centro e il raggio della circonferenza tangente alla circonferenza data ed alla retta MN nel punto A.

QUESTIONE 111

Costruire un triangolo ABC dati tre segmenti congruenti alle altezze AA_1, BB_1, CC_1 del triangolo.

Giovanni Longo.



Ripetiamo qui l'enunciato della questione 104 proposta a pag. 2 del fascicolo precedente, perchè ci è sfuggito un errore di stampa.

QUESTIONE 104. Dimostrare che se p e q sono numeri interi dispari, l'equazione:

$$x^n + 2px + 2q = 0 \qquad (n = 2, 3, 4, 5 \ldots)$$

non ha radici razionali.

RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 66

Data la circonferenza avente il centro nel punto $C(0;7a)$ ed il raggio uguale ad a, determinare il LUOGO GEOMETRICO dei centri delle circonferenze tangenti alla suddetta circonferenza e tangenti all'asse delle ascisse.

A pagina 7 e seguenti del fascicolo precedente sono state riportate tre risoluzioni. Riportiamo ora una quarta

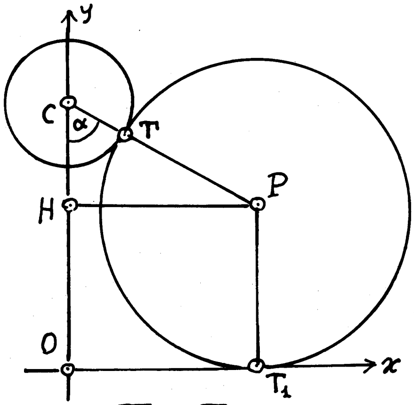
RISOLUZIONE TRIGONOMETRICA GENERALIZZATA

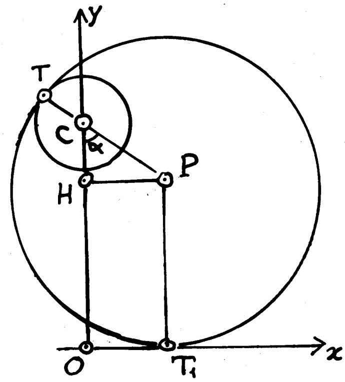
$C(0;c)$; $CT = r$; $c \geq r$; $P(x;y)$; $P\hat{C}O = \alpha$.

Le circonferenze sono tangenti

esternamente	l'una interna all'altra.

Dal triangolo CPH, rettangolo in H, si ha:





$x = \overline{HP} = \overline{CP}\,\text{sen}\,\alpha$

$x = (y+r)\,\text{sen}\,\alpha \qquad (I)$ | $x = (y-r)\,\text{sen}\,\alpha \qquad (I')$

$\overline{CH} = \overline{CP}\cos\alpha$

$c-y = (y+r)\cos\alpha \qquad (II)$ | $c-y = (y-r)\cos\alpha \qquad (II')$

Elevando a quadrato ambo i membri
della I e della II | della I' e della II'
e sommando membro a membro si ha:

$x^2 + (c-y)^2 = (y+r)^2$ | $x^2 + (c-y)^2 = (y-r)^2$

da cui

$$y = \frac{x^2}{2(c+r)} + \frac{c-r}{2} \qquad (*)$$ | $$y = \frac{x^2}{2(c-r)} + \frac{c+r}{2} \qquad (**)$$

Per $c = 7r \rightarrow y = \frac{x^2}{16r} + 3r$ | $\rightarrow y = \frac{x^2}{12r} + 4r$

Per $c = r \rightarrow y = \frac{x^2}{4r}$ | il luogo richiesto è il semi-asse positivo della y.

Se $c > 0$ e $r = 0$ le due parabole di equazione (*) e (**) si fondono nella parabola di equazione

$$y = \frac{x^2}{2c} + \frac{c}{2}.$$

L'ABBONAMENTO ad "ANGOLO ACUTO" rappresenta un atto di CONSENSO, di di INCORAGGIAMENTO e di SOLIDARIETÀ.

QUESTIONE 69

Forate con uno spillo una cartolina e collocatela a circa 3 cm dall'occhio, contro una sorgente luminosa.

Collocate lo spillo, tenendolo per la punta in modo che la testa dello spillo si trovi tra la cartolina e l'occhio a meno di un centimetro dall'occhio.

Vedrete allora lo spillo capovolto.

Perchè?

RISOLUZIONE

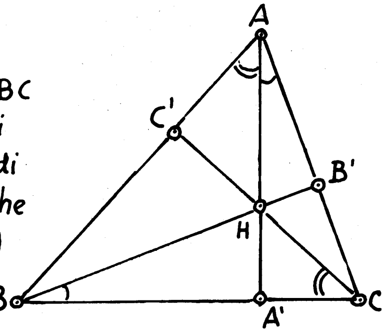
Nelle condizioni indicate, sulla retina non si forma *l'immagine* dello spillo (che sarebbe capovolta) bensì *l'ombra dritta* dello spillo, che intercetta una parte dei raggi provenienti dal foro luminoso.

E poichè noi giudichiamo dritte le immagini che si formano capovolte sulla retina, così giudichiamo capovolte quelle che si formano dritte.

Buona la risposta di Marco Barlotti di Firenze.

QUESTIONE 70

Dimostrare che in ogni triangolo ABC il rettangolo che ha per lati i segmenti compresi fra l'ortocentro e gli estremi di un'altezza ha area costante; cioè che
$\overline{AH}\cdot\overline{HA'} = \overline{BH}\cdot\overline{HB'} = \overline{CH}\cdot\overline{HC'}$. (I)



RISOLUZIONE
di Sonia Zilio del L. Cl. "T. Livio" di Padova.

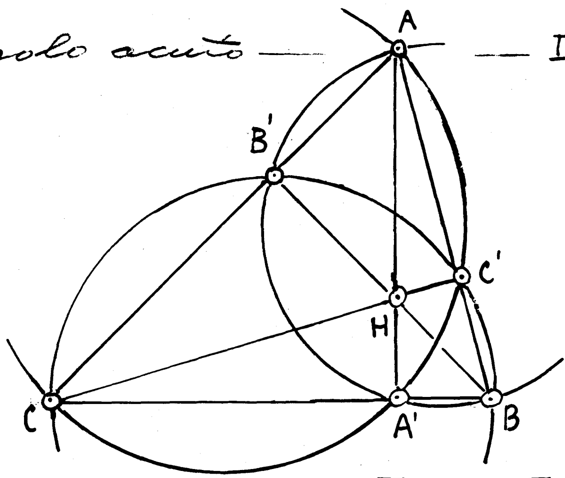
Dalla similitudine dei triangoli (1° criterio)

AB'H , BA'H	AC'H , CA'H
segue AH : HB = HB' : HA'	segue: AH : CH = HC' : HA'
cioè $\overline{AH}\cdot\overline{HA'} = \overline{BH}\cdot\overline{HB'}$ (2)	cioè $\overline{AH}\cdot\overline{HA'} = \overline{CH}\cdot\overline{HC'}$ (3)

Confrontando la (2) e la (3) si deduce la (I).

RISOLUZIONE di Giuseppe Guarato di Valdagno (Vi)

La circonferenza di diametro BC passa evidentemente per i piedi B' e C' delle altezze BB' e CC' che divengono così corde che si incontrano in H.



Dal teorema delle corde si ha: $\overline{BH}\cdot\overline{HB'} = \overline{CH}\cdot\overline{HC'}$
Questi rettangoli sono anche equivalenti al rettangolo $\overline{AH}\cdot\overline{HA'}$: basta per questo considerare una delle circonferenze di diametro AB o AC.

NOTA. Dalla dimostrazione si può dedurre che l'ORTOCENTRO di un triangolo coincide con il CENTRO RADICALE delle tre circonferenze aventi per diametro i lati del triangolo.

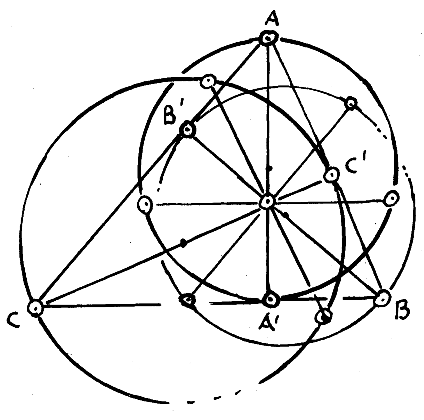
Il prof. Alfonso La Paglia di Biella dimostra anche che:

I) Il prodotto (costante) delle misure dei due segmenti in cui l'ortocentro divide ciascuna altezza è uguale a:

$$\frac{a^2 b^2 c^2 \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}{4S^2} = 4R^2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma .$$

II) Il rapporto delle due parti in cui l'ortocentro divide ciascuna altezza è:

$$\frac{A'H}{HA} = \frac{\cos\beta\cdot\cos\gamma}{\cos\alpha};\quad \frac{B'H}{HB} = \frac{\cos\gamma\cdot\cos\alpha}{\cos\beta};\quad \frac{C'H}{HC} = \frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\gamma}.$$



NOTA. Come corollario può enunciarsi il seguente teorema:
« Nelle circonferenze che
« hanno per diametri le tre
« altezze di un triangolo qualun-
« que, le tre corde perpendico-
« lari ai rispettivi diametri e
« che passano per l'ortocentro
« sono uguali ».

Infatti esse sono il doppio del segmento medio proporzionale fra le parti in cui l'ortocentro divide l'altezza.

QUESTIONE 71. Nella frazione $\frac{37}{75}$ la cifra delle unità del numeratore è uguale alla cifra delle decine del denominatore. Sopprimendo tali cifre si ha $\frac{3}{5} \neq \frac{37}{75}$. Invece operando analogamente sulla frazione $\frac{26}{65}$ si ottiene $\frac{2}{5} = \frac{26}{65}$.

Determinare le frazioni i cui termini siano numeri interi di due cifre (ZERO ESCLUSO) del tipo $\frac{AB}{BC}$, per le quali sia verificata l'uguaglianza

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A}{B}.$$

RISOLUZIONE

di Emma Frigerio del L. Sc. "Einstein" di Milano.

La condizione dell'enunciato si traduce nell'equazione indeterminata

$$(*) \quad \frac{10A+B}{10B+C} = \frac{A}{C} \qquad \text{con} \qquad 1 \leq A, B, C \leq 9,$$

da cui

$$C = \frac{10AB}{9A+B}.$$

Sostituendo ad A, 1, 2, 3, ... 9 si ha:

$$C = \frac{10B}{9+B};\ C = \frac{20B}{18+B};\ C = \frac{30B}{27+B};\ C = \frac{40B}{36+B};\ C = \frac{50B}{45+B};$$

$$C = \frac{60B}{54+B};\ C = \frac{70B}{63+B};\ C = \frac{80B}{72+B};\ C = \frac{90B}{81+B}.$$

Escludendo il caso $A = B = C = a$, per cui si ha

$\frac{10A+B}{10B+C} = \frac{11a}{11a} = 1$, soltanto la 1ª, la 2ª e la 4ª hanno soluzioni:

1) $\begin{cases} A = 1;\quad B = 6;\quad C = 4; \\ A = 1;\quad B = 9;\quad C = 5; \end{cases}$ $\qquad \frac{16}{64} = \frac{1}{4}.\quad \frac{19}{95} = \frac{1}{5}.$

2) $A = 2;\quad B = 6;\quad C = 5;\qquad \frac{26}{65} = \frac{2}{5}.$

4) $A = 4;\quad B = 9;\quad C = 8;\qquad \frac{49}{98} = \frac{4}{8} \left(= \frac{1}{2}\right).$

RISOLUZIONE di Giuseppe Guarato di Valdagno (Vi)

La relazione impone che sia

$$\frac{10A+B}{10B+C} = \frac{A}{C} \quad \text{con} \quad 1 \leq A, B, C, \leq 1 \quad \text{da cui}$$

$$A(10B-9C) = BC$$

Escludendo il caso banale per cui risulti $A=B=C$, pongo

$10B - 9\cdot C = mB$ da cui	$10B - 9C = m\cdot C$ da cui
$(10-m)B = 9C$, $A = \frac{C}{m}$	$10B = (9+m)\cdot C$; $A = \frac{B}{m}$
con $m \geqslant 2$ e C multiplo di m	con $m \geqslant 2$ e B multiplo di m.
Per $m=2 \rightarrow C=8$; $A=4$; $B=9$	Per $m=2$ NESSUNA SOLUZIONE
" $m=3$ NESSUNA SOLUZIONE	" $m=3 \rightarrow B=6$; $A=2$; $C=5$
" $m=4 \rightarrow C=4$; $A=1$; $B=6$	" $m=4;5$ NESSUNA SOLUZIONE
" $m=5 \rightarrow C=5$; $A=1$; $B=9$	" $m=7,8$ " "
" $m \geqslant 6$ NESSUNA SOLUZIONE	" $m=6,9$ SOLUZ. GIÀ TROVATE

RISOLUZIONE del Proponente prof. Alfonso La Paglia - Biella

Si tratta di esaminare l'equaz. indeterminata (*) da cui

$$B_1 = \frac{9AC}{10A-C}.$$

Le soluzioni della (*) in cui A, B, C sono numeri interi distinti non nulli e di una sola cifra, sono le quattro frazioni

$$\frac{16}{64}, \quad \frac{19}{95}, \quad \frac{26}{65} \quad e \quad \frac{49}{98} \qquad \text{(vedi RISOLUZIONI PRECEDENTI)}$$

NOTA - Se sopprimendo la prima cifra A del numeratore e l'ultima C del denominatore rimane uno stesso numero B formato da 2,3,4,... cifre, la possibilità di sopprimere tale numero B resta legata alle equazioni:

$$\frac{100A+B_2}{10B_2+C} = \frac{A}{C}; \quad \frac{1000A+B_3}{10B_3+C} = \frac{A}{C}; \ldots; \frac{10^n A+B_n}{10B_n+C} = \frac{A}{C};$$

da cui:

$$B_2 = \frac{99AC}{10A-C}; \quad B_3 = \frac{999AC}{10A-C}; \ldots; B_n = \frac{(10^n-1)AC}{10A-C}.$$

Fissati i valori possibili di A e C (vedi frazioni trovate) si deduce che

$$B_2 = 11\cdot B_1; \quad B_3 = 111\cdot B_1; \quad B_4 = 1111\cdot B_1; \ldots$$

Si perviene così alla seguente curiosa constatazione:

$$\frac{16}{64}=\frac{166}{664}=\frac{1666}{6664}=\dots;\quad \frac{19}{95}=\frac{199}{995}=\frac{1999}{9995}=\dots;$$

$$\frac{26}{65}=\frac{266}{665}=\frac{2666}{6665}=\dots;\quad \frac{49}{98}=\frac{499}{998}=\frac{4999}{9998}=\dots.$$

QUESTIONE 72

Determinare due numeri sapendo che la loro SOMMA, il loro PRODOTTO e il loro QUOZIENTE sono uguali.

RISOLUZIONE di Marco Alberici - L. Sc. Parma, di Sonia Zilio - L. Cl. Padova e di Giuseppe Guarato di Valdagno

Siano x e y i due numeri cercati. Per essi si deve avere

$$\begin{cases} x+y = xy & \mathrm{I} \\ xy = \dfrac{x}{y} & \mathrm{II} \end{cases}$$

La II impone che sia $y^2=1$ $(x \neq 0)$, e quindi $y=\pm 1$.

Se $y=1$, la I diventa $x+1=x$ (IMPOSSIBILE) | Se $y=-1$ la I fornisce $x=\frac{1}{2}$,

e si ha l'UNICA SOLUZIONE $x=\frac{1}{2}$; $y=-1$.

QUESTIONE 73

Risolvere l'equazione

$$2^x+2^{x+1}+2^{x+2} = 4^x+4^{x+1}+4^{x+2}$$

RISOLUZIONE di Mariagrazia Da Dalt - L. Cl. ANCONA

Raccogliendo a fattor comune 2^x nel 1° membro, e 4^x nel secondo membro si ha:

$$2^x(1+2+4)=4^x(1+4+16);$$

da cui

$$\left(\frac{2}{4}\right)^x=\frac{21}{7} \quad \text{ovvero} \quad 2^{-x}=3 \quad \text{cioè} \quad 2^x=\frac{1}{3};$$

Ne segue

$$x=\lg_2\frac{1}{3}=-\frac{\mathrm{Lg}\,2}{\mathrm{Lg}.3}.$$

QUESTIONE 74 - La risoluzione, per ragioni di impaginazione, sarà riportata nel prossimo fascicolo.

QUESTIONE 75 a pagina 16.

Le congruenze aritmetiche

1._ Dati i numeri

$$a \in N_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad ; \quad b \in N = \{1, 2, 3, 4, \dots\},$$

esistono sempre due numeri $q \in N$ ed $r \in N_0$, tali che

$$(1) \qquad \begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

Il numero a si dice <u>dividendo</u>, il numero b <u>divisore</u>, il numero q <u>quoziente</u> e il numero r <u>resto</u>. L'operazione mediante la quale si determinano q ed r, noti a e b, si dice <u>divisione euclidea</u>.

In altro modo possiamo anche dire, dati due numeri naturali a, b, con $b \neq 0$, e detto

$$M(b) = \{0, b, 2b, 3b, \dots, hb, \dots\}$$

l'insieme dei multipli di b, esiste sempre un numero naturale q tale che

$$(2) \qquad bq \leq a < b(q+1).$$

Il numero q è il quoziente e il numero

$$(3) \qquad r = a - bq$$

è il resto della divisione euclidea di a per b. È chiaro che

$$a < b(q+1) \Rightarrow a < bq + b \Rightarrow r < b.$$

Da quanto abbiamo detto risulta che il resto r è uguale ad uno degli elementi dell'insieme

$$E_r = \{0, 1, 2, 3, \dots, b-1\},$$

cioè il resto è sempre un numero <u>non negativo</u>, minore del divisore b. L'insieme E_r si dice <u>insieme dei resti possibili della divisione di a per b</u>.

Tuttavia vi sono particolari questioni in cui è utile considerare il

<u>resto negativo</u> della divisione.

Consideriamo la differenza

$$a - b(q+1) = (a-bq) - b = r - b\,;$$

il numero

$$(4). \qquad r - b < 0$$

si dice <u>resto negativo</u> della divisione di a per b.

Si tenga presente che si fa uso del resto negativo nei casi in cui si ha

$$|r-b| < |b|,$$

in altri termini nelle applicazioni si prende in ogni caso il <u>resto minimo in valore assoluto</u>.

Così, se $a = 187$, $b = 13$, si ha $13 \times 14 \leq 187 < 13 \times 15$, sicchè $r = 5$, $r - b = -8$. Il numero (-8) è il resto negativo della divisione di 187 per 13; in questo caso è $|-8| > |5|$.

Se $a = 304$, $b = 18$, avendosi $18 \times 16 \leq 304 < 18 \times 17$, si trova $r = 16$, $r - b = -2$ e in questo caso $|-2| < |16|$, cioè il resto negativo è quello minimo in valore assoluto.

2. – Siano dati due numeri $a, b \in N_0$; dividiamoli entrambi per un terzo numero $m \in N$ e supponiamo che si abbia

$$\text{rest}(a, m) = \text{rest}(b, m).$$

Diremo che i numeri a, b sono <u>congrui rispetto al modulo m</u> e scriveremo

$$a \equiv b \pmod m.$$

Cioè: <u>due numeri a, b sono congrui o formano una congruenza rispetto ad un terzo numero m</u>, quando <u>divisi</u> per m danno resti uguali.

Così,

$$99 \equiv 63 \pmod{12}$$

perchè

$$\text{rest}(99, 12) = \text{rest}(63, 12) = 3.$$

Dati i numeri a, m, supponiamo che si abbia

$$a = mq + r\,; \qquad r < m,$$

allora se dividiamo r per m si ha $\text{rest}(r, m) = r$, perchè $r < m$,

onde diremo
$$a \equiv r \pmod m,$$
ossia: dato il modulo m, ogni numero a è congruo, rispetto ad m, col resto della sua divisione per m.

Così, essendo $rest(23,3)=2$, si ha
$$23 \equiv 2 \pmod 3.$$
In particolare
$$m \mid a \iff rest(a,m)=0$$
onde possiamo dire
$$m \mid a \iff a \equiv 0 \pmod m,$$
cioè: se un numero a è divisibile per m diciamo che a è congruo zero (mod m).

Così
$$27 \equiv 0 \pmod 9.$$
È evidente che
$$a \equiv b \pmod m \iff a-b \equiv 0 \pmod m.$$
Infatti, se a e b sono congrui rispetto ad m, la loro differenza è divisibile per m. Così,
$$75 \equiv 37 \pmod{19} \iff 75-37 \equiv 0 \pmod{19}$$
infatti
$$38 \equiv 0 \pmod{19}.$$
È ovvio che le cose dette valgono pure per l'insieme
$$Z = \{ \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$
dei numeri interi relativi. Così si capisce senza difficoltà che
$$-37 \equiv +3 \pmod 5 \quad ; \quad -9 \equiv -16 \pmod 7;$$
infatti $(-37)-(+3)=-40$ che è divisibile per 5; $(-9)-(-16)=+7$ che è divisibile per 7.

Ricordando che ogni relazione riflessiva, simmetrica e transitiva è una relazione di equivalenza, possiamo dire che la relazione di congruenza è una relazione di equivalenza. Infatti

$$a \equiv a \pmod m \quad \text{proprietà riflessiva}$$
$$a \equiv b \pmod m \implies b \equiv a \pmod m \quad \text{proprietà simmetrica}$$
$$[a \equiv b \pmod m \text{ e } b \equiv c \pmod m] \implies a \equiv c \pmod m \quad \text{proprietà transitiva},$$

come è facile verificare.

3.- Per le congruenze si hanno le seguenti proprietà:

$\underline{P_1}$ - Se $a \equiv b \pmod m$, allora $a + c \equiv b + c \pmod m$, e viceversa.

$\underline{P_2}$ - Se $a \equiv b \pmod m$ e $c \equiv d \pmod m$, allora $a + c \equiv b + d \pmod m$.

$\underline{P_3}$ - Se $a \equiv b \pmod m$ e $c \neq 0$, allora $ac \equiv bc \pmod m$.

$\underline{P_4}$ - Se $a \equiv b \pmod m$ e $c \equiv d \pmod m$, allora $ac \equiv bd \pmod m$.

$\underline{P_5}$ - Se $n \in N$ e si ha $a \equiv b \pmod m$, allora si ha pure
$$a^n \equiv b^n \pmod m.$$

Le proprietà enunciate si ricavano tutte facilmente dalla definizione di congruenza; le dimostrazioni le lasciamo alla diligenza dello studioso.

4.- Consideriamo l'insieme dei resti della divisione per m, sia
$$E_r = \{0, 1, 2, 3, \dots, m-1\};$$
esso, rispetto al $\pmod m$, gode le seguenti proprietà:

$\underline{P_6}$ - Due elementi distinti di E_r sono incongrui tra loro $\pmod m$.

Infatti, se $a, b \in E_r$, essendo $a \neq b$; $a < m$; $b < m$, si ha
$$\text{rest}(a, m) = a \quad ; \quad \text{rest}(b, m) = b$$
e quindi
$$a \not\equiv b \pmod m.$$

$\underline{P_7}$ - Ogni numero relativo è congruo $\pmod m$, ad un elemento di E_r.

Così, se $m = 13$, $a = -72$, si ha $-72 = (-5) \times 13 + (-7)$ da cui
$$-72 \equiv -7 \pmod{13},$$
ma, $-7 \equiv 6 \pmod{13}$, onde $-72 \equiv 6 \pmod{13}$. In questo caso
$$E_r = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$
e $6 \in E_r$.

Ricordiamo che ogni insieme di numeri che gode le proprietà $\underline{P_6}$ e $\underline{P_7}$, si dice <u>sistema completo di numeri incongrui $\pmod m$</u>. E' chiaro che codesto sistema costituisce il <u>sistema completo dei resti non negativi rispetto al $\pmod m$</u>.

5. - Dato il numero naturale $m > 1$, gli elementi dell'insieme Z si possono ripartire in m classi di equivalenza, ponendo in ciascuna classe tutti i numeri relativi congrui (mod m), ad uno degli elementi del sistema completo dei resti non negativi (mod m).
Così, se $m = 3$, si ha $E_r = \{0, 1, 2\}$ e allora l'insieme Z si ripartisce nelle tre classi di equivalenza

$$\mathcal{C}_0 = \{\dots -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\},$$

$$\mathcal{C}_1 = \{\dots -5, -2, 1, 4, 7, \dots\},$$

$$\mathcal{C}_2 = \{\dots -4, -1, 2, 5, 8, \dots\},$$

ponendo in $\mathcal{C}_0$ i numeri divisibili per 3; in $\mathcal{C}_1$ quelli congrui ad 1 (mod 3); in $\mathcal{C}_2$ quelli congrui 2 (mod 3).
Della ripartizione si può dare il seguente quadro:

$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$
⋮	⋮	⋮
-9	-8	-7
-6	-5	-4
-3	-2	-1
0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11
12	13	14
15	16	17
18	19	20
21	22	23
⋮	⋮	⋮

dal quale appare evidente la legge di formazione e risulta chiaro che

$$C_0 \cup C_1 \cup C_2 = Z \; ; \; C_0 \cap C_1 = \emptyset \; ; \; C_0 \cap C_2 = \emptyset \; ; \; C_1 \cap C_2 = \emptyset .$$

L'uso delle congruenze assume grande importanza sia nelle considerazioni teoriche che nelle applicazioni pratiche. In una successiva nota accenneremo ad alcune applicazioni di carattere elementare.

Qui proponiamo di trovare il resto della divisione di un googol per 7; cioè il numero

$$x = \text{rest}\,(10^{100}, 7).$$

Facendo uso delle proprietà delle congruenze si trova successivamente, rispetto al (mod 7):

$$10 \equiv 3 \; ; \; 10^2 \equiv 9 \equiv 2 \; ; \; 10^4 \equiv 4 \equiv -3 \; ; \; 10^8 \equiv (-3)^2 \equiv 2 \; ; \; 10^{16} \equiv -3 \; ; \; 10^{32} \equiv 2 \; ; \; 10^{64} \equiv -3 .$$

Inoltre, essendo $10^{18} = 10^{16} \times 10^2$, si ha

$$10^{18} \equiv 10^{16} \times 10^2 \Rightarrow 10^{18} \equiv (-3) \times 2 \equiv -6 \equiv 1$$

da cui $10^{36} \equiv 1$; e allora da

$$10^{100} = 10^{64} \times 10^{36}$$

si ricava

$$10^{100} \equiv (-3) \times 1$$

cioè $10^{100} \equiv 4 \pmod 7$; dunque $x = 4$.

Lo studioso, se ne ha voglia, può trovare il resto della divisione per 7 del numero

$$\text{googolplex} = 10^{\text{googol}} .$$

Pietro Castaldo

PICCOLA POSTA

Alunni della Scuola Media "Cuoco" di Napoli. -

Vogliamo assicurarvi che la vostra richiesta è già esaudita. Infatti a cominciare da questo fascicolo nella PALESTRA DELLE GARE saranno proposte due questioni riservate agli studenti di scuole medie. (Avvertenze e premi a pag. 20).

****

Lo stud. univ. Cosimo Carlo Pasciuto di Roma, ci scrive:

........L'arrivo in famiglia di ANGOLO ACUTO, indirizzato all'abbonato Alessandro Pasciuto, mio fratello, costituisce sempre una circostanza di gioia e di simpatiche discussioni.

****

Stud. univ. Giuseppe Militello - Roma. -

Accettando la tua proposta abbiamo deciso di riferire la Palestra delle gare alla durata dell'anno scolastico. La gara attuale però ha inizio con le questioni proposte nel fascicolo 1 (genn.-febbr.) e si concluderà con quelle che saranno proposte nel fascicolo 4 (luglio-agosto).

QUESTIONE 75. Dimostrare che, qualunque sia la base b del sistema di numerazione, il numero 10101 è sempre divisibile per 111. Determinare inoltre il loro quoziente in funzione di b.

RISOLUZIONE di Sonia Zilio del L. Cl. di Padova e di Giuseppe Guarato di Valdagno

I numeri $N_1 = (10101)_b$ e $N_2 = (111)_b$ scritti sotto forma polinomiale diventano:

$$N_1 = b^4 + b^2 + 1 \quad , \quad N_2 = b^2 + b + 1.$$

Si ha: $$N_1 = b^4 + 2b^2 + 1 - b^2 = (b^2+1)^2 - b^2 =$$
$$= (b^2+b+1)(b^2-b+1) = N_2 \cdot (b^2-b+1).$$

Risulta quindi che N_1 è divisibile per N_2 e che il loro quoziente è $Q = b^2 - b + 1 = (b-1)b+1$.
Indicando con $K = b-1$ il coefficiente di b, si può scrivere, secondo la convenzione posizionale:

$$Q = (K\,1)_b$$

Il prof. F. Fogliotti ci ha inviato anche la seguente

RISOLUZIONE. Poichè in siffatte divisioni, $10101 \,\underline{|\,111}$ (qualunque sia la base del sistema di numerazione), occorre considerare il gruppo a sinistra di quattro cifre (cioè 1010) la prima cifra del quoziente è sempre $K = b-1$ e il primo resto è 11, sempre.

$$\begin{array}{r|l} \overset{\frown}{1010}1 & 111 \\ \cline{2-2} KKK & K \\ \cline{1-1} 11 & \end{array}$$

Con l'abbassamento della quinta cifra (cioè 1), la seconda cifra del quoto è ovviamente 1 e il resto è ZERO.
Pertanto il quoto è

$$(K\,1)_b = (b-1)\,b + 1.$$

$$\begin{array}{r|l} \overset{\frown}{1010}1 & 111 \\ \cline{2-2} KKK. & K1 \\ \cline{1-1} 111 & \\ 111 & \\ \cline{1-1} /\,/\,/ & \end{array}$$

Qualunque sia $b \geqq 2$, $(K = b-1)$, la divisione assume l'andamento qui indicato »

MATURITA' SCIENTIFICA - Sessione suppletiva 1971

PRIMO QUESITO

In un piano, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale $O(x;y)$ si rappresenti la curva di equazione $y = \frac{x-1}{x+1}$. (I)
Condotta per il punto $(-1;+1)$ la retta di coefficiente angolare m, si dica per quali valori di m una delle sue intersezioni con la curva appartiene al primo o al quarto o al terzo quadrante.
Si determini inoltre la lunghezza della corda minima intercettata sulla retta dalla curva e si dica qual è il rapporto, maggiore di uno, fra le aree dei triangoli che le tangenti negli estremi di tale corda formano con gli assi cartesiani.

La seguente RISOLUZIONE risulta dalle risposte inviate da F. Fogliotti e G. Guarato.

L'equazione assegnata è una *FUNZIONE OMOGRAFICA*, cioè una iperbole equilatera con gli asintoti paralleli agli assi.
asintoti: $x=-1$; $y=1$; centro $P(-1;1)$.
I vertici V_1 e V_2 sono i punti le cui coordinate risolvono il sistema

$$\begin{cases} y = \frac{x-1}{x+1} \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 \equiv (-\sqrt{2}-1\ ;\ \sqrt{2}+1) \\ V_2 \equiv (\sqrt{2}-1\ ;\ -\sqrt{2}+1). \end{cases}$$

La curva incontra gli assi nei punti $A(1;0)$ e $B(0;-1)$.
Un ramo dell'iperbole appartiene tutto al 2° quadrante; l'altro ramo appartiene al 1° quadrante per $x>1$,
al 4° " per $0<x<1$,
al 3° " per $-1<x<0$.
La y è positiva per $-\infty<x<-1$ e per $x>1$;
è negativa per $-1<x<1$.
La y è sempre crescente.
La forma canonica si ottiene operando con le formule di TRASLAZIONE $\begin{cases} x = X-1 \\ y = Y+1 \end{cases}$. Ne segue $XY = -2$.

L'equazione del fascio di rette di centro $P(-1;1)$ è:

$$y-1 = m(x+1) \qquad (\text{II})$$

Facendo sistema fra l'equazione della curva I e l'equazione II e risolvendo si perviene all'equazione:

$$m x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \qquad \text{con} \quad \frac{\Delta}{4} = -2m.$$

Pertanto le interzioni esistono solo se $m \leq 0$, e precisamente:

La intersezione di ascissa minore appartiene sempre al II quadrante; la intersezione di ascissa maggiore appartiene al 1º quadrante per $-\frac{1}{2} < m < 0$

al 4° " " $-2 < m < -\frac{1}{2}$

al 3° " " $-\infty < m < -2$.

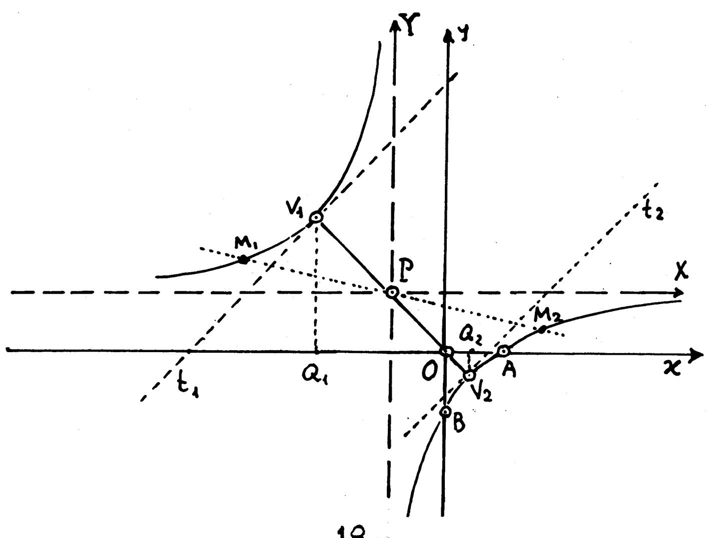
Il valore $m = -\frac{1}{2}$ si ottiene imponendo alla retta di passare per il punto $A(1;0)$; il valore $m=-2$ imponendo alla retta di passare per il punto $B(0;-1)$.

Rispetto al centro P i due rami di iperbole sono simmetrici, sicchè due suoi punti M_1 e M_2 simmetrici rispetto a P hanno, con riferimento al sistema di coordinate XPY, coordinate opposte, cioè $M_1\left(X; -\frac{2}{X}\right)$ e $M_2\left(-X; \frac{2}{X}\right)$.

Pertanto la lunghezza generica della corda M_1M_2 è

$$M_1M_2 = \sqrt{(X+X)^2 + \left(-\frac{2}{X} - \frac{2}{X}\right)^2} = \sqrt{4X^2 + \frac{16}{X^2}}$$

E poichè il prodotto dei due termini di questa somma è costante $\left(4X^2 \cdot \frac{16}{X^2} = 4\right)$, il valore minimo della somma si ha



quando i due termini sono uguali; cioè quando è

$$4X^2 = \frac{16}{X^2} \quad \text{ovvero} \quad X^2 = 2$$

Quindi il valore minimo di $\overline{MM_1}$ è $\sqrt{4 \cdot 2 + \frac{16}{2}} = 4$.

Ovviamente la corda minima coincide con $\overline{V_1V_2}$. Infatti:

$$\overline{V_1V_2} = \overline{Q_1Q_2} \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1)\sqrt{2} = 4.$$

Poiché le tangenti nei vertici, t_1 e t_2, sono parallele, i triangoli individuati da tali tangenti e dagli assi sono simili; il loro rapporto R, maggiore di 1, è:

$$R = \frac{\overline{OQ_1}^2}{\overline{OQ_2}^2} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)^2} = (\sqrt{2}+1)^4 = (3+2\sqrt{2})^2 = 17 + 12\sqrt{2}.$$

RISOLUTORI delle	QUESTIONI					
	70	71	72	73	74	75
AGROSI Aniello Diso (LE)		●	●	●	●	●
ALBERICI Marco - L. Sc. Parma	●		●	●	●	
BARLOTTI Marco - L. Cl. "Galileo" Firenze	●		●	●	●	
CAGNOLATI Francesco - L. Sc. Reggio Em.	●		●		●	
CASANOVA M. Cristina - L. Cl. "Manara" Roma					●	
CECCHETTO Giampaolo - Ceregnano (Ro)					●	●
COLAJACONO GianLuigi - L. Sc. Colleferro (Roma)					●	
DA DALT Mariagrazia L. C. Ancona	●		●	●	●	
FOGLIOTTI Francesco - Genova-Samp.	●	●	●	●	●	●
FRIGERIO Emma L. Sc. "Einstein" Milano	●		●	●	●	●
GIORDANO Silvio L. Sc. Cosenza	●	●	●	●		
GUARATO Giuseppe - Valdagno (Vi)	●	●	●	●	●	●
GRAZZINI Elisabetta - Firenze			●	●		
LA PAGLIA Alfonso - Biella (Vc)	●				●	
MARRONE Elena. L. Cl. "Manara" Roma					●	
MILIANI Carla. Ist. Magistr. Caserta	●	●	●	●		
MOSCA Giulio - Teramo	●	●				
PASCIUTO Alessandro "XIV" L. Sc. Roma					●	●
PELLINI Roberta L. Cl. "Manara" Roma					●	
ROLFI Nunzia Ist. Magistr. Brescia					●	●
ROSSI Fernando L. Cl. "Dante" Firenze		●	●		●	
ZILIO Sonia - L. Cl. "T. Livio" Padova	●		●	●	●	●

PER FAVORE, NON CESTINATE

Se questo periodico non vi interessa, vi preghiamo di passarlo ad un appassionato che voglia sottoscrivere l'abbonamento oppure di respingere le copie ricevute al MITTENTE:

ANGOLO ACUTO - Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE

Coloro che trattengono ANGOLO ACUTO sono pregati di inviare con sollecitudine la loro quota di abbonamento.

SPEDIZIONE IN ABBONAMENTO POSTALE GRUPPO IV

LA PALESTRA DELLE GARE: Avvertenze e premi.

Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori.

Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte. Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale. Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età. Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE
al più presto possibile

Alle migliori risposte inviate da abbonati che siano alunni di scuole medie (inferiori o superiori) saranno assegnati due premi, uno da L.1.500 e uno da L. 1 200.

Alla fine di ogni ANNO SCOLASTICO saranno compilate due graduatorie: una fra studenti di scuola media e una fra studenti di licei ed istituti tecnici (statali e privati), che si saranno distinti per assiduità esattezza ed ordine.

Per ciascuna graduatoria saranno assegnati tre premi rispettivamente di

L. 5 000, L. 3 000 e L. 2 000.

Le questioni segnate con un asterisco (*) sono riservate agli effetti della premiazione agli allievi di scuola media. Si accettano tuttavia le risposte degli allievi di licei ed istituti tecnici, sia per la compilazione della graduatoria annuale sia per la pubblicazione delle risposte migliori.

A CHI CI PROCURERA' DIECI NUOVI ABBONATI INVIEREMO L'ABBONAMENTO GRATUITO.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 gennaio 1970
Direttore responsabile: Giuseppe Spinoso.
Stampato dalla Tipolitografia "Gino Capponi" Via G.Capponi, 27 - Firenze