L'Angolo acuto
Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

ANNO III - 1972
luglio-ottobre
4-5

Periodico bimestrale
a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

spedizione in abb. postale - gruppo IV
conto corrente postale 5/27919

ABBONAMENTI PER IL 1972

Studenti	L.	1 200
Abb. ordinario	L.	1 500
" sostenitore	L.	3 000
" benemerito	L.	5 000

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio.

LA PALESTRA DELLE GARE

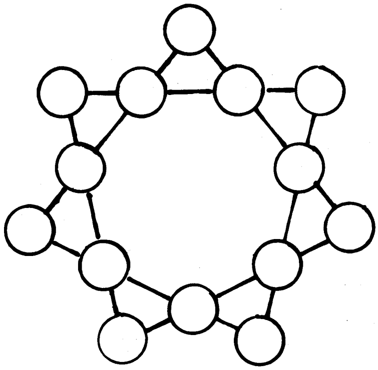
QUESTIONI PROPOSTE

(Avvertenze e premi a pagina 2)

(Avvertenze e premi a pagina 2)

QUESTIONE 112

Porre nei cerchietti di questa STELLA MAGICA i primi 14 numeri naturali (1,2,3, ... 14) in modo che risulti COSTANTE la somma dei numeri posti in ciascuno dei sette gruppi di quattro cerchietti i cui centri sono allineati.



IN QUESTO FASCICOLO SONO PUBBLICATI I TEMI DI MATEMATICA ASSEGNATI AGLI ESAMI DI MATURITA' MAGISTRALE (4-7-1972) E DI MATURITA' SCIENTIFICA (4-7-1972 e 18-7-1972)

AVVERTENZE E PREMI PER I RISOLUTORI. Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte. Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale. Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età. Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE
entro il 30 novembre 1972.

Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori. Alle migliori risposte inviate da abbonati che siano alunni di scuole medie (inferiori o superiori) saranno assegnati due premi, uno da L. 1 500 e uno da L. 1 200.

Alla fine di ogni anno scolastico saranno compilate due graduatorie:
una fra studenti di scuola media e una fra studenti di licei ed istituti tecnici (statali e privati), che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine.

Per ciascuna graduatoria saranno assegnati tre premi rispettivamente di L. 5 000, L. 3 000 e L. 2 000.

Le questioni segnate con un asterisco (★) sono riservate agli effetti della premiazione agli allievi di scuola media. Si accettano tuttavia le risposte degli allievi di licei ed istituti tecnici, sia per la compilazione della graduatoria annuale sia per la pubblicazione delle risposte migliori.

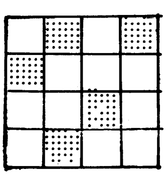
Le questioni proposte in questo fascicolo sono valide per la TERZA GARA, relativa all'anno scolastico 1971-72.

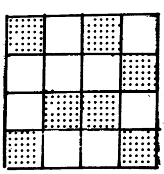
★ QUESTIONE 113

Un finestrone quadrato è suddiviso in 16 riquadri uguali. Ciascun riquadro può essere illuminato o no.

Quanti aspetti diversi può assumere il finestrone variando il numero (da zero a 16) e la posizione dei riquadri illuminati?

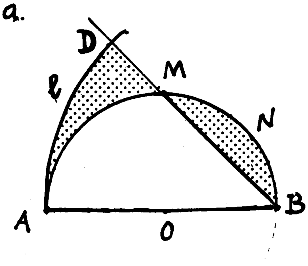
Interessa conoscere il numero esatto dei possibili aspetti assunti e soprattutto il procedimento logico usato per determinarlo.





★ QUESTIONE 114

Si consideri la semicirconferenza di diametro AB = 2r e sia M il punto medio della semicirconferenza stessa.

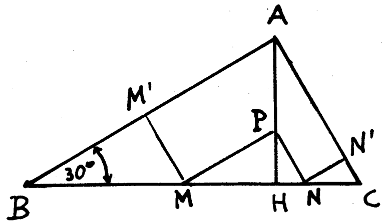


Si tracci la semiretta BM e l'arco ℓ di circonferenza avente il centro in B e il raggio uguale ad AB.

Detta D l'intersezione della semiretta AM con l'arco ℓ, si calcoli l'area e il perimetro sia del segmento circolare BMN (vedi fig.) sia del triangolo mistilineo AMD (FALCATA)

QUESTIONE 115

Il triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa $\overline{BC} = 4a$, ha l'angolo in B di 30°. Si consideri un punto P sull'altezza AH relativa all'ipotenusa; siano rispettivamente M ed N le intersezioni con l'ipotenusa BC delle parallele condotte da P ai lati AB e AC; siano inoltre: M' la proiezione di M su AB ed N' la proiezione di N su AC.



Determinare la posizione di P ($\overline{AP} = 2x$) in modo che sia verificata la seguente relazione:

$$\frac{\overline{AM'} \cdot \overline{AN'} + \overline{PM} \cdot \overline{PN}}{\overline{MM'} \cdot \overline{NN'}} = \frac{19}{3}.$$

(Rientra nei programmi degli attuali ISTITUTI MAGISTRALI)

QUESTIONE 116

L'equazione

$$(a+b-4)X^2 - (a+b-2)X + 2a - 3b + 2 = 0$$

ha per soluzioni gli *antireciproci* (inversi degli opposti) delle soluzioni dell'equazione:

$$2X^2 + 3X + 1 = 0.$$

Determinare i valori dei parametri a e b senza risolvere le due equazioni.

QUESTIONE 117

Scomporre in quattro fattori l'espressione:

$$x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y).$$

QUESTIONE 118

Determinare tre numeri interi, diversi, di due cifre, diverse:

AB, CD, EF

tali che, sommandoli due a due, si ottenga il numero ottenuto scambiando di posto le cifre del rimanente numero; cioè in modo che siano verificate le seguenti addizioni CRIPTARITMETICHE:

AB +	CD +	EF +
CD =	EF =	AB =
FE	BA	DC.

MATURITÀ MAGISTRALE 4 LUGLIO 1972

Dato il quadrato ABCD di lato a, si determini sul lato CD un punto P tale che il triangolo APD sia gli m/n del trapezio ABCP.

Si dica per quali valori di m/n i due solidi generati dal triangolo e dal trapezio in una rotazione completa attorno ad AB sono equivalenti.

In questo caso particolare si calcoli il rapporto tra le superfici dei due solidi.

MATURITÀ SCIENTIFICA 4 LUGLIO 1972

Il candidato risolva, a sua scelta, almeno due dei seguenti quesiti:

I) Si scriva l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(-2;0)$, $B(+4;0)$ ed avente il centro sulla retta $y=4$ e si calcolino le coordinate degli estremi del diametro parallelo all'asse delle x.

Si determinino poi i coefficienti dell'equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

in modo che le parabole da essa rappresentate abbiano in comune il punto $C(0;+4)$ e siano tangenti all'asse delle ascisse. Tra queste parabole si trovino quelle che passano per l'uno o per l'altro degli estremi del diametro suddetto.

Si calcoli infine l'area della regione limitata dalle predette parabole e dall'asse delle x.

II) Data una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, si prendano su di essa, da parte opposta di AB, due punti C e D, tali che

$$A\hat{B}C = \frac{\pi}{3} \quad , \quad A\hat{B}D = \alpha .$$

Si consideri la funzione

$$y = \frac{AD^2 - CD^2}{BC^2}$$

espressa per mezzo di $x = \operatorname{tg}\alpha$ e se ne studi il grafico.

III) Si studi la variazione della funzione

$$y = \operatorname{sen} 2x \cdot \cos x$$

nell' intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$.

IV) Si determini l'altezza e il raggio di base del cono di volume minimo circoscritto ad una data sfera di raggio r. Si dimostri poi che il suddetto cono è anche quello di minima superficie totale.

MATURITA' SCIENTIFICA
SESSIONE SUPPLETIVA — 18 LUGLIO 1972

Il candidato risolva, a sua scelta, almeno due dei seguenti quesiti:

I) Date le due parabole rappresentate dalle equazioni :

$$y = x^2 - 7x + 12 \quad ; \quad y = 4x^2 - 25x + 36$$

si determinino le coordinate dei punti ad essi comuni, le equazioni delle tangenti comuni e le coordinate dei punti di contatto. Si calcoli poi l'area di una delle due regioni piane limitate dalle parabole e da una delle suddette tangenti.

II) Si disegni la curva di equazione

$$y = \frac{2x}{x^2 + x - 1} \qquad (\star)$$

Si determinino le coordinate dei punti comuni ad essa ed alla sua simmetrica rispetto all'asse delle y e si calcoli l'area del quadrilatero convesso formato dalle tangenti alle due curve nei punti comuni di ascissa non nulla.

[$(\star)$ *L'equazione proposta era* $y = \dfrac{2x}{x^2 + x + 1}$ (1) .

Riteniamo di aver individuato l'errore di trascrizione : Infatti la curva di equaz. (1) e la sua simmetrica rispetto all'asse y, di equaz. $y = -2x/(x^2 - x + 1)$, non hanno punti in comune di ascissa non nulla.]

III) Si studi la variazione della funzione

$$y = \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{sen} x$$

nell'intervallo

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} .$$

IV) Si discuta la seguente equazione:

$$2Kx^2 + 2(K+1)x + K^2+1 = 0$$

per x compreso fra $-\frac{1}{2}$ e 1.

RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 74

Siano AB e BC due segmenti adiacenti, su una retta r. Si costruiscano, in uno stesso semipiano di origine r, le semicirconferenze aventi per diametri i segmenti AB e BC.

I punti medi di queste semicirconferenze, E ed F, e il punto B sono *tre* vertici di un rettangolo EBFD; gli stessi punti E, F e il punto medio M del segmento AC sono *tre* vertici di un quadrato EMFN.

Dimostrare che la somma del rettangolo EBFD e del quadrato EMFN è equivalente al quadrato avente per lato il segmento AM.

RISOLUZIONE di Alessandro Pasciuto, "XIV" L. Sc. di Roma

Essendo $A\hat{B}E = C\hat{B}F = 45°$ sarà $E\hat{B}F = 90°$.

Poichè è $\overline{EB} = r\sqrt{2}$; $\overline{BF} = R\sqrt{2}$ sarà $\overline{EF}^2 = 2(r^2+R^2)$.

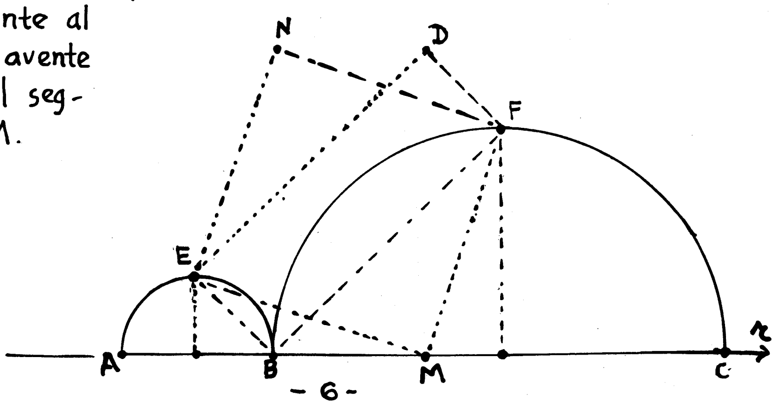
Essendo $\overline{AM} = \overline{MC} = r+R$ sarà $\overline{MH} = R$, $\overline{MK} = r$ e quindi

$$\overline{EM}^2 = \overline{FM}^2 = r^2+R^2 ;$$

ne segue, tenendo presente che

$$\overline{EF}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{FM}^2 ,$$

$$E\hat{M}F = 90° .$$



Infine, poichè è

$$S_{EBFD} = \overline{EB}\cdot\overline{BF} = 2rR$$

$$S_{EMFN} = \overline{EM}^2 = r^2+R^2$$

e $\overline{AM}^2 = (r+R)^2 = r^2+R^2+2rR$,... resta dimostrato quanto richiesto.

RISOLUZIONE
di Giuseppe Guarato di Valdagno

Che $E\hat{B}F = 90°$ lo si deduce da

$$E\hat{B}A = F\hat{B}C = 45°.$$

Dalla uguaglianza dei triangoli DMF, AME ($AM = MD$; $AE = DF$; $E\hat{A}M = M\hat{D}F$) si deduce

$$EM = MF \text{ ed } EM \perp MF.$$

Inoltre, poichè EF è diagonale e del rettangolo e del quadrato risulta:

$$\overline{EB}\cdot\overline{FB} + \overline{EM}^2 = \frac{2\cdot\overline{EB}\cdot\overline{FB} + \overline{EF}^2}{2} =$$

$$= \frac{2\,\overline{EB}\cdot\overline{FB} + \overline{EB}^2 + \overline{BF}^2}{2} =$$

$$= \left(\frac{\overline{EB}+\overline{BF}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{2}\right)^2 = \overline{AM}^2.$$

NOTA. *Il Prof. Alfonso La Paglia di Biella ha inviato una generalizzazione del quesito, ponendo*

$$A\hat{B}E = C\hat{B}F = \alpha.$$

Esaminando il comportamento di S, somma delle aree dei parallelogrammi ABFD e AMFN, perviene al seguente risultato:

$S = (R+r)^2 \operatorname{sen} 2\alpha + 2Rr \operatorname{sen} 4\alpha$.

Caso particolare: $\alpha = 45°$, $S = \dots = (R+r)^2$.

QUESTIONE 75

La risoluzione è stata riportata a pag. 16 del fascicolo precedente.

QUESTIONE 76

Costruire un triangolo rettangolo di cui sono noti un cateto e la somma dell'altro cateto e della ipotenusa (s).

RISOLUZIONE (algebrica)
di Gaetano Prota del L. Cl. "Galilei" di Manfredonia.

Sia ABC il triangolo richiesto e sia AB il cateto noto. Indico $\overline{AB}$ con a; $\overline{AC}$, il cateto incognito, con x, e di conseguenza per la relazione pitagorica, l'ipotenusa $\overline{BC}$ con $\sqrt{a^2+x^2}$.

Quindi dal problema si ricava l'equazione:

$$x + \sqrt{a^2+x^2} = s;$$

$$\sqrt{a^2+x^2} = s - x \qquad (x<s);$$

$$a^2 + x^2 = s^2 - 2sx + x^2,$$

da cui $$x = \frac{s^2-a^2}{2s} = \overline{AC};$$

$$\overline{BC} = s - x = \frac{s^2+a^2}{2s}.$$

In questa, come in quasi tutte le altre risoluzioni algebriche pervenute, manca però l'indicazione della costruzione effettiva del triangolo.

Il metodo più rapido è quello proposto da Emma Frigerio che osserva che il cateto incognito

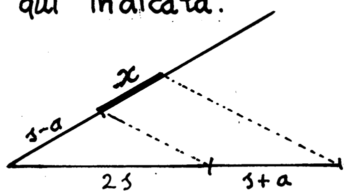
AC risulta quarto proporzionale dopo $2s$, $s+a$, $s-a$. Infatti si ha

$$\overline{AC} = \frac{(s+a)(s-a)}{2s};$$

ovvero

$$2s : (s+a) = (s-a) : \overline{AC}.$$

Se ne ricava la costruzione qui indicata.

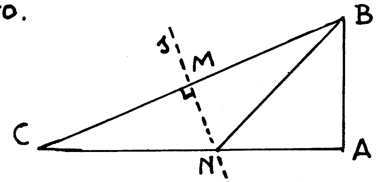


Era preferibile comunque perseguire una risoluzione per via sintetica.

Riportiamo la seguente:

RISOLUZIONE (geometrica) di Sonia Zilio del L. Cl. "T. Livio„ di Padova.

Sia AB il cateto noto e AC la somma dell'altro cateto e dell'ipotenusa. Dall'estremo A di AB conduco il segmento AC perpendicolare ad AB. L'asse s del segmento BC incontra AC in N: unisco N B. Il triangolo ABN è quello cercato.



Infatti, essendo N un punto dell'asse si ha: $NB = NC$, per cui $AN + NB = AC$.

DISCUSSIONE. Perchè la costruzione sia possibile occorre che sia ovviamente $AC > AB$: infatti in ogni triangolo ogni lato deve essere minore della somma degli altri due (Se fosse $AC < AB$ l'asse di BC non incontrerebbe il segmento AC).

* * *

Fernando Rossi del L. Cl. "Dante„ di Firenze ha inviato un'altra risoluzione geometrica che risulta caso particolare della risoluzione del Prof. A. La Paglia della successiva questione 77. Una terza risoluzione per via sintetica, è stata inviata dal Prof. F. Gogliotti, ma risulta piuttosto complessa.

QUESTIONE 77

Costruire un triangolo rettangolo di cui sono noti un cateto e la somma dell'altro cateto e del doppio dell'ipotenusa.

I RISOLUZIONE (algebrica) di Elena Marrone del L. Cl. "Manara„ di Roma

Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Posto $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = x$, $\overline{BC} = y$, $x + 2y = b$, si ha

$$\left(\frac{b-x}{2}\right)^2 = a^2 + x^2$$

e sviluppando

$$3x^2 + 2bx + 4a^2 - b^2 = 0$$

da cui

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - (12a^2 - 3b^2)}}{3}.$$

Dovendo risultare $x > 0$, si considera soltanto la soluzione positiva

$$x = \frac{-b + 2\sqrt{b^2 - 3a^2}}{3};$$

$$y = \frac{b - x}{2} = \frac{2b - \sqrt{b^2 - 3a^2}}{3}$$

Come nella questione precedente si sarebbe dovuto indicare una COSTRUZIONE GEOMETRICA *del triangolo ABC.*

Senz'altro più interessante è la risoluzione seguente:

II RISOLUZIONE (geometrica) di Alfonso La Paglia di Biella

BC cateto dato

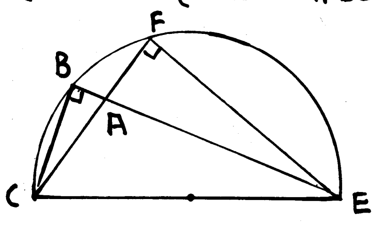
$\overline{BE} = s$ segmento "somma" dato

$C\hat{B}E$ angolo retto

$\overset{\frown}{CBE}$ semi circonferenza

$EF = 2 \cdot BC$

A è il punto di intersezione di FC e BE ($A = FC \cap BE$).



I triangoli EFA e CBA risultano simili (hanno due coppie di angoli uguali) e quindi da

$EF = 2 \cdot BC$ segue $AE = 2 \cdot AC$.

Il triangolo richiesto è ABC perchè è

$$BA + 2 \cdot AC = BA + AE = BE.$$

Se il segmento s si riferisse all'altro cateto più m volte l'ipotenusa, basterebbe assumere

$EF = m \cdot BC$ invece di

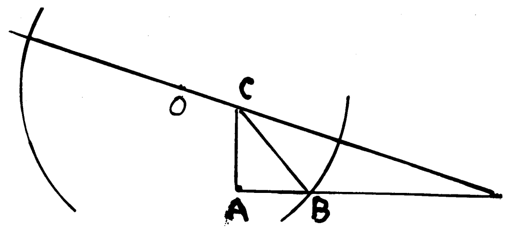
$EF = 2 \cdot BC$.

In particolare per $m = 1$ si prende $EF = BC$ e si è ricondotti alla questione precedente (num. 76) per la quale risulta anche

$$E\hat{C}A = C\hat{E}A.$$

III RISOLUZIONE (geometrica) di Emma Frigerio del L. Sc. "Einstein" di Milano

Sia AC il cateto noto del triangolo ABC, rettangolo in A. Supposto il problema risolto, si prolunghi il cateto AB di un segmento $BD = 2 \cdot BC$. Il punto B appartiene al LUOGO GEOMETRICO dei punti le cui distanze dai punti



C e D stanno nel rapporto 1 a 2. Tale luogo è la CIRCONFERENZA DI APOLLONIO, il cui diametro ha per estremi i punti che dividono internamente ed esternamente il segmento CD in due segmenti nel rapporto 1 a 2.

L'intersezione di tale circonferenza con il segmento AD determina perciò il punto B, terzo vertice del triangolo da costruire.

Sono pervenute altre due risoluzioni geometriche di G. Guarato e di F. Fogliotti, ma risultano più complesse.

QUESTIONE 78

In una sfera piena è stato praticato un foro cilindrico, *lungo* $2a$, il cui asse passa per il centro della sfera.

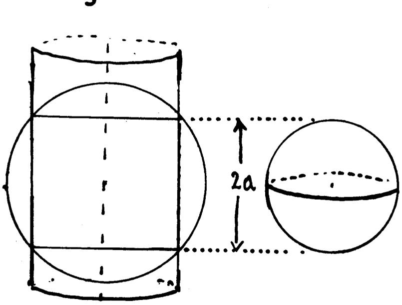
Calcolare il volume V della sfera forata.

RISOLUZIONE

di Sonia Zilio del L. Cl. "T. Livio" di Padova

Detti R il raggio della sfera,
V_1 il volume della sfera piena,
V_2 il volume del cilindro,
V_3 il volume di ciascuno dei due segmenti sferici ad una base (vedi figura)
si ha:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 ; \quad V_2 = 2\pi a (R^2 - a^2);$$



$$V_3 = \pi (R-a)^2 \cdot \frac{2R+a}{3} ;$$

perciò ne segue

$$V = V_1 - V_2 - 2V_3 =$$

$$= \cdots = \frac{4}{3}\pi a^3 ;$$

cioè il volume della sfera forata è uguale al volume di una sfera avente per diametro un segmento lungo $2a$, lunghezza del foro cilindrico.

***

Sono pervenute altre risposte che conducono allo stesso risultato, seguendo vie diverse:

Emma Frigerio trova rapidamente il risultato richiesto sottraendo dal volume del segmento sferico a due basi, di altezza $2a$, il volume del cilindro V_2.

Interessante anche una risoluzione del Prof. F. Fogliotti, condotta con il teorema di GULDINO: Il volume richiesto è ottenibile come prodotto della lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro del segmento circolare, in una rotazione completa attorno all'asse del foro cilindrico, per la area del segmento stesso.

***

Alcuni Angolisti infine hanno osservato che il risultato non dipende dal raggio R della sfera (occorre che sia $R \geq a$). Quindi... basta considerare la sfera di raggio $R = a$, il cui foro cilindrico si riduce ad un... segmento lungo $2a$ e si perviene subito al volume richiesto.

QUESTIONE 79

Il prodotto di quattro numeri interi consecutivi, aumentato di 1 è un quadrato perfetto.

L. B.

I RISOLUZIONE di Sandro Pasciuto, "XIV" L. Sc. di Roma

Indicando con n il minore dei quattro numeri si ha:

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = \cdots =$$
$$= n^4+6n^3+11n^2+6n+1 = \qquad (I)$$
$$= n^4+6n^3+9n^2+2n^2+6n+1 =$$
$$= (n^2+3n+1)^2 .$$

NOTA. Per riconoscere nel polinomio (I) un quadrato perfetto si poteva ricorrere sia all'estrazione di radice quadrata dei polinomi (*F. Fogliotti*) sia al metodo di risoluzione delle equazioni reciproche di quarto grado (*G. Militello*)

II RISOLUZIONE di Luigi Silvestri del L. Sc. di Reggio Emilia

In generale il prodotto

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \qquad (II)$$

dovrebbe essere uguale a

$$x^2-1 \quad \text{cioè} \quad (x-1)(x+1)$$

Occorre cioè mostrare che il prodotto (II) può essere scritto come prodotto di un certo numero (x) diminuito di 1, per lo stesso numero aumentato di 1.

Per ottenere ciò associo i fattori del prodotto (II) nel modo seguente:

$$[n(n+3)][(n+1)(n+2)] =$$
$$= [n^2+3n][n^2+3n+2] =$$
$$= [(n^2+3n+1)-1][(n^2+3n+1)+1] .$$

Quest'ultimo prodotto è della forma $(x-1)(x+1)$ dove $x = n^2+3n+1$.

III RISOLUZIONE di Giulio Mosca di Teramo.

Consideriamo i quattro numeri interi consecutivi

$$n, \quad n+1, \quad n+2, \quad n+3$$

come termini generici di una $\div$ di ragione 1. Indicando con x la media aritmetica dei quattro termini $\left(x = n+\frac{3}{2}\right)$, i quattro numeri si possono scrivere:

$$\left(x-\tfrac{3}{2}\right), \left(x-\tfrac{1}{2}\right), \left(x+\tfrac{1}{2}\right), \left(x+\tfrac{3}{2}\right) .$$

Operando nell'espressione che traduce l'enunciato si ha:

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)+1 =$$
$$= \left(x^2-\frac{9}{4}\right)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)+1 =$$
$$= x^4-\frac{5}{2}x^2+\frac{9}{16}+1 =$$
$$= \left(x^2-\frac{5}{4}\right)^2 = \cdots = (n^2+3n+1)^2$$

QUESTIONE 80

Dimostrare che il polinomio

$$x(x+y)(x+2y)(x+3y)+y^4 \quad (I)$$

è uguale al quadrato di un trinomio.

L.B.

PRIMA RISOLUZIONE
di Giulio Mosca di Teramo.

Si possono effettuare direttamente le operazioni e l'espressione (I) diventa:

$$x^4+6x^3y+11x^2y^2+6xy^3+y^4;$$

dissociando il termine $11x^2y^2$ nella somma di un quadrato $9x^2y^2$ e di un doppio prodotto $2x^2y^2$ si ha:

$$x^4+6x^3y+9x^2y^2+2x^2y^2+6xy^3+y^4$$

che è lo sviluppo del quadrato del trinomio

$$x^2+3xy+y^2.$$

SECONDA RISOLUZIONE
di Silvio Giordano di Cosenza
(analoga alla II risoluzione della questione precedente)

Dimostriamo che x

$$x(x+y)(x+2y)(x+3y) =$$
$$= a^2-y^4 = (a+y^2)(a-y^2)$$

Associando i quattro fattori del primo membro in modo opportuno dovremmo ottenere due soli fattori

$$a+y^2=\alpha \quad e \quad a-y^2=\beta$$

tali che $\alpha=\beta+2y^2$

E' facile verificare che

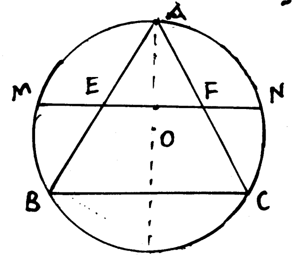
$$(x+y)(x+2y)=x(x+3y)+2y^2.$$

Valgono considerazioni conclusive analoghe a quelle riportate nella II risoluzione della questione precedente.

QUESTIONE 81

In una circonferenza è iscritto un triangolo equilatero ABC. Una corda MN (M su $\overset{\frown}{AB}$ ed N su $\overset{\frown}{AC}$) dimezza il lato AB in E e il lato AC in F.

Dimostrare che il segmento EF è la sezione aurea del segmento MF.



RISOLUZIONE
di Giuseppe Guarato di Valdagno.

Poichè i punti M, N ed E, F sono simmetrici rispetto al diametro passante per A, ed essendo $A\hat{E}F$ equilatero, si ha:

$$ME = FN \quad ed \quad EF = AF = FC .$$

Per il teorema delle corde che si incontrano internamente risulta

$$\overline{MF}\cdot\overline{FN} = \overline{AF}\cdot\overline{FC}$$

cioè

$$\overline{MF}\cdot\overline{ME} = EF^2$$

ovvero:

$$MF : EF = EF : ME \; ;$$

$$MF : EF = EF : (MF - EF).$$

Da quest'ultima proporzione continua risulta che

EF è la SEZIONE AUREA di MF.

***

Il problema si può risolvere anche ricorrendo alla similitudine dei triangoli: ad esempio *Roberta Pellini* considera i triangoli simili EMB ed FAM; *Francesco Fogliotti* considera invece i triangoli simili AME ed MCF.

Alcuni Angolisti infine hanno risolto il problema calcolando la lunghezza dei vari segmenti in questione, in funzione del raggio. Ne risulta un procedimento esatto, ma laborioso e poco elegante.

QUESTIONE 82

Trovare la condizione perchè esistano poligoni con un numero prefissato d di diagonali.

PRIMA RISOLUZIONE
(risulta dalla fusione delle risposte inviate da Sonia Zilio del L. Cl. "Livio" di Padova e da Giuseppe Guarato di Valdagno (Vi).

Si considerino n punti dati di un piano, a tre a tre non allineati; questi punti, presi a due a due, determinano

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

rette. Quindi le diagonali di un poligono di n lati sono

$$(1) \qquad \binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2} = d \, .$$

Ne segue l'equazione:

$$n^2 - 3n - 2d = 0.$$

Risolvendo e scartando la soluzione negativa si ha:

$$n = \frac{3 + \sqrt{9 + 8d}}{2} \, .$$

La condizione richiesta è che

$$\Delta = 9 + 8d$$

sia un *quadrato perfetto dispari*.

Oppure, considerando la (1), che $2d$ sia uguale al prodotto di due numeri che *differiscano di* 3.

SECONDA RISOLUZIONE
di Francesco Fogliotti di Genova.

E' nota la formula

$$d = \frac{n(n-3)}{2} \; ;$$

questa, per $n \geq 3$, dà i termini di una progressione aritmetica del secondo ordine

*Si chiama PROGRESSIONE ARITMETICA DEL SECONDO ORDINE una successione tale che la successione delle differenze di fra ogni termine e il precedente sia una progressione aritmetica ordinaria (cioè del primo ordine).

Pertanto la condizione perchè esistono poligoni con un prefissato numero d di diagonali è che d appartenga alla progressione aritmetica di secondo ordine dedotta dalla successione dei numeri naturali (per $n \geq 3$).

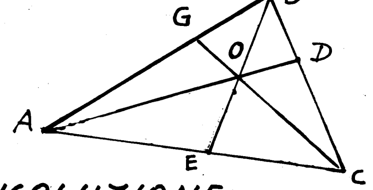
n	3	4	5	6	7	8	9	10	...
d	0	2 =	5	9	14	20	27 =	35	....

E' facile scoprire la regola per passare dalla successione (n) alla successione d.

QUESTIONE 83

Se tre segmenti AD, BE, CG, uscenti dai vertici di un triangolo ABC, si incontrano in un punto O interno al triangolo ABC, si ha la seguente relazione

$$\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OG}{CG} = 1$$



RISOLUZIONE
di Giuseppe Guaratò di Valdagno e di Francesco Fogliotti di Genova

Consideriamo la coppia di triangoli BOC e BAC; avendo la stessa base BC, sono proporzionali alle distanze dei vertici O ed A da BC, le quali, a loro volta, sono proporzionali ai segmenti OD e AD.

Quindi, per la proprietà transitiva della proporzionalità risulta:

$$\frac{C\overset{\triangle}{O}B}{C\overset{\triangle}{A}B} = \frac{OD}{AD};$$

e analogamente per le altre due coppie di triangoli:

$$\frac{A\overset{\triangle}{O}B}{A\overset{\triangle}{C}B} = \frac{OG}{CG}\ ;\ \frac{A\overset{\triangle}{O}C}{A\overset{\triangle}{B}C} = \frac{OE}{BE}$$

Si ha quindi:

$$\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OG}{CG} =$$

$$= \frac{\widehat{COB}}{\widehat{ABC}} + \frac{\widehat{AOC}}{\widehat{ABC}} + \frac{\widehat{AOB}}{\widehat{ABC}} =$$

$$= \frac{\widehat{ABC}}{\widehat{ABC}} = 1$$

QUESTIONE 84

Un tale vuole mescolare in un certo rapporto due qualità di caffè che complessivamente pesano Kg38. Per poter utilizzare tutto il caffè della prima qualità di cui dispone gli mancano Kg 12 della seconda qualità; usando invece tutto il caffè della seconda qualità di cui dispone gli rimangono Kg 8 della prima qualità.

Determinare i pesi delle due qualità di caffè e il rapporto secondo cui quel tale voleva fare il miscuglio.

RISOLUZIONE di Roberta Pallini - L. Cl. "Manara" di Roma

In entrambi i miscugli ipotizzati, il rapporto fra le due qualità di caffè è lo stesso; per cui, indicando con x ed y rispettivamente i pesi della prima e della seconda qualità posso scrivere:

(1) $\quad x : (y+12) = (x-8) : y$

da cui

$$xy = (y+12)(x-8)$$

ovvero semplificando:

$$3x - 2y - 24 = 0$$

Ne segue il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y = 38 \\ 3x - 2y = 24 \end{cases}$$

da cui risolvendo:

$$x = 20 \;,\; y = 18$$

Sostituendo questi valori nei due rapporti della proporzione (1) si ottiene il valore del rapporto dei miscugli:

$$\frac{20}{18+12} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \;;$$

$$\frac{20-8}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \,.$$

NOTA. Il rapporto richiesto si poteva ricavare direttamente dalla proporzione (1), applicando la proprietà dello scomponendo degli antecedenti e dei conseguenti (senza calcolare i valori di x e di y); infatti si ha:

$$\frac{x}{y+12} = \frac{x-8}{y} =$$

$$= \frac{x - (x-8)}{(y+12) - y} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

QUESTIONE 85

Dimostrare che esistono infiniti numeri primi. C. B.

RISOLUZIONE di Francesco Cagnolati e Luigi Silvestri del L. Sc. di Reggio Em. e di Giuseppe Militello di Roma.

La dimostrazione *"per assurdo"* fu trovata da EUCLIDE.

Supponiamo che il numero dei NUMERI PRIMI sia finito: indichiamo tali numeri con

$$p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, p_n.$$

Ogni altro numero sarà composto da tali p_k, altrimenti sarebbe PRIMO.

Consideriamo ora il numero

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$$

Questo numero è maggiore di ogni p_k e non è divisibile per alcuno di essi in quanto tale divisione dà sempre come resto 1.

Siamo quindi giunti ad un assurdo, avendo trovato un numero che non è divisibile per alcun numero primo. Ciò significa che l'ipotesi di un numero finito di numeri primi è errata. E allora: *i numeri primi sono infiniti*.

***

Il prof. F. Fogliotti aggiunge che: « si dovrebbe poter costruire una funzione $f(n)$, tale che associ ad ogni n, intero, un numero $f(n)$, primo; e questo senza necessariamente esaurire l'insieme dei numeri primi, ma in modo che a numeri interi distinti n e n' corrispondano numeri primi $f(n)$ ed $f(n')$ distinti (cioè, come si dice, la "f" risulti una funzione dai NATURALI ai PRIMI *iniettiva* ma non necessariamente *suriettiva*).

Ci pare che si possa *definire per induzione* la f nel modo seguente:

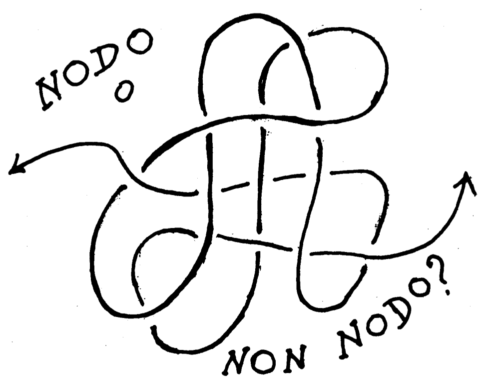
$$f(0) = 2$$
$$f(1) = f(0) + 1 = 3$$
$$f(2) = f(0) \cdot f(1) + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$
$$f(3) = f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 7 + 1 = 43.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(n+1) = [f(0) \cdot f(1) \cdot \ldots \cdot f(n) + 1]$$

dove la parentesi quadra indica che, qualora il numero corrispondente non sia primo, occorre prendere come valore della f un suo divisore primo (che, per le considerazioni precedenti, sarà senz'altro diverso da

$$f(0), f(1), f(2), \ldots\ f(n).$$

ESEMPIO

$$f(4) = f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 + 1 = 1807 = 13 \times 139.$$



TRASFORMAZIONI delle EQUAZIONI

di Pietro Castaldo.

1. Sia data l'equazione

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

di grado n in x; poniamo

$$(2) \qquad x = \varphi(z)$$

dove φ è una funzione assegnata della variabile z; avremo la nuova equazione

$$(3) \qquad F(z) = f\left[\varphi(z)\right] = 0$$

di grado $m \leq n$ in z.

Eseguendo l'operazione indicata si effettua una TRASFORMAZIONE dell'equazione data; la (1) si dice EQUAZIONE PRIMITIVA, la (3) EQUAZIONE TRASFORMATA, la (2) si dice FORMULA DI TRASFORMAZIONE.

Un esempio classico di trasformazione è quello che si adopera per risolvere l'equazione biquadratica

$$a x^4 + b x^2 + c = 0.$$

Ponendo $x = \sqrt{z}$, si ottiene l'equazione trasformata

$$a z^2 + b z + c = 0$$

di secondo grado in z.

Nella pratica hanno grande importanza particolari trasformazioni dette LINEARI.

2. Data l'equazione

$$(\mathrm{I}) \quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

la più generale trasformazione lineare è quella che si ottiene ponendo

$$(\mathrm{II}) \qquad x = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \text{dove } \Delta = ad - bc \neq 0.$$

La trasformazione (II), nota come TRASFORMAZIONE OMOGRAFICA, si usa indicare col simbolo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ;$$

Il determinante Δ si dice MODULO di TRASFORMAZIONE e si suppone diverso da zero, perchè per $\Delta = 0$ viene a mancare la corrispondenza fra le variabili x e z e la trasformazione sarebbe ILLUSORIA O DEGENERE.

Per dare un esempio consideriamo l'equazione

$$2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0 ;$$

ponendo

$$x = \frac{z-1}{z+1} ,$$

cioè effettuando la trasformazione

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ di modulo } \Delta = 2,$$

si ha la trasformata:

$$z^3 - z^2 - 6z = 0$$

le cui radici sono

$$z_1 = -2 , \quad z_2 = 0 , \quad z_3 = 3,$$

mentre le radici della primitiva sono: $x_1 = 3$; $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

3. Ponendo nella (II)

$$a = 1 , \quad b = h , \quad c = 0 , \quad d = 1$$

si ha la trasformazione

$$\text{(III)} \qquad x = z + h,$$

di modulo $\Delta = 1$, che si chiama TRASLAZIONE.

In particolare, se nella (III) si pone

$$h = -\frac{a_{n-1}}{n \cdot a_n} ,$$

cioè se ad h si attribuisce il valore della media aritmetica delle radici della primitiva, la trasformata sarà priva del secondo termine, cioè del termine di grado $n-1$.

(Da ricordare che qualunque sia l'equazione data la somma delle radici è sempre data dal coefficiente del secondo termine cambiato di segno diviso per il coefficiente del primo termine; inoltre se n è il grado dell'equazione, per il teorema fondamentale dell'algebra, l'equazione ammette sempre n radici reali o complesse).

Così, data l'equazione

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

poichè in questo caso è

$$n = 3, \quad a_n = 1 , \quad a_{n-1} = -6 \quad \text{si ha:}$$

$$-\frac{a_{n-1}}{n \cdot a_n} = 2 ;$$

per cui ponendo

$$x = z + 2$$

si ottiene la trasformata

$$z^3 - z = 0$$

che è priva del termine di secondo grado. Le radici di quest'ultima sono

$z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$;
quindi le radici della primitiva sono
$$x_1 = +1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$$

***

Un'applicazione notevole si ha nella risoluzione dell'equazione
$$x^2 + px + q = 0$$
nella quale
$$a_n = 1,\ a_{n-1} = p \ ;\ n = 2;$$
onde
$$-\frac{a_{n-1}}{n \cdot a_n} = -\frac{p}{2}$$
Ponendo
$$x = z - \frac{p}{2}$$
si trova la trasformata
$$z^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0$$
le cui radici sono
$$z = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$
e quindi quelli della primitiva sono
$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\ .$$

4. Ponendo nella (II)
$$a = K,\ b = 0,\ c = 0,\ d = 1$$
si ha la trasformata
$$\text{(IV)} \qquad x = Kz$$
di modulo $\Delta = K$, che si dice PROPORZIONALITA'.

In particolare se la (1) è una equazione a coefficienti interi, ponendo
$$K = \frac{1}{a_n},$$
la trasformata sarà ancora a coefficienti interi, col primo coefficiente uguale all'unità, come è facile verificare.
Così, data l'equazione
$$3x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0,$$
effettuando la proporzionalità
$$x = \frac{z}{3}, \quad \text{si ottiene}$$
$$z^3 - z^2 - 9z + 9 = 0$$
le cui radici sono
$$z_1 = -3,\ z_2 = 1,\ z_3 = 3$$
e quindi le radici della primitiva sono
$$x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = 1,\ x_3 = \frac{1}{3}$$

***

Un'altra particolare proporzionalità si ha ponendo $K = -1$; in tal caso $x = -z$ muta ogni radice $x = \alpha$ della primitiva nella radice $z = -\alpha$ della trasformata. Così data l'equazione
$$x^2 + 3x - 10 = 0$$
ponendo $x = -z$ si ha l'equ.
$$z^2 - 3z - 10 = 0$$
le cui radici sono
$$z_1 = -2\ ;\ z_2 = 5,$$
mentre quelle della primitiva sono
$$x_1 = 2\ ,\ x_2 = -5.$$

5. Ponendo nella (II),

$a=0$, $b=1$, $c=1$, $d=0$
si ha la trasformata:

$$(V) \qquad x=\frac{1}{z}$$

di modulo $\Delta=-1$
detta RECIPROCITA'.
La (V) muta ogni radice $x=\alpha$ della primitiva in una radice $z=\frac{1}{\alpha}$ della trasformata.
Così, data l'equazione

$$6x^4-x^3-7x^2+x+1=0$$

ponendo $x=\frac{1}{z}$
si ottiene

$$z^4+z^3-7z^2-z-6=0$$

che è la reciproca della primitiva. Le sue radici sono

$$z_1=-3,\ z_2=-1,\ z_3=1,\ z_4=2,$$

mentre le radici della primitiva sono

$$x_1=-\frac{1}{3},\ x_2=-1,\ x_3=1,\ x_4=\frac{1}{2}.$$

Le (III), (IV), (V) si dicono TRASFORMAZIONI LINEARI SEMPLICI.

* * *

6. Consideriamo l'insieme E di tutte le trasformazioni lineari. Per gli elementi di questo insieme si può stabilire una *legge di composizione interna* di carattere moltiplicativo e che diremo PRODOTTO. Rispetto a questa *legge* l'insieme E è CHIUSO; in altri termini il prodotto di due trasformazioni lineari è una trasformazione lineare.

Infatti, supponiamo che una prima trasformazione lineare sia data da

$$x=\frac{az+b}{cz+d};$$

una seconda trasformazione sia data da

$$z=\frac{a't+b'}{c't+d'}.$$

Sostituendo il valore di z nell'espressione di x, si trova

$$x=\frac{(aa'+bc')t+(ab'+bd')}{(ca'+dc')t+(cb'+dd')}$$

che è pure una trasformazione lineare.

Dunque, ponendo

$$T_1=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad T_2=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix},$$

avremo, per *definizione*,

$$(VI) \quad T=T_2\cdot T_1=\begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}.$$

Così, se

$$T_1=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\quad T_2=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

si ha:

$$T = T_2 \cdot T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3+3 & 12+1 \\ 2+6 & 8+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 13 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

7. Si hanno le seguenti proprietà:

P_1. *In generale il prodotto di due trasformazioni lineari non gode la proprietà commutativa.*

Infatti, applicando la regola indicata dalla (VI) si ha:

$$T' = T_1 \cdot T_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{pmatrix}$$

e in generale è $T' \neq T$.

Così, se $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, si ha:

$$T_2 \cdot T_1 = \begin{pmatrix} 3+2 & 2+4 \\ 6+1 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 6 \end{pmatrix};$$

$$T_1 \cdot T_2 = \begin{pmatrix} 3+4 & 6+2 \\ 1+4 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},$$

e come si vede $T_2 \cdot T_1 \neq T_1 T_2$.

Per questo motivo nel considerare il prodotto di due o più trasformazioni lineari *l'ordine* dei fattori è *essenziale*.

P_2. *Il prodotto delle trasformazioni lineari gode la proprietà associativa.*

Illustreremo questa proprietà con un esempio.

Ponendo

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; T_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

si ha:

$$T_2 \cdot T_1 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}; T_3 \cdot (T_2 \cdot T_1) = \begin{pmatrix} 6 & 38 \\ 6 & 46 \end{pmatrix};$$

$$T_3 \cdot T_2 = \begin{pmatrix} 2 & 18 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}; (T_3 \cdot T_2) \cdot T_1 = \begin{pmatrix} 6 & 38 \\ 6 & 46 \end{pmatrix};$$

onde

$$T_3 \cdot (T_2 \cdot T_1) = (T_3 \cdot T_2) \cdot T_1 .$$

P_3. *Nell'insieme E esiste un elemento* neutro *che diremo elemento* unità *e che indicheremo con $\mathcal{U}$.*

Questo elemento $\mathcal{U}$ è una particolare trasformazione lineare per la quale si ha:

$$\forall T \in E \ : \ \mathcal{U} \cdot T = T \cdot \mathcal{U} = T .$$

L'elemento unitario lo possiamo indicare con il simbolo

$$\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

dove K è un numero qualunque. Infatti, per la (VI), se

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

eseguendo i prodotti si ha

$$\mathcal{U} \cdot T = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aK & bK \\ cK & dK \end{pmatrix}$$

$$T \cdot \mathcal{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ka & Kb \\ Kc & Kd \end{pmatrix}$$

e, siccome, qualunque sia K, risulta:

$$\frac{akz+bk}{ckz+dk}=\frac{kaz+kb}{kcz+kd}=\frac{az+b}{cz+d}$$

si vede che

$$\mathcal{U}\cdot T = T\cdot\mathcal{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = T.$$

Allora per semplicità è lecito porre $\mathcal{U}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Così, se $T=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

P_4. *Ogni elemento dell'insieme* E *ammette un elemento* simmetrico *che diremo* inverso; *cioè ad ogni trasformazione lineare corrisponde una trasformazione lineare* inversa.

Infatti, dalla (II) risolvendo rispetto a z, si ha

$$(\mathrm{VII})\qquad z=\frac{-dx+b}{cx-a}.$$

Dunque, data la trasformazione lineare

$$T=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

porremo per definizione

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

E' chiaro che $T^{-1}\cdot T=\mathcal{U}$. Infatti si ha:

$$\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha pure

$$(T^{-1})^{-1}=T;\quad \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

P_5. *L'insieme* E *delle trasformazioni lineari rispetto alla legge di composizione interna definita* prodotto, *è un* gruppo non abeliano.

Infatti, in un insieme E una legge di composizione interna definisce per l'insieme una struttura di GRUPPO, se si verificano i seguenti fatti:

1) La legge è associativa. *(proprietà P_2)*.

2) L'insieme possiede un elemento neutro *(proprietà P_3)*

3) Ogni elemento dell'insieme, rispetto alla legge, ammette un elemento simmetrico; cioè è possibile la simmetrizzazione *(proprietà P_4)*.

Dunque l'insieme E è un gruppo.

Un gruppo si dice *abeliano* se la legge che lo definisce è *commutativa*; ma *(proprietà P_1)* il prodotto delle trasformazioni lineari, in generale, non è commutativo; dunque il gruppo delle trasformazioni lineari non è abeliano.

Si ha ancora la seguente proprietà:

P_6. Una trasformazione lineare data dalla (II) si può sempre considerare come il prodotto di trasformazioni lineari semplici.

Infatti, ponendo

$$x = z_1 + \frac{a}{c},$$

$$z_1 = -\frac{ad-bc}{c} z_2 \; ; \quad z_2 = \frac{1}{z_3} \; ; \quad z_3 = z_4 + d \; ; \quad z_4 = cz ,$$

dove la prima e la quarta sono TRASLAZIONI,
la seconda e la quinta PROPORZIONALITÀ,
la terza è una RECIPROCITÀ,
si trova successivamente:

$$z_3 = cz + d \; ; \quad z_2 = \frac{1}{cz+d} \; ; \qquad z_1 = \frac{bc-ad}{c(cz+d)} \; ;$$

$$x = \frac{bc-ad}{c(cz+d} + \frac{a}{c} = \frac{bc-ad+acz+ad}{c(cz+d)} \; ;$$

cioè

$$x = \frac{az+b}{cz+d} .$$

E si ritrova la II.

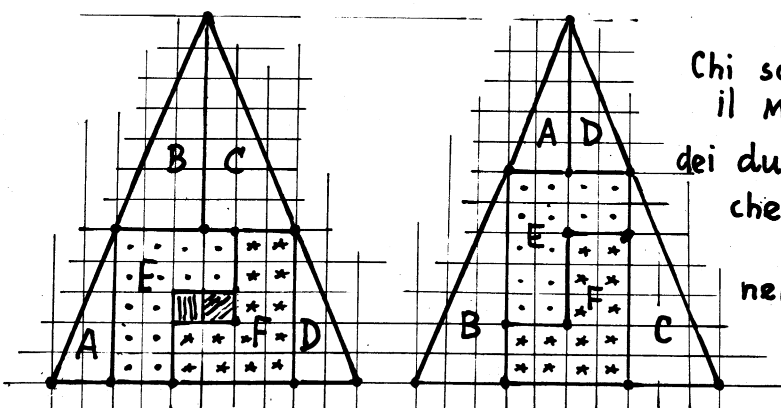


fig. a) fig. b)

Chi sa spiegare il MISTERO dei due quadratini che risultano IN PIU' nella fig. a) ?

Sui PUNTI NOTEVOLI del triangolo e sulla RETTA DI EULERO

Esponiamo in questa nota alcune interessanti proprietà dei punti notevoli del triangolo, che di solito non si trovano nei testi scolastici di geometria o che sono accennati solamente negli esercizi.

Ricordiamo intanto che

il punto d'incontro delle tre altezze di un triangolo dicesi *ORTOCENTRO*;

il punto d'incontro degli assi dei tre lati dicesi *CIRCUMCENTRO*;

il punto d'incontro delle tre mediane dicesi *BARICENTRO*.

L'ortocentro è interno od esterno al triangolo secondo che questo è acutangolo od ottusangolo; coincide con il vertice dell'angolo retto se il triangolo è rettangolo.

Il circumcentro è il centro del cerchio circoscritto ed è interno od esterno secondo che il triangolo è acutangolo od ottusangolo; se il triangolo è rettangolo il circumcentro coincide con il punto medio dell'ipotenusa;

Il baricentro, sempre interno, divide ciascuna mediana in due parti, tali che la parte compresa fra il vertice e il baricentro è doppia dell'altra.

* * *

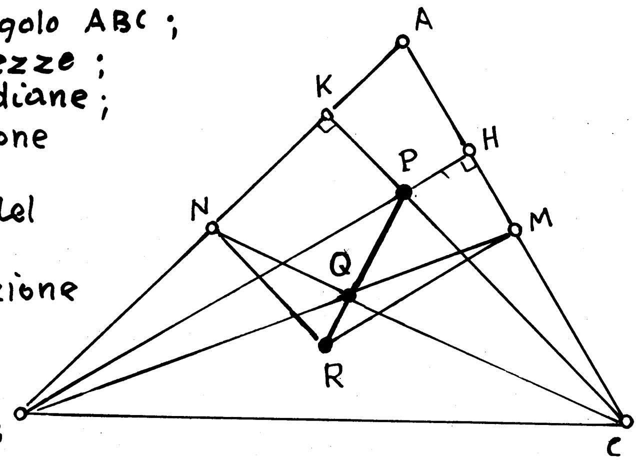
Enunciamo e dimostriamo le seguenti proprietà:

1) L'ortocentro, il baricentro e il circumcentro di un triangolo sono allineati (RETTA DI EULERO)

2) La distanza fra l'ortocentro e il baricentro è doppia della distanza fra il baricentro e il circumcentro.

3) Il segmento dell'altezza compreso tra un vertice e l'ortocentro è doppio della distanza del circumcentro dal lato corrispondente.

I. Sia il triangolo ABC;
BH e CK due altezze;
BM e CN due mediane;
il punto P intersezione delle due altezze è l'*ortocentro* del triangolo;
il punto Q intersezione delle due mediane è il *baricentro* del triangolo.



Prolunghiamo PQ di un segmento $QR = \frac{1}{2} PQ$ e uniamo R con M ed N:

i due segmenti RM ed RN risultano perpendicolari rispettivamente ad AC e AB.

Infatti i triangoli BPQ e MRQ sono simili perchè si ha

$$B\hat{Q}P = M\hat{Q}R \quad \text{e} \quad BQ : QM = PQ : QR = 2:1.$$

Allora

$$B\hat{P}Q = Q\hat{R}M,$$

e quindi

BH e RM sono parallele.

Ma BH è perpendicolare ad AC, sarà pure RM perpendicolare ad AC.

Analogamente sono simili i triangoli RQN e PQC, perchè gli angoli RQN e PQC sono uguali e sono compresi fra lati proporzionali. Ne segue

$$Q\hat{N}R = Q\hat{C}P,$$

e quindi RN è parallela a CK; ma CK è perpendicolare ad AB, allora RN sarà pure perpendicolare ad AB.

Allora il punto R è il *circumcentro* del triangolo ABC. Rimane così dimostrata la 1ª proprietà.

II). Per la costruzione fatta risulta che $PQ = 2 \cdot QR$, quindi la distanza PQ tra l'ortocentro e il baricentro è doppia di QR, distanza fra il baricentro e il circumcentro.

III). Il segmento CP dell'altezza CK, compreso fra il vertice C e l'ortocentro P, è doppio di RN, distanza del circumcentro dal lato corrispondente AB.

Basta considerare infatti i due triangoli PQC e RQN che sono simili (I criterio di similitudine). Ne segue

$$CP : NR = PQ : RQ.$$

Siccome $PQ = 2 \cdot QR$, per costruzione, sarà pure $CP = 2 \cdot RN$.

***

I casi particolari del triangolo rettangolo ed ottusangolo non presentano difficoltà.

P. I.

Curiosità sui quadrati di alcuni numeri.

$144 =$	12^2	21^2	$= 441$
$169 =$	13^2	31^2	$= 961$
$12544 =$	112^2	211^2	$= 44521$
$12769 =$	113^2	311^2	$= 96721$
$14884 =$	122^2	221^2	$= 48841$
$1236544 =$	1112^2	2111^2	$= 4456321$
$1256641 =$	1121^2	1211^2	$= 1466521$
$1238769 =$	1113^2	3111^2	$= 9678321$
$1258884 =$	1122^2	2211^2	$= 4888521$
$1468944 =$	1212^2	2121^2	$= 4498641$

F. Fogliotti

RISOLUTORI delle QUESTIONI	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
	★ indica l'invio di due o più risoluzioni									
Agrosi Aniello - Diso	•	•								
Alberici Marco - L. Sc. - Parma	•	•								
Cagnolati Francesco - L. Sc. - Reggio Emilia	•			•	•					•
Casanova M. Cristina - L. Cl. - Roma	•	•								
Cecchetto Giampaolo - L. Sc. - Ceregnano	•									
Colajacono Gianluigi - L. Sc. - Colleferro	•	•								
Da Dalt M. Grazia - L. Cl. - Ancona	•			•	•					
Fogliotti Francesco - Genova - Samperd.	★	★	•	★	★	★	•	•	•	•
Frigerio Emma - L. Sc. - Milano	★	★	•	•	•					
Giordano Silvio - L. Sc. - Cosenza			•	★	★	•	•	•	•	
Guarato Giuseppe - Valdagno	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
La Paglia Alfonso - Biella	•	•								
Marrone Elena - L. Cl. - Roma	•	•		•	•	•	•		•	
Militello Giuseppe - Roma			•	•	•	•	★		•	•
Mosca Giulio - Teramo			•	★	★	•			•	
Pasciuto Alessandro - L. Sc. - Roma	•		•	•	•	•		•		
Pellini Roberta - L. Cl. - Roma	•	•		•	•	•			•	
Prota Gaetano - L. Sc. - Manfredonia	•	•								
Silvestri Luigi - L. Sc. - Reggio Emilia				•	•				•	•
Venturelli Rosangela - Ist. Mag. - Gussago						•				
Zilio Sonia - L. Cl. - Padova	•		•	•	•	•	★		•	•

Il monumento "indecidibile" di Roger Hayward

Figura indecidibile:
figura di un oggetto che non può esistere.
Il cervello, non essendo in grado di dare un senso a quanto percepisce, viene posto in uno strano stato confusionale...

dall'articolo: le illusioni ottiche
di Martin Gardner
- Le Scienze - Num 44 - aprile 1972.

SPEDIZIONE IN ABBONAMENTO POSTALE GRUPPO IV

Coloro che trattengono ANGOLO ACUTO sono pregati di inviare con sollecitudine la loro quota di abbonamento

PER FAVORE, NON CESTINATE

Se questo periodico non vi interessa, vi preghiamo di passarlo ad un appassionato che voglia sottoscrivere l'abbonamento oppure di respingere le copie ricevute al MITTENTE:
ANGOLO ACUTO - Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

AMICI DI "ANGOLO ACUTO"

SOSTENITORI

Prof. Aloe Carmelo - COSENZA
Biblioteca della "Magistrale" - LOCARNO
Prof. Baraldi Maria - PRADALUNGA
Prof. Caltagirone Biagio - SUTERA
Prof. Capaccioli Carlo - FIRENZE
Prof. Donati Santi - MESSINA
Prof. Ercoli Osvaldo - VITERBO
Prof. Forte Pia - BRESCIA
Prof. Fiorentini Flora - FIRENZE
Prof. Fenili Paola - FIRENZE
Prof. Giaconi Sauro - PISA
Ing. Pallai Giovanni - ROMA
Prof. Panerai Tullia - FIRENZE
Prof. Ricci Sergio - FIRENZE

Nel prossimo numero una NOTA DIDATTICA di Claudio Bernardi «I criteri di divisibilità e la prova del nove»

Le quote di ABBONAMENTI per il 1973 sottoscritti entro il 31 dicembre 72 rimangono invariate.

ANGOLO ACUTO rinnova l'appello alle Autorità Scolastiche ed ai Dirigenti di Case Editrici e di Enti vari perchè vogliano inviarci premi da assegnare ai Giovani che avranno maggiormente impegnato le loro forze intellettuali nelle interessanti gare proposte nella PALESTRA e nelle varie rubriche.

DIFFONDETE "ANGOLO ACUTO"
RICHIEDETECI COPIE DI SAGGIO
PER I VOSTRI AMICI O INVIATECI
I LORO INDIRIZZI ESATTI

A chi ci procurerà DIECI nuovi abbonati invieremo l'abbonamento gratuito.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 gennaio 1970
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso*
Stampato dalla Tipolitografia "Gino Capponi" - Via G. Capponi, 27 - Firenze

Associato all'USPI
Unione Stampa Periodica Italiana