L'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

ANNO III - 1972

NOVEMBRE-DICEMBRE

6

Periodico bimestrale
a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

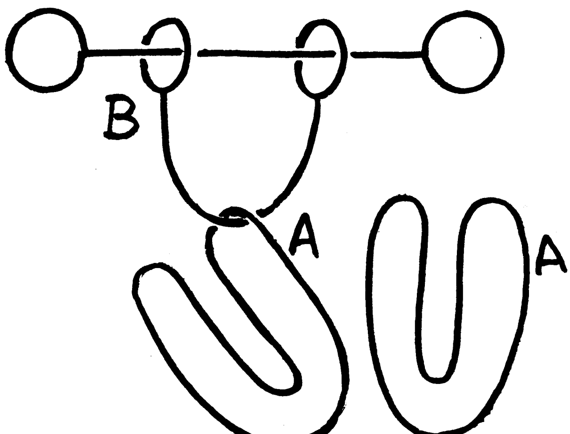
spedizione in abb. postale - gruppo IV
conto corrente postale 5/27919

ABBONAMENTI PER IL 1973

" benemerito	L. 1400
" sostenitore	L. 2000
Abb. ordinario	L. 3000
Studenti	L. 5000

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio.

Divagazione topologica



Costruite con filo di ferro robusto due modelli rigidi, uno uguale al circuito A e un altro uguale al circuito B.

Successivamente provate a trovare un sistema rapido di manovre sufficienti per agganciarli e per separarli nuovamente.

Provate con calma: la soluzione è semplice.

« Angolo acuto » augura BUON NATALE e BUON ANNO a tutti i suoi Abbonati e Sostenitori.

LA PALESTRA DELLE GARE

AVVERTENZE IMPORTANTI PER I SOLUTORI. Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte. Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale. Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età. Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE
entro il 20 febbraio 1973

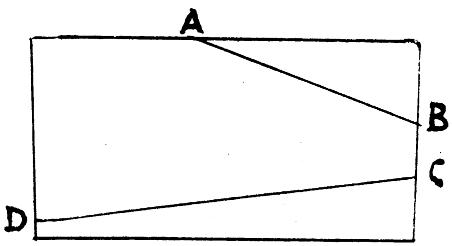
Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori. Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.

QUESTIONI PROPOSTE

(Con le questioni proposte in questo fascicolo ha inizio la QUARTA GARA relativa all'anno scolastico 1972-73)

QUESTIONE 119

Due rette AB e CD (v. fig.) si incontrano fuori del foglio. Determinare la bisettrice della coppia di angoli acuti formati dalle due rette mediante costruzioni eseguite sul foglio stesso.



QUESTIONE 120

In un cerchio dato inscrivere un quadrilatero avente i lati consecutivi in progressione aritmetica con la ragione uguale al lato minore.

E' richiesta la costruzione grafica.

A. La Paglia

QUESTIONE 121

Dato il triangolo ABC, prolungare i lati AB e AC di due segmenti BM e CN uguali, in modo che il triangolo AMN risulti doppio del triangolo dato ABC.

A. La Paglia

QUESTIONE 122

Costruire un triangolo rettangolo noti il raggio del cerchio inscritto e l'altezza relativa alla ipotenusa.

QUESTIONE 123

Due circonferenze complanari hanno il centro rispettivamente nei punti C e D e si secano nei punti A e B.

Condotte per uno di questi punti (per esempio per A) le tangenti alle due circonferenze si ottengono le corde AM e AN (AM   AD e AN   AC)

Dimostrare che i due triangoli ABM ed NBA sono simili.

RISOLUZIONI delle QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 86

Costruire un triangolo dati un vertice, l'ortocentro e il circoncentro.

PRIMA RISOLUZIONE

di Sergio Giampaoli di Terni e di Renzo Toso di Udine.

Ricordiamo la nota proprietà dei punti notevoli di un triangolo. (*)

In un triangolo qualsiasi ABC

1) l'ortocentro M, il baricentro G e il circocentro O sono allineati. (RETTA DI EULERO)

2) la distanza $\overline{MG}$ è doppia della distanza $\overline{GO}$; cioè

$$\overline{MG} = 2 \cdot \overline{GO}$$

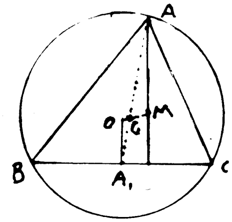
Si descriva la circonferenza di centro O e raggio OA. Si unisca M con O e si prenda su MO il punto G tale che sia $\overline{MG} = 2 \cdot \overline{OG}$.

Per la proprietà sopra ricordata G coincide con il baricentro del triangolo cercato.

Perciò, unito A con G, si prenda sul prolungamento di AG il punto A_1 tale che sia $GA_1 = \frac{1}{2} AG$. Sicchè A_1 risulta punto medio del lato BC.

Si unisca O con A_1, si conduca per A_1 la retta s perpendicolare ad OA_1 e siano B e C le intersezioni di s con la circonferenza: Il triangolo ABC è quello richiesto.

Perchè il problema ammetta soluzione è necessario che il punto A_1 sia interno al cerchio circoscritto.



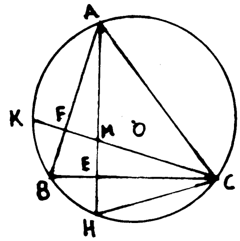
(*) Confronta anche Angolo acuto III, 4/5 pag. 24: *Sui punti notevoli di un triangolo e sulla retta di* EULERO

SECONDA RISOLUZIONE

di Mario De Nino di Benevento

La questione si risolve facilmente col metodo di *analisi*.

Sia ABC il triangolo richiesto, O il circoncentro, M l'ortocentro; AE e CF le altezze, prolungate fino ad incontrare la circonferenza rispettivamente nei punti H e K.



Dai triangoli rettangoli ABE, FBC che hanno l'angolo B in comune si deduce

$$B\hat{A}E = F\hat{C}B$$

quindi

$$\overset{\frown}{BH} = \overset{\frown}{BK}$$

da cui

$$B\hat{C}H = B\hat{C}K.$$

Ne segue l'uguaglianza dei due triangoli rettangoli MEC, ECH e quindi che $\overline{ME} = \overline{EH}$.

Se ne deduce la seguente costruzione:

Si tracci la circonferenza di centro O e raggio OA. Si unisca A con M e sia H l'intersezione di AM con la circonferenza descritta. Detto E il punto di mezzo di MH, si conduca la perperdicolare a ME. Detta perpendicolare determina sulla circonferenza i punti B e C.

Il triangolo ABC è quello richiesto.

Sono pervenute due ottime risposte inviate da Giuseppe Guarato (VALDAGNO) e da Francesco Fogliotti (Genova-Sampierdarena).

QUESTIONE 87

Dimostrare che

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\dots+(-1)^{n-1}\cdot n^2 = (-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2},$$

seguendo prima la via diretta e poi quella in cui si applica il PRINCIPIO DI INDUZIONE.

RISOLUZIONE

di Sonia Zilio del L.CL. di PADOVA

a) METODO DIRETTO.

Per n PARI è:

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\dots+(n-1)^2-n^2 =$$

(riducendo in prodotti le coppie delle differenze di due quadrati)

$$=(1+2)(1-2)+(3+4)(3-4)+\dots+(n-1+n)(-1)=$$

$$=-3-7-11-\dots-(2n-1)=$$

(essendo questa una progressione aritmetica) è

$$=\frac{-3-(2n-1)}{2}\cdot\frac{n}{2}=\frac{-(n+1)n}{2}=$$

$$=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

Per n DISPARI è:

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\dots+(n-2)^2-(n-1)^2+n^2=$$

$$=\frac{-n(n-1)}{2}+n^2=$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

b) APPLICANDO IL PRINCIPIO DI INDUZIONE.

L'uguaglianza è soddisfatta per $n=1$; infatti è $1^2=1$.

Supposta la relazione valida per n, dimostro che è valida per $n+1$; cioè che

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\dots+(-1)^{n-1}\cdot(n+1)^2 = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Per n PARI è:

$$\underbrace{1^2-2^2+3^2-4^2+\dots+n^2}-(n+1)^2=$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}-(n+1)^2=$$

$$=-\frac{n^2+3n+2}{2}=-\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Per n DISPARI è:

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\dots-n^2+(n+1)^2=$$

$$=\frac{-n(n+1)}{2}+(n+1)^2=$$

$$=\frac{n^2+3n+2}{2}=\frac{(n+1)(n+2}{2}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{(n+1)(n+2}{2}$$

Ottime risposte sono state inviate da Giuseppe Militello di ROMA, da Giuseppe Guarato di NAPOLI e da Francesco Fogliotti di GE-Sampierdarena.

QUESTIONE 88

Dato l'arco AB, quarta parte di una circonferenza di centro O e di raggio r, sia M un punto dell'arco stesso, sia P il punto d'intersezione dell'asse del segmento AM con la semiretta BM e sia H la proiezione ortogonale di P sulla semiretta OA.

Determinare la posizione di M in modo che sia:

$$\frac{2\cdot\overline{OH}+3\cdot\overline{PH}}{\overline{OM}}=K \qquad (I)$$

essendo K un numero reale positivo.

RISOLUZIONE

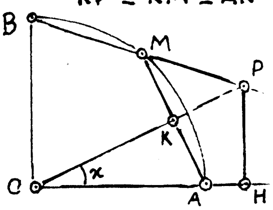
di Francesco Fogliotti di GE-Sampierd.

Si ha subito

$$A\hat{M}B = 135°$$

(angolo inscritto in un quadrante). quindi il triangolo MKP risulta rettangolo e isoscele, pertanto

$$\overline{KP} = \overline{KM} = \overline{AK}$$



Posto $A\hat{O}P = x$ con $0 \leq x \leq 45°$, si ha:

$$\overline{AK} = r\,\text{sen}\,x \;;\; \overline{OK} = r\cos x,$$

$$\overline{OP} = \overline{OK}+\overline{KP} = r(\text{sen}\,x+\cos x);$$

$$\overline{OH} = \overline{OP}\cos x = r\cos x(\text{sen}\,x+\cos x);$$

$$\overline{PH} = \overline{OP}\,\text{sen}\,x = r\,\text{sen}\,x(\text{sen}\,x+\cos x);$$

Sostituendo nella (I) si ottiene:

$$\frac{2r\cos x(\text{sen}\,x+\cos x)+3r\,\text{sen}\,x(\text{sen}\,x+\cos x)}{r}=K$$

cioè $3\,\text{sen}^2x+5\,\text{sen}\,x\cos x+2\cos^2x=K$

e moltiplicando ambo i membri per

$$\frac{1}{\cos^2x}=1+\text{tg}^2x$$

si ha: $$3\text{tg}^2x+5\text{tg}\,x+2=K(1+\text{tg}^2x) \qquad (2)$$

cioè:

$$(3-K)\text{tg}^2x+5\,\text{tg}\,x+2-K=0$$

con $0\leq \text{tg}\,x\leq 1$.

Si ottiene facilmente:

$\Delta\geq 0$	per	$\frac{5-\sqrt{26}}{2}\leq K\leq\frac{5+\sqrt{26}}{2}$
1° coeff. ≥ 0	per	$K\leq 3$
$f(0)\geq 0$	per	$K\leq 2$
$f(1)\geq 0$	per	$K\leq 5$
$0<\Sigma$	per	$K>3$
$\Sigma<1$	per	$K<3$ e $K>\frac{11}{2}$.

Il problema ha UNA soluzione per $2\leq K\leq 5$.

***

Risolvendo la (2) rispetto a K e ponendo $Y=K$ e $X=\text{tg}\,x$ si ha l'equazione

$$Y=\frac{3X^2+5X+2}{1+X^2}$$

che si propone allo studio degli Angolisti.

Hanno inviato ottime risposte: Giuseppe Guarato, Giuseppe Militello e Francesco Di Tempora.

A PAGINA 6 RIPORTIAMO LA RIPRODUZIONE FOTOGRAFICA della RISOLUZIONE di G. GUARATO

QUESTIONE 89

Dimostrare sia per mezzo dei diagrammi di Venn, sia mostrando l'uguaglianza degli elementi che

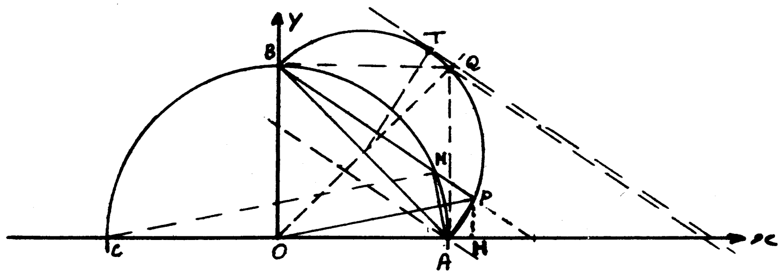
$$C_A(B\cup C)=(C_A\,B)\cap(C_A\,C);$$

$$C_A(B\cap C)=(C_A\,B)\cup(C_A\,C).$$

(FORMULE di DE MORGAN)

RISOLUZIONE a pag. 7

Ad "Angolo Acuto" Firenze
Risoluzione questione n° 88



Considerata la semicirconferenza $A\widehat{B}C$, l'asse OP di AM risulterà parallelo alla corda CM. Essendo OP bisettrice di $A\hat{P}B$ sarà:

$A\hat{P}O = O\hat{P}B = C\hat{M}B = O\hat{A}B = 45° \longrightarrow A\hat{P}B = 90°$

Essendo $A\hat{O}M \leq 90°$ allora $A\hat{O}P \leq 45°$. Segue che il luogo dei punti P sarà il quadrante $\widehat{AQ}$ della semicirconferenza esterna di diametro AB.

Assunto il sistema cartesiano ortogonale di assi OA e OB e dette x e y le coordinate di P e posto $\overline{OA} = r$, la relazione assegnata dal problema sarà:

1) $2x + 3y = Kr$

Al variare di K la 1) rappresenta il fascio di rette parallele inclinato sul semiasse positivo delle ascisse di un angolo la cui tangente è $-2/3$.

La retta del fascio tangente alla semicirconferenza luogo di P, essendo $-2/3 > -1$ (-1 = parametro della tangente in Q) la tocca in un punto T esterno al quadrante $\widehat{AQ}$; se ne deduce che le rette del fascio 1) incontreranno il quadrante $\widehat{AQ}$ in un solo punto quando variano fra quelle che passano per A e per Q. Sostituendo in 1) le coordinate di $A(r;0)$ e di $Q(r;r)$ si troveranno i valori estremi in cui deve variare K:

$2r = Kr$ e $5r = Kr$

Si avrà quindi una sola soluzione per

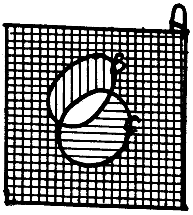
$2 \leq K \leq 5$

Risoluzione di Giuseppe Guarato
Via A. Volta - 7 - 36078 - Valdagno (VI)

QUESTIONE 89 (enunciato a pag. 5)

Ad "Angolo Acuto" Firenze

Risoluzione questione n° 89



1) I Dal diagramma appare che $B \cup C$ è la parte bianca o segnata da sole orizzontali o da sole verticali e quindi $C_A(B\cup C)$ è la parte del diagramma segnato sia da orizzontali che da verticali. D'altra parte $C_A B$ è rappresentata dalla zona del diagramma segnata dalle orizzontali e $C_A C$ è quella segnata dalle verticali e pertanto $(C_A B)\cap(C_A C)$ è la parte segnata sia da orizzontali che da verticali. Segue $C_A(B\cup C) = (C_A B)\cap(C_A C)$ (I^a formula)

II - Sempre dal diagramma $B\cap C$ è la parte bianca e $C_A(B\cap C)$ è quindi la parte attraversata da qualche verticale o da qualche orizzontale. Ripetendo quanto detto in I per le zone di $C_A B$ e $C_A C$ è evidente che $(C_A B)\cup(C_A C)$ è dove ci sono comunque orizzontali o verticali. Segue $C_A(B\cap C)=(C_A B)\cup(C_A C)$ (II formula)

2)

I Se $x \in C_A(B\cup C) \Rightarrow x \notin B\cup C \Rightarrow x\notin B$ e $x \notin C \Rightarrow x \in C_A B$ e $x \in C_A C \Rightarrow x \in (C_A B)\cap(C_A C) \Rightarrow C_A(B\cup C) \subset (C_A B)\cap(C_A C)$

D'altra parte se: $x\in(C_A B)\cap(C_A C) \Rightarrow x \in C_A B$ e $x \in C_A C \Rightarrow$
$\Rightarrow x\notin B$ e $x \notin C \Rightarrow x \notin C\cup B \Rightarrow x \in C_A(B\cup C) \Rightarrow$
$\Rightarrow (C_A B)\cap(C_A C) \subset C_A(B\cup C)$ quindi

$$C_A(B\cup C) = (C_A B)\cap(C_A C) \quad \text{(I formula)}$$

II Se $x \in C_A(B\cap C) \Rightarrow x\notin B\cap C \Rightarrow x \in C_A B$ oppure $x \in C_A C \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in (C_A B)\cup(C_A C) \Rightarrow C_A(B\cap C) \subset (C_A B)\cup(C_A C)$

Se poi $x \in (C_A B)\cup(C_A C) \Rightarrow x\in C_A B$ oppure $x \in C_A C \Rightarrow$
$\Rightarrow x\notin B\cap C \Rightarrow x \in C_A(B\cap C) \Rightarrow (C_A B)\cup(C_A C) \subset C_A(B\cap C)$
e quindi

$$C_A(B\cap C) = (C_A B)\cup(C_A C) \quad \text{(II formula)}$$

Risoluzione di Giuseppe Guarato
Via A. Volta - 7 - 36078 - Valdagno (VI)

I CRITERI DI DIVISIBILITÀ E LA PROVA DEL NOVE

di Claudio Bernardi

Tutti sapete certamente che cosa si intende per criterio di divisibilità per un certo numero a; si tratta di una regola, cioè di un procedimento di calcolo, che permette, dato un qualunque x intero, di sapere se x è o non è divisibile per un numero a. Inoltre fin dalle prime classi della scuola media si imparano i più semplici di questi criteri: così dato un qualunque numero intero sappiamo dire direttamente, senza cioè aver bisogno di eseguire la divisione, se quel numero diviso per 2, per 3, per 5 o per 9 dà o no per resto 0. Esistono poi criteri per le potenze di 2 e di 5, per 11 e anche per 7.(*)

Per prima cosa cercherò di dare una dimostrazione dei primi di questi criteri, passando quindi a notevoli generalizzazioni.

Si sa che per dire se un numero x è o no divisibile per 2 basta esaminare l'ultima cifra: questa è divisibile per 2 se e soltanto se lo è x; lo stesso criterio vale poi per 5. Il motivo di questo primo caso è molto facile: basta scomporre x nella somma delle sue decine e delle sue unità, scrivendo così

$$x = 10a + b$$

e osservare che $10a$, primo addendo, è sempre divisibile per 2 (e per 5) quindi lo sarà anche x quando e soltanto quando lo è b (cifra delle unità). Unica cosa da notare è che si applica in questa breve dimostrazione la proprietà distributiva che ci permette di scrivere

$$(10a + b) : 2 = 10a : 2 + b : 2 .$$

Un po' più lungo è il discorso relativo al criterio di divisibilità per 9: in questo caso si sa che condizione necessaria e sufficiente perchè un numero sia divisibile per 9 è che lo sia la somma delle sue cifre. Conviene allora separare le cifre del numero dato, cioè scomporre questo ultimo secondo le potenze di 10; così se

$$x = abcd$$

(*) Confronta le seguenti note didattiche:

a) Angolo acuto. Anno I, fasc. 2, pag. 10 - Un criterio di divisibilità per 7, per 11, per 13. di A. Ponti;

b) Angolo acuto. Anno I, fasc. 4, pag. 6 - Ancora sui criteri di divisibilità di F. Criscione.

dove d è la cifra delle unità, c delle decine, b delle centinaia e a delle migliaia, scriveremo

$$x = 10^3 a + 10^2 b + 10^1 c + d.$$

Si tratta ancora di presentare x come somma di due addendi, uno dei quali sia sempre divisibile per 9 e l'altro sia piuttosto "piccolo". Ora si ha evidentemente

$$x = (10^3-1+1)a + (10^2-1+1)b + (10-1+1)c + d =$$
$$= \left[(10^3-1)a + (10^2-1)b + (10-1)c\right] + \left[a+b+c+d\right].$$

A questo punto osserviamo che ogni potenza di 10 diminuita di 1 dà un numero divisibile per 9 (la cosa si verifica direttamente): allora la parte compresa nella prima parentesi quadra è sempre divisibile per 9. Così si deduce che per sapere se il numero dato è o non è divisibile per 9 basta esaminare la seconda parentesi quadra, cioè la somma delle sue cifre; e naturalmente il procedimento qui usato nel caso di numeri di quattro cifre ha validità generale. Dimostrazioni del tutto analoghe alle precedenti valgono per 3 come pure per le potenze di 2 e 5; il criterio per 11, basato sulla differenza fra la somma delle cifre di posto dispari e la somma di quelle di posto pari, è più complesso da dimostrare: ne darò un cenno alla fine di questa nota.

Un primo problema che ci si può porre è il seguente: abbiamo dei criteri che ci dicono se il resto della divisione di un qualsiasi numero con un numero a è o non è 0; si possono trovare dei criteri che ci diano invece esattamente il resto della divisione? Basta riguardare i ragionamenti di prima per convincersi che i normali criteri possono essere usati anche in quest'altro senso. Innanzitutto il caso di 2 è immediato: visto che un numero o è divisibile per 2 oppure dà per resto 1, è chiaro che sapendo se un numero è o non è divisibile per 2, sappiamo anche automaticamente il resto della divisione; per 5 poi, lo stesso ragionamento prima usato ci dice che il resto della divisione di un numero x per 5 non è altro che il resto della divisione per 5 della cifra delle unità di x. Ad esempio volendo sapere che resto dà 748 diviso per 5 basta guardare la ultima cifra (8) per concludere che il resto cercato è 3.

Più interessante si presenta il caso del criterio per 9: infatti proprio su questo è basata la notissima "prova del nove". Per prima cosa riprendiamo il numero $x = abcd$:
eravamo riusciti a scriverlo nella forma

$$x = 9K + a+b+c+d$$

dove k è un opportuno numero intero; ancora una volta quindi il resto della divisione di x per 9 non è altro che il resto della divisione per 9 di $(a+b+c+d)$.

Allora, se ad esempio prendiamo il numero 2786, sappiamo che diviso per 9 dà lo stesso resto di $2+7+8+6 = 23$; volendo possiamo ripetere il ragionamento e concludere che il resto cercato è $2+3 = 5$.

Da questa semplice regola seguono facilmente conseguenze interessanti: ad esempio un numero e lo stesso numero moltiplicato per 10 hanno lo stesso resto nella divisione per 9.

Il procedimento che ci dà il resto della divisione per 9 è in effetti molto usato in quanto su di esso si basa appunto la prova del nove: si tratta di una verifica per le operazioni di addizione e moltiplicazione; da quanto si è visto possiamo cercare di chiarire come funziona. Se indichiamo per comodità con $r(x)$ il resto nella divisione per 9 del numero x , allora trovandoci di fronte a una addizione $x + y = z$
non facciamo altro che calcolare $r(x)$, $r(y)$ e $r(z)$
e quindi verificare che (1) $r(x) + r(y) = r(z)$ (*)
e se l'operazione è esatta si deve sempre ritrovare la (1): infatti detti K, K', K'' i quozienti nella divisione per 9 rispettivamente di x, y e z abbiamo $x = 9K + r(x)$ $y = 9K' + r(y)$ e

(2) $z = 9K'' + r(z)$.

Se z è realmente la somma di x e y abbiamo

$$z = 9K + r(x) + 9K' + r(y) = 9(K+K') + r(x) + r(y) \;;$$

quest'ultima confrontata con la (2) ci dice che effettivamente $r(z)$ deve essere uguale a $r(x) + r(y)$, o se $r(x) + r(y) \geq 9$ allora $r(z) = r\big(r(x) + r(y)\big)$;
in altre parole la somma dei resti è uguale al resto della somma.

D'altra parte è facile accorgersi che talora l'operazione può essere sbagliata e ciò nonostante sia soddisfatta la prova del nove: questo perchè evidentemente ci sono altri numeri diversi dal risultato giusto che però divisi per nove dànno lo stesso resto; la prova del nove è quindi una condizione necessaria ma non sufficiente per l'esattezza di una addizione.

Possiamo poi ripetere un ragionamento del tutto analogo per la moltiplicazione: infatti ancora una volta si ha

(3) $r\big(r(x) \cdot r(y)\big) = r(x \cdot y)$.

(*) Sarebbe più esatto scrivere $r\big(r(x) + r(y)\big) = r(z)$.

Per verificare la (3) scriviamo

$$x = 9K + r(x) \quad , \quad y = 9K' + r(y) \qquad \text{e quindi}$$

$$x\cdot y = (9K + r(x))\cdot(9K' + r(y)) = 9\left[9K'K'' + K\cdot r(y) + K'\cdot r(x)\right] + r(x)\cdot r(y).$$

da cui la (3) essendo evidentemente $\quad r\left(9[\cdots]\right) = 0.$

Anche in questo caso la verifica della prova del nove non è sufficiente per l'esattezza di una moltiplicazione: ad esempio un errore di incolonnamento non si può mai rilevare con questo metodo. E naturalmente si potrebbe parlare anche di prova del tre, del due, del cinque, dell'undici sia per l'addizione che per la moltiplicazione e il discorso sarebbe lo stesso: d'altra parte le prove del due e del cinque sarebbero troppo poco indicative, limitandosi solo all'esame dell'ultima cifra, mentre quella dell'undici sarebbe al contrario troppo complicata. E' quindi a ragione adoperata di preferenza, quando naturalmente si voglia, la prova del nove, perchè è l'unica che sia di facile applicazione e dia nello stesso tempo una certa garanzia per l'esattezza del calcolo.

Un altro problema che ci si può porre è il seguente: i criteri sopra visti valgono solo nel caso del sistema decimale e anche negli altri sistemi di numerazione? E' noto infatti che un numero può essere scritto secondo diverse basi: ad esempio con il simbolo 175 indico in genere

$$1\cdot 10^2 + 7\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0;$$

però potrei anche scrivere i numeri in base ad esempio 8 usando solo le cifre dallo 0 al 7; così

$$(175)_{\text{in base } 8} = 1\cdot 8^2 + 7\cdot 8^1 + 5\cdot 8^0 = (125)_{\text{in base } 10}.$$

Questi diversi sistemi di numerazione hanno vaste applicazioni; in particolare il sistema binario che permette di scrivere tutti i numeri con l'uso delle sole cifre 0 e 1: ad esempio si ha:

<u>nel sistema decimale</u>	0,	1,	2,	3,	4,	5,...
<u>nel sistema binario</u>	0,	1,	10,	11,	100,	101,...

Può sembrare ragionevole almeno da un punto di vista intuitivo che i criteri di divisibilità possano essere estesi negli altri sistemi di numerazione; inoltre proviamo a guardare i numeri per cui nel sistema decimale esistono i criteri più semplici prima visti: 2 e 5 non sono altro che i divisori di 10, 9 è 10 - 1 (3 è poi divisore di 9) e 11 infine è 10 + 1. E' allora sensato chiedersi se i criteri del tipo di quelli che valgono per 2 e per 5 (che si basano cioè sul solo esame dell'ultima cifra) valgano per i divisori della base K del sistema usato; se, andando invece a controllare la somma delle cifre, allora troviamo un criterio per i divisori di K - 1, e se infine il criterio per 11 possa estendersi, in sistemi diversi da quello decimale, ai divisori di K + 1.

La risposta è affermativa e a questo punto non è difficile capirne il motivo. Cominciamo con il caso più semplice, indicando ancora con K la base del sistema usato (nella prima parte di questa nota era K = 10).

Ora è chiaro che preso un qualunque numero x possiamo scrivere

$$x = q \cdot K + r$$

dove q e r sono rispettivamente quoziente e resto nella divisione di x per K; non solo, ma se scriviamo il numero x in base K la cifra delle unità è proprio r . Se poi prendiamo un qualunque K' divisore di K , allora q.K è sempre divisibile per K' e quindi si trova che il resto della divisione di x per K' non è che il resto della divisione di r per K': in particolare x è divisibile per K' se e solo se lo è r. Ad esempio il numero 23 in base 6 è divisibile per 2 e per 3? Basta guardare l'ultima cifra 3 per concludere che è divisibile per 3 ma non per 2; del resto se ora passiamo al sistema decimale si ha $(23)_{base\ 6} = (15)_{base\ 10}$, che è appunto divisibile per 3 e non per 2.

Proprio in quest'ultimo esempio possiamo verificare il criterio di divisibilità per K - 1 (cioè per 5): la somma delle cifre di 23 è 5 ee quindi $(26)_{base\ 6}$ è divisibile per 5 come appunto si ritrova passando al sistema decimale. La dimostrazione di questo criterio è del tutto simile a quella prima sviluppata per 9; unica cosa da ricordare è che la somma delle cifre va fatta nel sistema che si usa: così di fronte al numero $(54)_{base\ 7}$ la somma delle cifre è $(9)_{base\ 10} = (12)_{base\ 7}$ e quindi il resto della divisione per 6 di $(54)_{base\ 7}$ è 3.

Vediamo infine meglio il caso di K + 1; ci proponiamo di dimostrare che: un numero è divisibile per un divisore di K + 1 se e solo se lo è la differenza fra la somma delle cifre di posto dispari e la somma delle cifre di posto pari di quel numero scritto in base K. Penso sia bene notare che in quest'ultimo enunciato, come anche nei precedenti, si fa un'affermazione su un numero basandosi su una proprietà di un <u>nome</u> di quel numero: in altre parole

$$(11)_{\text{base } 3} \quad \text{e} \quad (4)_{\text{base } 10}$$

sono due nomi diversi per lo stesso ente matematico (numero).

Ritorniamo alla regola prima enunciata e esaminiamo un caso particolare: supponiamo che x scritto in base K sia composto da 3 cifre. Così sarà

$$x = aK^2 + bK + c \,;$$

ora possiamo dividere questo polinomio per K + 1 (e una volta tanto tornano utili le noiose regole per la divisione fra polinomi); avremo:

$$\begin{array}{l|l}
aK^2 + bK + c & K+1 \\ \cline{2-2}
\underline{aK^2 + aK} & aK + (b-a) \\
\quad (b-a)K + c & \\
\quad \underline{(b-a)K + (b-a)} & \\
\qquad\qquad c-b+a &
\end{array}$$

e il resto è effettivamente $(a+c)-b.$

Ora questa dimostrazione ha carattere generale in quanto si potrebbe ripetere a partire da numeri con quante cifre si voglia; una dimostrazione corretta andrebbe condotta con il metodo d'induzione, ma risulterebbe piuttosto pesante. Se poi invece di considerare K + 1 ne avessimo considerato un divisore K', il discorso non cambia: infatti prima abbiamo ottenuto

$$x = aK^2 + bK + c = (K+1)q + (c-b+a)$$

dove q è il quoziente; se ora $K' = (K+1):n$ si ha:

$$x = nK'q + (a+c-b)$$

e ancora il resto della divisione di , x per K' è lo stesso che si otterrebbe partendo da (a + c) - b.

Possiamo così concludere che usando il sistema di numerazione in base K si dispone di criteri di divisibilità abbastanza semplici per i divisori di K - 1, di K (e per le loro potenze), di K + 1: ad esempio se si usasse il sistema di numerazione in base 6 avremmo criteri di divisibilità per 2 e per 3 (e per le loro potenze) e inoltre per 5 e per 7. Non solo, ma avrebbe senso anche qui parlare di prova del nove: ora si chiamerebbe prova del cinque, ma si userebbe lo stesso procedimento. Criteri di questo genere possono poi essere utili anche come verifica nei cambiamenti di base.

QUESTIONE 90

In un quadrato ABCD, ($\overline{AB}=a$), inscrivere un triangolo equilatero e determinarne l'area.

RISOLUZIONE

di Sonia Zilio del L.CL. di Padova

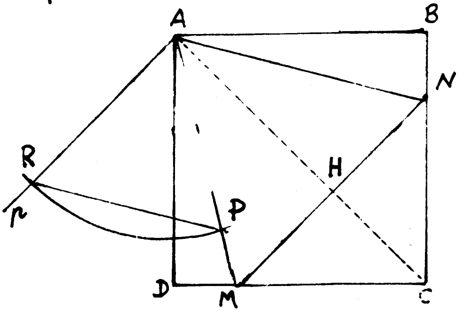
Un triangolo equilatero per essere inscritto in un quadrato ABCD deve necessariamente avere

1) o un vertice coincidente con un vertice del quadrato,

2) oppure un vertice coincidente con il punto medio di un lato del quadrato.

<u>Nel primo caso</u> una diagonale del quadrato e un' altezza del triangolo appartengono ad una stessa retta.

COSTRUZIONE. Traccio per A la perpendicolare p alla diagonale AC. Su un arco di circonferenza di centro A, che interseca p in R riporto una corda RP = AR. Risulta $R\hat{A}P = 60°$ e perciò $P\hat{A}C = 30°$.



Sia M l'intersezione di AP con CD e sia N il simmetrico di M rispetto ad AC. Il triangolo AMN è il triangolo equilatero richiesto.

CALCOLO dell'area di $A\hat{M}N$.

Sia $\overline{MN} = 2x$. Si ha:

$$AC = AH + HC \qquad (H = AC \cap MN)$$

e sostituendo

$$a\sqrt{2} = x\sqrt{3} + x$$

da cui risolvendo:

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$$

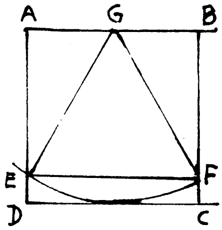
Ne segue

$$\mathcal{A}(A\hat{M}N) = x^2 \cdot \sqrt{3} =$$

$$= \frac{2a^2}{(\sqrt{3}+1)^2} \cdot \sqrt{3} = \dots = a^2(2\sqrt{3}-3).$$

<u>Nel secondo caso</u> la costruzione è immediata:

Detto G il punto medio di AB, la circonferenza di centro G e raggio uguale ad a, determina i punti E, F rispettivamente sui lati AD e BC. Il triangolo GEF è il triangolo richiesto; l'area è $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.



Ottime le risposte inviate da Giuseppe Guarato di Valdagno, da Maurizia Landini del L. Sc. di Reggio Emilia e da Francesco Jogliotti da GENOVA-Sampierd.

PICCOLE NOTE

Regola per il calcolo del quadrato di un numero intero

di Gianni Sena.

Tenendo presente che ogni numero intero in base 10 è esprimibile con un polinomio ordinato secondo le potenze di 10 a coefficienti interi minori di 10 si ha:

$$N^2 = \left(a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n\right)^2.$$

Sviluppando il secondo membro e raggruppando e trascrivendo opportunamente i vari termini dello sviluppo, si arriva alla seguente:

Regola: Al quadrato della 1ª cifra del numero dato, a partire da sinistra, si incolonnano, spostandosi nella trascrizione sempre di un « posto » verso destra, i doppi prodotti di questa cifra per quelle che la seguono e nell'ordine in cui risultano scritte nel numero dato.

Sulla stessa linea si scriva, di seguito al quadrato della 1ª cifra, il quadrato della 2ª e, a questo, si incolonnano, come detto innanzi, i doppi prodotti di questa seconda cifra per quelle che la seguono. Così si procede per le altre cifre.

È necessario tener presente:

1) Se i quadrati o i doppi prodotti sono numeri di una cifra, nella trascrizione bisogna premettere uno *zero* a questa cifra.

2) Se il doppio prodotto è un numero di tre cifre, nella trascrizione si incolonna sempre il numero formato con le ultime due cifre e, nella colonna precedente, si riporta l'*unità* trascrivendola in alto o in basso alla colonna.

Qualche esempio varrà meglio ad illustrare la regola:

$$\begin{array}{r} 5467^2 \\ \hline 25163649 \\ 404884 \\ 6056 \\ 70 \\ \hline 29888089 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6215^2 \\ \hline 36040125 \\ 240410 \\ 1220 \\ 60 \\ \hline 38626225 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8796^2 \\ \hline 1111 \\ 64498136 \\ 122608 \\ 4484 \\ 96 \\ \hline 77369616 \end{array}$$

SPEDIZIONE IN ABBONAMENTO POSTALE GRUPPO IV

Ci scusiamo con gli ANGOLISTI per il ritardo con cui esce questo fascicolo a causa degli scioperi dei tipografi

Entro gennaio uscirà il 1° fascicolo 1973

Coloro che trattengono ANGOLO ACUTO sono pregati di inviare con sollecitudine la loro quota di abbonamento

PER FAVORE, NON CESTINARE

Se questo periodico non vi interessa, vi preghiamo di respingere le copie ricevute al **MITTENTE:**

ANGOLO ACUTO - Via Cairoli, 78 - 50131 **FIRENZE**

GLI AMICI DI « ANGOLO ACUTO »

BENEMERITI:

Prof. Pia Forte - BRESCIA

SOSTENITORI:

Prof. Bernardino Pugliese - AVELLINO

Prof. Soccorso Scalone - AVELLINO

Prof. Luisa Curti - REGGIO EMILIA

Istituto Magistrale Statale - BERGAMO

Prof. Biagio Caltagirone - SUTERA (CL)

Liceo Scientifico « Oberdan » - TRIESTE

Prof. Luigi Pagani - SARONNO (VA)

Prof. Simonetta Galligani - FIRENZE

Prof. Edoardo Lerda - TORINO

Prof. Giulia Bottai - FIRENZE

Prof. Rosetta Bignami - CREMONA

Prof. Sabina Palmieri - ERCOLANO (NA)

TEMA DI MATEMATICA ASSEGNATO DAL MINISTERO AGLI ESAMI DI MATURITA' MAGISTRALE PER LA SESSIONE SUPPLETIVA « 18 Luglio 1972 »

Poiché non siamo riusciti a venire a conoscenza dell'enunciato del suddetto tema, rivolgiamo viva preghiera, a nome degli Angolisti, a qualche Professore, Commissario di esame, che ne sia a conoscenza, di volercelo inviare con cortese urgenza.

GRAZIE.

A chi ci procurerà DIECI nuovi abbonati invieremo l'abbonamento gratuito per il 1973, oppure i fascicoli di una annata arretrata completa.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 gennaio 1970
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso*
Stampato dalla **Tipografia KAPPAESSE - Firenze**
Associato all'USPI - Unione Stampa Periodica Italiana