ANNO IV 1973 1-2 GENNAIO-APRILE

L'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

Periodico bimestrale
a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

spedizione in abb. postale - gruppo IV
conto corrente postale 5/27919

Abbonamenti per il 1973

Studenti	L.	1400
Professori e Scuole	L.	2000
Sostenitori	L.	3000
Benemeriti	L.	5000

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio.

PALESTRA DELLE GARE

Relazione terza gara - Anno scolastico 1971-72

(QUESTIONI 94-118)

Ecco l'elenco dei Giovani Angolisti che si sono distinti per il numero e per l'originalità delle risoluzioni inviate:

D'AMBROSIO GAETANO - L. Sc. « L. Da Vinci » BISCEGLIE (BA).
(Risoluzioni inviate 25. Premio L. 5.000).

FRIGERIO EMMA - L. Sc. « Einstein » MILANO.
(Risoluzioni inviate 22. Premio L. 3.000).

JANNONE ENRICO - L. Sc. « Fermi » BARI.
(Risoluzioni inviate 19. Premio L. 2.000).

Buso Claudio - L. Sc. « Nievo » Padova (R 16); Felicion Leonardo - L. Sc. « Alighieri » Trieste (R. 15); Zilio Sonia - L. Cl. « Livio » Padova (R. 15); Batic Anna Maria - L. Sc. Slov. Trieste (R. 14); Perelli Alberto - L. Sc. « Cassini » Genova (R. 14); Balestra Massimo - L. Sc. « Dini » Pisa (R. 13); Dal Maso Gianni - L. Cl. « Dante » Trieste (R. 12); Cagnolati Francesco - L. Sc. Reggio Emilia (R. 9); Silvestri Luigi - L. Sc. Reggio Emilia (R. 8); Terranova Diego - L. Sc. « Oberdan » Trieste (R. 8); Pellini Roberta - L. Cl. « Manara » Roma (R. 7); Rossi Fernando - L. Cl. « Dante » Firenze (R. 7); Lucardesi Paolo - L. Sc. Bergamo (R 7); Coppini Giuseppe - L. Sc. « Copernico » Prato (R. 6); Bertini Leonardo - L. Sc. « Dini » Pisa (R 6); Landini Maurizia - L. Sc. Reggio Emilia (R. 6); Draicchio Francesco - L. Cl. « Manara » Roma (R. 5); Viola Paolo - L. Cl. « Alighieri » Trieste (R. 5); Imbrogno Giuliana - Ist. Magistr. Cosenza (R. 5); Belli Giampaolo - L. Sc. « Avogadro » Biella (R. 5);
D'Ambrosio Lucia - Scuola Media - Bisceglie (R. 3);
Asprella Giacinto - Scuola Media - Matera (R. 2);
Giordano Vanni Angela - Scuola Media - Reggio Calabria (R. 1).

A questi tre alunni di scuola media è stato assegnato un abbonamento gratuito per il 1973.

Un particolare elogio agli appassionati Angolisti Dott. Aniello Agrosi - Diso, Prof. Francesco Fogliotti - Genova Sampierd., M° Giuseppe Guarato - Valdagno, Prof. Alfonso La Paglia - Biella e Sig. Giulio Mosca - Teramo che ci hanno inviato le risoluzioni di tutte (o quasi tutte) le questioni proposte con interessanti generalizzazioni.

LA PALESTRA DELLE GARE

AVVERTENZE IMPORTANTI PER I SOLUTORI. Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte. Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale. Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età. Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE
entro il 30 aprile 1973

Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori. Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.

QUESTIONI PROPOSTE

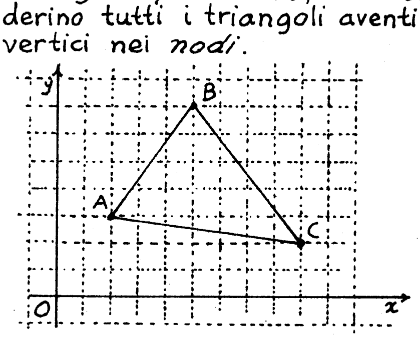
(Con le questioni proposte in questo fascicolo continua la QUARTA GARA relativa all'anno scolastico 1972/73 che è cominciata con la questione 119 - VEDI FASCICOLO III, 6).

QUESTIONE 124
UN RISULTATO SORPRENDENTE

Data una circonferenza di raggio R (ad esempio R = 1 cm, oppure R = 1 Km), di quanto deve aumentare il suo raggio R affinchè la lunghezza della circonferenza aumenti di 1 metro?

QUESTIONE 125

Dato in un piano un reticolato *a maglie quadrate*, si considerino tutti i triangoli aventi i vertici nei *nodi*.



1) Esistono in tale insieme TRIANGOLI EQUILATERI ?

2) Esistono triangoli isosceli, aventi gli estremi della base in due nodi assegnati ?

3) Esistono coppie di triangoli INCOMMENSURABILI ?

Alfonso La Paglia.

QUESTIONE 126
(Gara matematica - MATHESIS - Messina 21-3-72)

In un piano siano date due rette r_1 e r_2 che incontrandosi in O formano un angolo $\widehat{r_1 r_2} = \alpha$.

Dato un triangolo ABC si operi su ABC la simmetria ortogonale rispetto alla retta r_1, e successivamente sul triangolo ottenuto la simmetria rispetto ad r_2, ottenendo così il trian-

golo A'B'C'.
Come si potrebbe operare per ottenere il triangolo A'B'C' direttamente dal triangolo ABC ?
E se le rette incidenti in O fossero tre, r_1, r_2 e r_3 tali che

$$\widehat{r_1 r_2} = \widehat{r_2 r_3} = \alpha \ ?$$

E possibile che componendo n di tali simmetrie si abbia che il triangolo ABC venga a coincidere con il suo corrispondente A'B'C' ?

QUESTIONE 127

UN TEOREMA DI NAPOLEONE.

I centri dei cerchi circoscritti ai tre triangoli equilateri costruiti sui lati di un triangolo ABC, qualunque, ed esternamente al triangolo, sono vertici di un triangolo equilatero.
E' richiesta una dimostrazione geometrica.

QUESTIONE 128

CRIPTARITMETICA

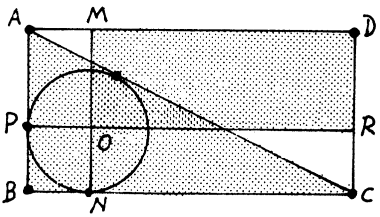
Ricostruire la moltiplicazione:

UNO × DUE = CINQUE.

(Nessuna lettera ha il valore zero).

QUESTIONE 129

Dato il rettangolo ABCD si consideri la diagonale AC e il centro O del cerchio inscritto nel triangolo ABC.



Si conduca per O, la corda MN (M su AD), parallela ad AB, e la corda PR (R su CD) parallela ad AD.
Dimostrare l'equivalenza tra il triangolo ABC e il rettangolo MORD.

QUESTIONE 130.

Studiare la funzione

$$y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 1}$$

e tracciarne il grafico.

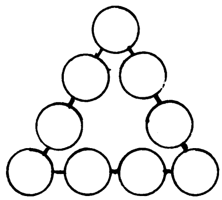
S. R.

RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 91

Disporre nei nove cerchietti a forma di triangolo (v. fig.) i primi nove numeri naturali

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9



in modo che sia costante la somma delle quattro cifre poste nei cerchietti allineati.

RISOLUZIONE di Paolo Carli di Padova.

Consideriamo anzitutto « non diversi » due triangoli magici che si ottengono l'uno dall'altro
- o *per scambio* fra i due numeri « interni » di uno stesso lato,
- o *per ribaltamento* rispetto ad un lato o ad una mediana,
- o *per rotazione* di 120° o di 240°.

La somma dei nove numeri è 45.
Sia S la somma dei numeri di ogni lato e sia V la somma dei tre numeri posti nei vertici.
Essendo

$$3 \cdot S = 45 + V,$$

risulta che V è multiplo di 3.
Ponendo $V = 3V'$ si ha:

$$S = 15 + V'.$$

Si ha anche:

$$6 \leq V \leq 24 \quad e \quad 2 \leq V' \leq 8;$$

cioè V' può assumere i valori

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8;

a cui corrispondono i seguenti valori di S:

17, 18, 19, 20, 21, 22, 23.

Per tentativi si trovano le seguenti soluzioni:

Per $S=17$

```
      3              3
     4 7            6 4
    9   5          7   8
   1 8 6 2        1 5 9 2
```

Per $S=18$ NON SI HANNO SOLUZIONI.

Indichiamo ora, per semplicità, il generico triangolo ⟶

```
     a
    b h
   c   i
  d e f g
```

con la sequenza

a b c d e f g h i a

Per $S = 19$

2 5 9 3 8 1 7 6 4 2 ;
2 6 8 3 4 5 7 9 1 2 ;

7 3 8 1 9 5 4 6 2 7 ;
7 2 9 1 6 8 4 5 3 7 .

Per $S = 20$

4 9 1 6 2 7 5 8 3 4
4 7 3 6 8 1 5 9 2 4

5 4 8 3 9 1 7 6 2 5 ;
(*) 5 4 9 2 7 3 8 6 1 5 ;
5 7 6 2 9 1 8 4 3 5 ;
5 6 8 1 7 3 9 2 4 5 .

Per $S = 21$

3 2 7 9 1 5 6 4 8 3 ;
3 8 1 9 2 4 6 7 5 3 ;

3 2 9 7 1 5 8 6 4 3 ;
3 5 6 7 2 4 8 1 9 3

Per $S = 22$ NON SI HANNO SOLUZIONI.
Per $S = 23$

7 3 5 8 2 4 9 1 6 7 ;
7 2 6 8 1 5 9 3 4 7 .

Ottime le risposte di G. Guarato, di F. Fogliotti e di G. Militello. Incomplete quelle di Maurizia Landini - L. Sc. Reggio Emilia, di Sonia Zilio - L. Cl. Padova e di Francesco di Tempora. L. Sc. Roma. Buona la risposta di Alberto Perelli di Genova.

QUESTIONE 92

Disporre nei nove cerchietti disposti a forma di triangolo (vedi figura questione 91) i QUADRATI dei primi nove numeri naturali:

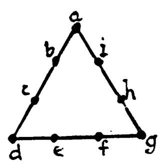
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81,

in modo che sia costante la somma dei quattro numeri posti nelle tre quaterne di cerchi i cui centri risultino allineati.

RISOLUZIONE

di Giuseppe Guarato di Valdagno.

Considerato lo schema, come in figura, del triangolo più propriamente detto *«a perimetro magico»* e detta K la somma costante dei numeri posti su un lato, si ha per ipotesi:



$$(1)\quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = K, \\ d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = K, \\ g^2 + h^2 + i^2 + a^2 = K. \end{cases}$$

Poichè la somma dei primi nove quadrati è uguale a 285, sommando membro a membro le (1) si ha:

(2) $a^2 + d^2 + g^2 = 3(K-95)$.

Il caso

$$a=3\,,\ d=6\,,\ g=9 \Rightarrow K=137$$

non fornisce alcuna soluzione.

Allora 3^2, 6^2, 9^2 e cioè i quadrati multipli di 9, appartengono ad elementi interni ai lati del triangolo.

Poichè ogni quadrato o è multiplo di 3 e quindi di 9 oppure è un multiplo di 3, aumentato di 1, si deduce dalle (1) che *DUE* quadrati multipli di 3 non possono appartenere ad uno stesso lato, perchè in tal caso i valori di K forniti dalle (1) sarebbero UNO multiplo di 3 e DUE non multipli di 3.

Allora 3^2, 6^2 e 9^2 si trovano interni ai lati e uno su ogni lato.

Inoltre risulta che K è multiplo di 3: $K = 3K'$.

Dalla (2), posto:

$a^2 = 3a'+1$; $d^2 = 3d'+1$; $g^2 = 3g'+1$,

si ricava:

(3) $a' + d' + g' = 3(K'-32)$

e quindi anche la somma $a'+d'+g'$ è multipla di 3. E poichè a', d', g' sono elementi dell'insieme

$$\mathcal{J} = \{0, 1, 5, 8, 16, 21\}$$

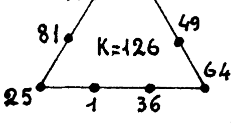
si prenderanno in considerazione, fra le 20 terne che si possono estrarre da $\mathcal{J}$, le sole 8, la somma degli elementi delle quali sia multipla di 3.

Di queste 8 terne una sola fornisce soluzione, l'unica soluzione, cioè la terna 1, 8, 21.

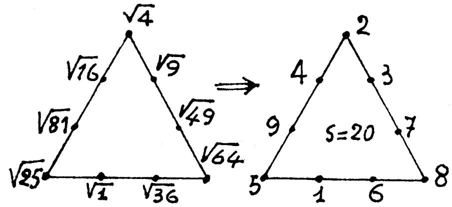
Ne segue

$$a^2=4,\ d^2=25,\ g^2=64,\ b^2=16,\ c^2=81,$$
$$e^2=1,\ f^2=36,\ h^2=49,\ i^2=9.$$

Quindi l'unico triangolo a *perimetro magico* costruito con i quadrati dei primi nove numeri naturali è quello ← qui indicato.



Anche il triangolo che si ottiene sostituendo la radice quadrata dei nove quadrati è un triangolo a perimetro magico.



Vedi risoluzione Questione 91, pag. 4. (*)

Ottime le risposte di Francesco Fogliotti di Genova-Sampierd. e di Alberto Perelli di Genova.

Hanno indicato la soluzione: Maurizia Landini . L: Sc. Reggio E. Sonia Zilio - L. Cl. Padova e Paolo Conti di Padova.

QUESTIONE 93

Dati quattro punti di un piano M, N, P, R (tre a tre non allineati) costruire un quadrato ABCD tale che la retta di ciascun lato passi per uno dei quattro punti dati.

RISOLUZIONE
di Francesco Fogliotti di Genova Sampierdarena

LEMMA. *Due segmenti, perpendicolari fra loro, aventi gli estremi su lati opposti di un quadrato, sono uguali.*

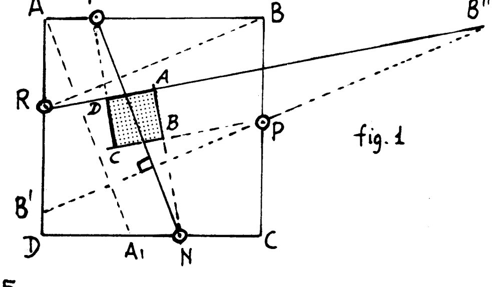


fig. 1

IPOTESI: ABCD è un quadrato; $MN \perp PB'$ con M su AB, N su CD, P su BC. B' su AD.

TESI: $\overline{MN} = \overline{PB'}$.

Infatti tracciando

$BR \parallel PB'$ e $AA' \parallel MN$

è

$\overline{BR} = \overline{PB'}$ e $\overline{AA'} = \overline{MN}$

(*lati opposti di parallelogr.*).

Inoltre per l'uguaglianza dei triangoli rettangoli ADA' e ABR si ha:

$\overline{AA'} = \overline{BR}$; pertanto è $\overline{MN} = \overline{PB'}$

Perciò supposti M, N punti su lati opposti del quadrato, e P, R punti su gli altri due lati opposti, basta congiungere M con N e da P condurre la perpendicolare a MN prendendo da P nei due sensi

$\overline{PB'} = \overline{MN} = \overline{PB''}$.

Le congiungenti B'R e B''R danno la direzione della retta rispettivamente di un lato del quadrato richiesto. E si hanno intanto due soluzioni (fig. 1).

***

Se ora si considerano M e P su due lati opposti e di conseguenza N ed R su gli altri due lati opposti, si ottengono altre due soluzioni (fig. 2)

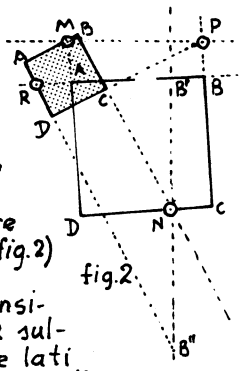
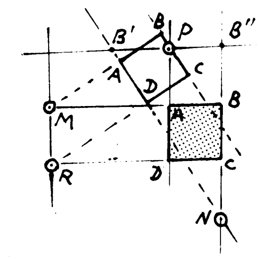


fig. 2

***

Se infine si considerano M ed R sulle rette di due lati opposti ed N e P sulle rette degli altri due lati si ottengono altre due soluzioni (fig. 3)



In generale esistono sei quadrati che soddisfano alle condizioni del problema.

NOTA. *Si lascia allo studioso l'esame dei casi particolari.*

$MN \parallel PR$; $MN \perp PR$;

MNPR *quadrato (∞ soluz.)*

ecc.

RISOLUZIONE

di Giuseppe Guarato di Valdagno

E' noto che due rette parallele determinano una STRISCIA e che l'intersezione di due strisce è un parallelogramma. Se le due rette che determinano una striscia sono perpendicolari a quelle dell'altra striscia, il parallelogramma-intersezione diventa un rettangolo; se le due strisce perpendicolari hanno la stessa larghezza il rettangolo intersezione diventa un quadrato.

***

Ciò premesso siano A, B, C, D i quattro punti dati e siano *a, b, c, d* le rette dei lati del quadrato passanti rispettivamente per A, B, C, D.

In un sistema di assi cartesiani ortogonali si abbia:

$A(a_1; a_2)$; $B(b_1; b_2)$; $C(c_1; c_2)$; $D(d_1; d_2)$.

Supposto che due lati paralleli passino uno per A e uno per B, sia m il coefficiente angolare di *a* e di *b* e quindi $-\frac{1}{m}$ il coeffic. angolare di c e di *d*.

Si hanno le seguenti equazioni esplicite:

retta b) $y - b_2 = m(x - b_1)$;

retta d) $y - d_2 = -\frac{1}{m}(x - d_1)$;

e normali:

retta b) $\dfrac{mx - y + b_2 - mb_1}{\sqrt{1+m^2}} = 0$

retta d) $\dfrac{x + my - md_2 - d_1}{\sqrt{1+m^2}} = 0$

Le distanze $\overline{AB'}$ e $\overline{CD'}$ di A e C dalle rette b e d rispettivamente valgono, in valore assoluto:

$$\overline{AB'} = \left| \frac{m(a_1-b_1) - (a_2-b_2)}{\sqrt{1+m^2}} \right| ;$$

$$\overline{CD'} = \left| \frac{m(c_2-d_2) + (c_1-d_1)}{\sqrt{1+m^2}} \right| ;$$

e quindi imponendo la condizione $\overline{AB'} = \overline{CD'}$, sciogliendo i valori assoluti, si hanno due valori di m.

$$m_1 = \frac{(a_2-b_2) + (c_1-d_1)}{(a_1-b_1) - (c_2-d_2)} ,$$

$$m_2 = \frac{(a_2-b_2) - (c_1-d_1)}{(a_1-b_1) + (c_2-d_2)} .$$

Se due lati opposti passano per A e C, oppure per A e D, si ricavano analogamente altri quattro valori di m:

$$m_3 = \frac{(a_2-c_2) + (b_1-a_1)}{(a_1-c_1) - (b_2-d_2)} ,$$

$$m_4 = \frac{(a_2-c_2) - (b_1-d_1)}{(a_1-c_1) + (b_2-d_2)} ,$$

$$m_5 = \frac{(a_2-d_2) + (b_1-c_1)}{(a_1-d_1) - (b_2-c_2)} ,$$

$$m_6 = \frac{(a_2-d_2) - (b_1-c_1)}{(a_1-d_1) + (b_2-c_2)} .$$

Complessivamente si hanno, nell'ipotesi della questione proposta, *sei* soluzioni.

Noto un valore di m è facile costruire il relativo quadrato.

Se, ad esempio,

$$A(3;0);\ B(8;0);\ C(0;4);\ D(6;8)$$

dalle formule precedenti si ricava:

$m_1 = 6$, $m_2 = -\frac{2}{3}$; (fig. 1)

$m_3 = -\frac{2}{11}$, $m_4 = \frac{6}{5}$; (fig 2)

$m_5 = 0$, $m_6 = \frac{16}{7}$; (fig. 3).

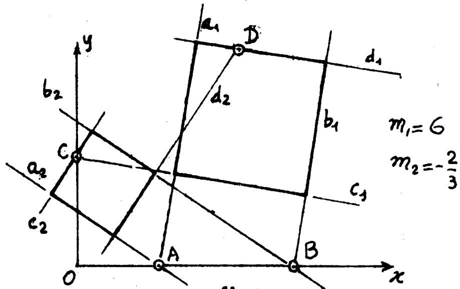


fig. 1

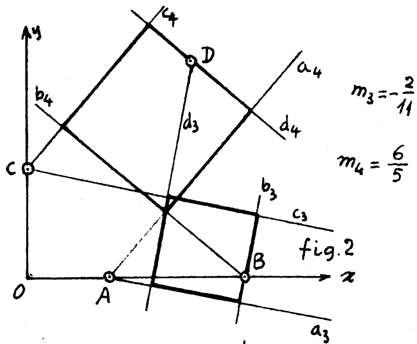


fig. 2

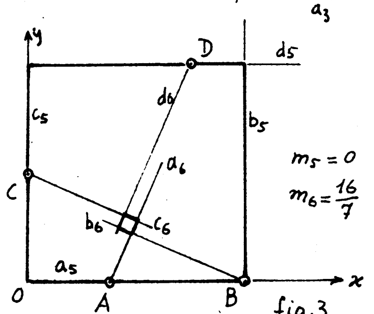


fig. 3

CASI PARTICOLARI

Se, nel caso in cui sia $a // b$, le rette a e b coincidano (e quindi coincidano c e d) si ha che:

$$y - a_2 = m(x - a_1)$$

deve coincidere con

$$y - b_2 = m(x - b_1)$$

da cui:

$$m = \frac{a_2-b_2}{a_1-b_1} = \frac{(a_2-b_2) + (c_1-d_1)}{(a_1-b_1) - (c_2-d_2)} ,$$

oppure

$$m = \frac{a_2-b_2}{a_1-b_2} = \frac{(a_2-b_2) - (c_1-d_1)}{(a_1-b_1) + (c_2-d_2)}$$

In entrambi i casi si deduce, con facili trasformazioni, che deve essere:

$$\frac{a_2-b_2}{a_1-b_1} = -\frac{c_1-d_1}{c_2-d_2} \quad \text{ossia:}$$

$$m_{AB} = -\frac{1}{m_{CD}} \quad \text{e quindi } AB \perp CD,$$

avendo indicato con m_{AB} (m_{CD}) il coefficiente angolare della retta passante per A e per B (per C e per D).

Allora i primi due quadrati degenerano nel punto $E = (AB \cap CD)$ essendo $m_1 = m_2 = m_{AB}$.

Nel caso che sia
$A(3;0)$; $B(6;1)$; $C(0;7)$; $D(2;1)$
si ha

$$m_1 = m_2 = \frac{1}{3}; \; m_3 = -1; \; m_4 = -\frac{11}{3};$$

$$m_5 = \frac{5}{7}; \; m_6 = \frac{7}{5}. \text{ (fig.4)}$$

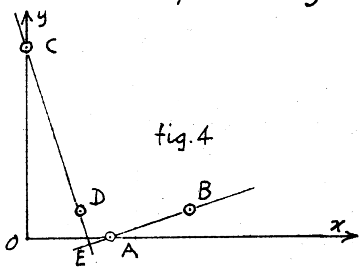


fig.4

Se oltre ad essere $AB \perp CD$ risulta anche $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ allora sono uguali in valore assoluto le proiezioni di AB sull'asse x e di CD sull'asse y e viceversa, cioè

$$|a_1-b_1| = |c_2-d_2| \text{ e } |a_2-b_2| = |c_1-d_1|$$

con segni uguali in una delle due e contrari nell'altra; basta allo scopo osservare che, in valore e segno, è:

$$\frac{a_2-b_2}{a_1-b_1} = -\frac{c_1-d_1}{c_2-d_2}$$

poiché $AB \perp CD$. Quindi, in questa ultima ipotesi, uno dei valori di m_1 e m_2 risulta indeterminato della forma $\frac{0}{0}$; ciò significa che qualunque coppia di rette $a /\!/ b$ per A e B e $c /\!/ d$ per C e D (con $c \perp a$) individua un quadrato. Nel caso che sia (fig. 5):
$A(3;0)$; $B(6;1)$; $C(0;4)$; $D(1;1)$,
si ha: $m_1 = \frac{1}{3}$; m_2 = indeterminato;
$m_3 = \frac{1}{3}$; $m_4 = -3$; $m_5 = 1$; $m_6 = 7$.

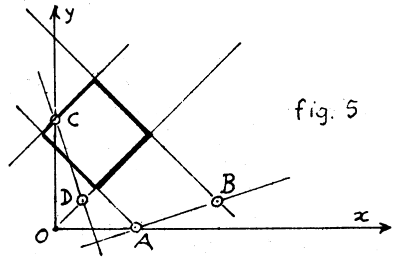


fig. 5

Analoghe considerazioni nel caso in cui risulti $a /\!/ c$ e $a /\!/ d$.

Sono pervenute anche due ottime risoluzioni trigonometriche di Gaetano D'Ambrosio di Bisceglie e di Alfonso La Paglia di Biella.

QUESTIONE 94

UN METODO CURIOSO PER CALCOLARE IL PRODOTTO DI DUE NUMERI INTERI

Qualsiasi moltiplicazione fra due numeri interi si può effettuare facendo solamente moltiplicazioni e divisioni per 2.

Dati i due numeri interi da moltiplicare conviene scegliere il minore come primo fattore. Sotto questo fattore si scrive la sua metà (per difetto, se esso è dispari); sotto la metà, sempre in colonna, ancora la metà, e così via, finché si ottiene il numero 1.

A destra del primo fattore si scrive il secondo fattore; sotto questo il suo doppio; sotto il doppio, sempre in colonna e in corrispondenza dei numeri della prima colonna, si scrive il doppio e così via, finché si giunge all' 1 della prima colonna.

La somma dei numeri della seconda colonna che corrispondono ai numeri dispari della prima colonna, è il prodotto richiesto.

ESEMPIO: Sia da moltiplicare 46 per 52. L'operazione si dispone come segue:

46	52	
23	104 →	104
11	208 →	208
5	416 →	416
2	832	
1	1664 →	1664
		2392

Come si può giustificare l'esattezza di questo procedimento?

RISOLUZIONE
di Aniello Agrosi di Diso (LE)

Si può scrivere:

$$46 \times 52 = (101110)_2 \times 52 =$$
$$=(1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0)\times 52 =$$
$$=(32 + 0 + 8 + 4 + 2 + 0)\times 52 =$$
$$= 32\cdot 52 + 0 + 8\cdot 52 + 4\cdot 52 + 2\cdot 52 + 0 =$$
$$= 1664 + 0 + 416 + 208 + 104 + 0 =$$
$$= 2392.$$

Resta così giustificata la ragione per cui si omettono, nella somma dei termini della seconda colonna il primo addendo (52) e al quinto addendo (832) cui corrispondono nella prima colonna NUMERI PARI (46 e 2).

RISOLUZIONE generalizzata
di Giuseppe Guarato di Valdagno.

Questa questione era stata proposta nel fasc. 1-2 /1954 del "*La Scienza e i Giovani*" sotto il titolo "NEL PAESE DI CONFUCIO". Nel num. 7-8 dello stessa anno veniva pubblicata una mia risoluzione che trascrivo senza sostanziali modifiche.

Sia:

$$N = C_n X^n + C_{n-1} X^{n-1} + \dots + C_2 X^2 + C_1 X + C_0 \quad (1)$$

(ovvero $N = \sum_{r=0}^{n} C_r X^r$)

un numero naturale scritto in base X

$$(\text{con } C_r ; X \in \mathcal{N} ; \quad C_r < N)$$

Si scrive anche convenzionalmente:

$$N = C_n C_{n-1} C_{n-2} \cdots C_2 C_1 C_0 . \quad (1')$$

L'espressione (1) ci dà la possibilità di esprimere con facilità i quozienti e i resti delle successive divisioni di N per la base X.

Con evidente significato delle notazioni si ha il seguente quadro *(a)*

$$\left.\begin{array}{llll}
N = Q_0 = & C_n C_{n-1} C_{n-2} \cdots\cdots & C_1 C_0 ; & R_0 = C_0 \\
Q_1 = & C_n C_{n-1} \cdots\cdots & C_2 C_1 ; & R_1 = C_1 \\
Q_2 = & C_n C_{n-1} & C_3 C_2 ; & R_2 = C_2 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
Q_{n-1} = & C_n C_{n-1} & ; & R_{n-1} = C_{n-1} \\
Q_n = & C_n & ; & R_n = C_n
\end{array}\right\}$$

Si vede quindi che i resti delle divisioni di

$N = Q_0 ;\ Q_1 ;\ Q_2 ; \dots\dots ; Q_n$

per la base X

sono le cifre stesse che compongono N e che una qualunque Q_r è divisibile per X se e solo se $Q_r = 0$.

Si trova così un procedimento per sviluppare e scrivere un numero dato ad esempio in base 10 in un'altra base qualsiasi. I resti delle successive divisioni del numero per la nuova base forniscono i coefficienti delle corrispondenti potenze della base. Così, ad esempio, è facile verificare che:

$$345_{10} = 2340_5 = 110210_3 .$$

Consideriamo ora il seguente quadro:

$$\left.\begin{array}{llll}
N = Q_0 & R_0 & M & R_0 M \\
Q_1 & R_1 & MX & R_1 M X \\
Q_2 & R_2 & MX^2 & R_2 M X^2 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
Q_n & R_n & MX^n & R_n M X^n
\end{array}\right\} \begin{array}{l} R_i < X \\ \text{quadro} \\ (b) \end{array}$$

Nella prima colonna sono riportati i quozienti delle successive divisioni di N per X; nella seconda i relativi resti; nella terza i successivi prodotti di M per X (M è il secondo fattore del prodotto NM); nella quarta i prodotti dei corrispondenti numeri della seconda per quelli della terza colonna.

Sommando i termini della quarta colonna e raccogliendo M a fattor comune si ha:

$$M\left(R_nX^n+R_{n-1}X^{n-1}+\cdots+R_1X+R_0\right)=MN, \quad (2)$$

rappresentando l'espressione fra parentesi il numero N, giusta la (1) e il quadro (a). Nella (2) sono nulli tutti i termini per cui $R_i=0$ e quindi tutti quelli che corrispondono ad un Q_i divisibile per X.

Le considerazioni fatte sul quadro (b) e sulla somma (2) che fornisce il prodotto dei numeri M ed N sono valide qualunque sia $X\in\mathbb{N}$. Casi notevoli che semplificano il procedimento si hanno per

$$X=2 \quad ; \quad X=10.$$

Nel primo caso ($X=2$) ritroviamo il procedimento proposto e resta così giustificata la ragione per cui si omettono nella somma i termini cui corrispondono nella prima colonna *numeri pari* (resti nulli).

Nel secondo caso ($X=10$) ritroviamo il metodo usuale per eseguire il prodotto.

Consideriamo ad esempio il prodotto $N\cdot M$, $N=49$ $M=676$.

Il quadro (b) fornisce

$$N=Q_0=49;\ R_0=9;\ M=676;\ R_0M=6084$$
$$Q_1=4;\ R_1=4;\ M10=6760;\ R_1M10=\underline{27040}$$
$$33124$$

mentre eseguendo l'operazione si ha

$$\begin{array}{r} \underline{676\times 49} \\ 6084 \\ \underline{2704} \\ 33124. \end{array}$$

Hanno inviato buone risposte:

Francesco Fogliotti - Genova-Sampierd.
Gaetano D'Ambrosio - L.Sc.-Bisceglie (Ba).
Alberto Perelli - Genova.
A.Maria Batic - L.Sc. Sloveno - Trieste.
Leonardo Bertini - L.Sc. "U.Dini" Pisa.
Diego Terranova - L.Sc. "Oberdan" Trieste.
Francesco Draicchio - L.Cl. "Manara" Roma.
Massimo Balestri - L.Sc. "U.Dini" Pisa.
Fabrizio Burzacchini - L.Sc. - Ancona.
Enrico Jannelli - L.Sc. "Fermi" Bari.
Emma Frigerio - L.Sc. "Einstein" Milano.
Giuseppe Coppini - L.Sc. "Copernico" Prato.

QUESTIONE 95

UNA CURIOSITÀ DELLA TAVOLA PITAGORICA

Dimostrare che la somma degli 8 numeri che circondano un numero *qualunque* della tavola pitagorica è uguale al prodotto di quel numero per 8.

	7	8	9
3	21	24	27
4	28	$\boxed{32}$	36
5	35	40	45

RISOLUZIONE
di Giampaolo Belli del L. Sc. "Avogadro" di Biella

Indicando con m e n ($m;n\in\mathbb{N}$) l'*ascissa* e *l'ordinata* del numero N della tavola pitagorica, risulta $N=m\cdot n$.

Si ha il seguente schema:

	$m-1$	m	$m+1$
$n-1$	$(m-1)(n-1)$	$m(n-1)$	$(m+1)(n-1)$
n	$(m-1)n$	mn	$(m+1)n$
$n+1$	$(m-1)(n+1)$	$m(n+1)$	$(m+1)(n+1)$

da cui risulta

$$\begin{aligned}&(m-1)(n-1) + m(n-1) + (m+1)(n-1) +\\ &+(m-1)\cdot n \qquad\qquad + (m+1)\cdot n +\\ &+(m-1)(n+1) + m(m+1) + (m+1)(n+1) =\\ &= (m-1)\cdot 3n + m\cdot 2n + (m+1)\cdot 3n =\\ &= \dots = 8mn = 8\cdot N. \quad c.d.d.\end{aligned}$$

Analoga RISOLUZIONE ha inviato Enrico Jannelli del L.Sc. di Bari, il quale aggiunge le seguenti OSSERVAZIONI :

Esistono casi particolari che, pur soddisfacendo all'enunciato, meritano una particolare considerazione.

1	2	
2	4	

Il numero 1, che si trova all'intersezione della prima riga e della prima colonna, non è contornato da otto numeri ma solo da tre. Eppure anche in questo caso si ha: $2+4+2 = 8 = 8\cdot 1$.

Un qualsiasi numero della prima colonna (escluso il 10) non è circondato da otto numeri, ma solo da cinque. Eppure anche in questo caso si ha (considerando il numero 8)

$7+14+16+18+9 =$
$=64 = 8\cdot 8$.

7	14	
8	16	
9	18	

Questi casi particolari possono rientrare nella regola generale ove si consideri la tavola pitagorica in senso lato ampliata cioè versi i numeri negativi in alto e a sinistra e verso i numeri maggiori di 10 in basso e a destra. La figura non ha bisogno di commenti : da notare solo che la regola vale sempre anche per lo zero. Si ha infatti :

3	2	1	0	-1	-2	-3
0	0	0	0	0	0	0
-3	-2	-1	0	1	2	3
-6	-4	-2	0	2	4	6
-9	-6	-3	0	3	6	9
			0			

2ª riga, 4ª colonna :

$$1+0-1+0+1+0-1+0 = 0 = 8\cdot 0$$

2ª riga, 2ª colonna :

$$3+2+1+0-1-2-3+0 = 0 = 8\cdot 0.$$

Hanno inviato ottime risposte : Enrico Jannelli e Nicola Maiellaro del L.Sc."Fermi" di BARI; Massimo Balestri e Leonardo Bertini del L.Sc. "Dini" di PISA; Luigi Silvestri e Francesco Cagnolati del L.Sc. di REGGIO EMILIA; Francesco Draicchio, Roberta Pellini ed Elena Marrone del L.Cl."Manara" di ROMA; Giuseppe Coppini e Pantaleo Greco del L.Sc."Copernico" di PRATO; Giuliana Imbrogno dell'Istit. Magistr. di COSENZA; Sonia Zilio del L.Cl. "Livio" di PADOVA; Pellegrino Musto del L.Cl. di DENTECANE; Gaetano D'Ambrosio del L.Sc. di BISCEGLIE; Fabrizio Burzacchini del L.Sc. di ANCONA; Paolo Lucardesi del L.Sc. di BERGAMO; Claudio Buso del L.Sc."Nievo" di PADOVA; Emma Frigerio del L.Sc. "Einstein" di MILANO; A.Maria Butic del L.Sc. Sloveno di TRIESTE; Vincenzo Del Vecchio del L.Cl."Albertelli" ROMA; Fernando Rossi - L.Cl."Dante" FIRENZE; Leonardo Felician e Paolo Viola - L.Cl. "Alighieri" TRIESTE; Diego Terranova del L.Sc."Oberdan" di TRIESTE; Gaetano Prota - L.Sc. MANFREDONIA; Agrosi Aniello - DISO; Alberto Perelli - GENOVA; Francesco Fogliotti - GENOVA-SAMPIERD; Giuseppe Guarato - VALDAGNO.

FIGURE TOPOLOGICAMENTE diverse formate con 1, 2, 3, 4, 5, 6 fiammiferi

1 FIAMMIFERO  (una fig.)
2 FIAMMIFERI  " "

(continua a pagina 19)

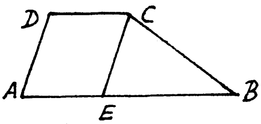
QUESTIONE 96

Costruire un trapezio dati i quattro lati. Discussione

RISOLUZIONE

di Giampaolo Belli del L. Scient. "Avogadro" di Biella.

ANALISI



Supponiamo che sia ABCD il trapezio richiesto; se da uno degli estremi della base minore si conduce la parallela ad uno dei lati obliqui, per es. CE parallela a DA, il trapezio risulta decomposto nel parallelogramma AECD e nel triangolo EBC. Di quest'ultimo sono noti i tre lati giacchè:
CB è dato; CE = DA è pure dato; EB = AB − CD, differenza fra due segmenti dati. Quindi è possibile costruire questo triangolo e successivamente anche il parallelogramma.

COSTRUZIONE

Siano a e b le basi $(a > b)$ e c e d i lati obliqui.
Sul segmento $AB = a$ si costruisce $AE = b$ e su EB il triangolo EBC avente gli altri lati $CE = c$ e $CB = d$.
Da C si conduce la parallela ad AB e da A la parallela ad EC. Detto D il loro punto d'intersezione, ABCD è il trapezio cercato.

DISCUSSIONE

Unica condizione di possibilità è
$$CB - CE < EB < CB + CE$$
cioè
$$d - c < a - b < d + c.$$
Se non sono particolarmente fissati i segmenti che devono essere basi del trapezio si potrà costruire il trapezio ogni qual volta risulta possibile costruire il triangolo EBC,

Ottime risposte hanno inviato: G. Guarato; A.M. Batic; F. Fogliotti; E. Jannelli; L. Silvestri; G. Coppini; F. Cognolati; S. Zilio; F. Draicchio; P. Viola; M. Balestri; P. Greco; P. Husto; G. D'Ambrosio; E. Frigerio e A. Agrosi.

QUESTIONE 97

Risolvere e discutere il sistema:
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ xy + x - 1 = y^2 + 2y. \end{cases}$$
T.L.

RISOLUZIONE

di Roberta Pellini del L. Classico "L. Manara" di Roma

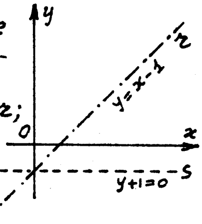
Sostituendo nella 2ª equazione il valore della x ricavato dalla prima, si ottiene una identità; pertanto il sistema dato è indeterminato e riducibile alla sola equazione $y = x - 1$, le cui infinite soluzioni sono date da
$$(*)\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha - 1 \end{cases} \quad \text{(essendo } \alpha \text{ un valore qualsiasi).}$$

* * *

La seconda equazione del sistema dato si può trasformare successivamente:
$$x(y+1) = y^2 + 2y + 1;$$
$$x(y+1) - (y+1)^2 = 0;$$
$$(y+1)(x - y - 1) = 0$$
perciò il sistema dato (di 2°gr.) si scinde nei seguenti sistemi di 1° gr.:
$$\text{I}\begin{cases} x - y = 1 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{II}\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$
Il primo sistema ammette la soluzione $x = 0$; $y = -1$, che è inclusa fra le infinite soluzioni del secondo sistema, cioè dalle $(*)$.
Le $(*)$ rappresentano anche le coordinate dei vari punti della

retta di equazione $x-y=1$.

Analiticamente la prima equazione rappresenta la retta r; la seconda equazione rappresenta l'insieme delle due rette distinte r, s; (iperbole degenere).



Hanno inviato ottime risposte anche.
Nadia Rozzi - L.Sc. REGGIO EMILIA; *Aniello Agrosi; Giampaolo Belli; F. Fogliotti; G. Coppini; P. Greco; V. Del Vecchio; E. Jannelli; F. Cagnolati; F. Draicchio; E. Marrone; A. Perelli; D. Terranova; P. Viola; L. Felician; F. Rossi; M. Balestri; C. Buso; A.M. Batic; E. Frigerio; P. Husto; G. D'Ambrosio; S. Zilio; G. Guarato.*

QUESTIONE 98

E' noto che con il simbolo $\binom{m}{n}$ si indica il numero delle combinazioni che si possono ottenere con m oggetti presi a n a n.
Verificare la seguente relazione:

$$\binom{m}{n}\binom{n}{k}=\binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}.$$

RISOLUZIONE
di Gaetano D'Ambrosio del L. Sc. di Bisceglie e di Sonia Zilio del L.Cl. "T.Livio" di Padova.

Il primo termine della relazione da verificare si può scrivere nella forma:

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1}\times\frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1}$$

da cui, tenendo presente che è:

$$m>n>k,$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)(m-k)\dots(m-n+1)}{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1}\times\frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\dots\dots 3\cdot 2\cdot 1}=$$

(semplificando e riordinando)

$$=\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k(k-1)(k-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{(m-k)\dots(m-n+1)}{(n-k)(n-k-1)\dots 2\cdot 1}=$$

$$=\binom{m}{k}\cdot\binom{m-k}{n-k}.$$ c.d.d.

Hanno effettuato la verifica anche gli Angolisti: A. Agrosi; F. Fogliotti; S. Zilio; A. Perelli; F. Rossi; E. Frigerio; G. Guarato; G. D'Ambrosio; G. Coppini; F. Draicchio.

Nota didattica

sulla determinazione della probabilità di vincere un terno al Lotto giocando tre numeri prefissati.

Riteniamo utile comunicare agli Angolisti come è stata trovata la relazione da verificare della questione 98.

In alcuni testi scolastici e in alcune dispense universitarie, per determinare la probabilità p di vincere un terno al Lotto si fa il seguente ragionamento (a nostro giudizio ERRATO):

«I casi possibili sono i terni che si possono formare con i 90 numeri, cioè $\binom{90}{3}$

I casi favorevoli sono i terni che figurano nei cinque numeri estratti, cioè $\binom{5}{3}$

quindi si ha:

$$p=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{90}{3}}=\frac{1}{11748}$$ »

Il ragionamento ESATTO invece è il seguente:

Si sa che nel gioco del Lotto, su 90 numeri se ne estraggono 5, quindi i casi possibili sono tanti quante le combinazioni semplici di 90 numeri a 5 a 5, cioè:

$$\binom{90}{5}$$

Ora i tre numeri prefissati possono essere estratti assieme ad altri <u>due</u> degli 87 numeri che restano, i quali, presi a 2 a 2, dànno luogo a

$$\binom{87}{2} \text{ combinazioni.}$$

Dunque i casi favorevoli sono $\binom{87}{2}$, onde si ha:

$$p = \frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = \dots = \frac{1}{11748}$$

Il problema generalizzato è il seguente:

Un'urna contiene m palle contrassegnate con i numeri

$$1, 2, 3, 4, \dots\dots, m.$$

Qual è la probabilità p che, estraendo n palle, vengano fuori K numeri prefissati?

$$(m > n > K)$$

Generalizzando i due ragionamenti sopra indicati si ha rispettivamente:

$$\text{(I)} \quad p = \frac{\binom{n}{K}}{\binom{m}{K}} \;; \text{(II)} \quad p = \frac{\binom{m-K}{n-K}}{\binom{m}{n}}.$$

Nonostante il ragionamento errato anche la (I) conduce, in ogni caso, ad un risultato esatto; quindi deve esistere la relazione:

$$\frac{\binom{n}{K}}{\binom{m}{K}} = \frac{\binom{m-K}{n-K}}{\binom{m}{n}}$$

da cui

$$\binom{m}{n}\binom{n}{K} = \binom{m}{K}\binom{m-K}{n-K},$$

che rappresenta la identità proposta, la cui fortuita esistenza conduce, nella risoluzione del problema citato, al risultato esatto, pur facendo un ragionamento errato.

G.S.

QUESTIONE 99

Dati i punti $A(3;0)$, $B(-1;2)$ e $C(0;1)$ scrivere:

1°) l'equazione della parabola α) avente l'asse parallelo all'asse delle y e passante per i punti A, B e C;

2°) l'equazione della circonferenza β) circoscritta al triangolo ABC.

Determinare infine le coordinate dell'ulteriore punto di intersezione fra la parabola α) e la circonferenza β).

RISOLUZIONE

di Nadia Rozzi del L. Sc. di Reggio Em; di Roberta Pellini del L.Cl."Manara" di Roma e di Gaetano D'Ambrosio del L. Sc. di Bisceglie (Bari).

I) Sia $\quad y = ax^2 + bx + c$

l'equazione generica delle parabole aventi l'asse parallelo all'asse delle ordinate. Nel caso particolare della parabola passante per A, B e C essa deve essere soddisfatta dalle coordinate dei tre punti. Cioè deve essere:

$$\begin{cases} 0 = 9a + 3b + c \\ 2 = a - b + c \\ 1 = c \end{cases}$$

da cui $\quad a = \frac{1}{6}$; $b = -\frac{5}{6}$; $c = 1$.

(continua a pag. 19)

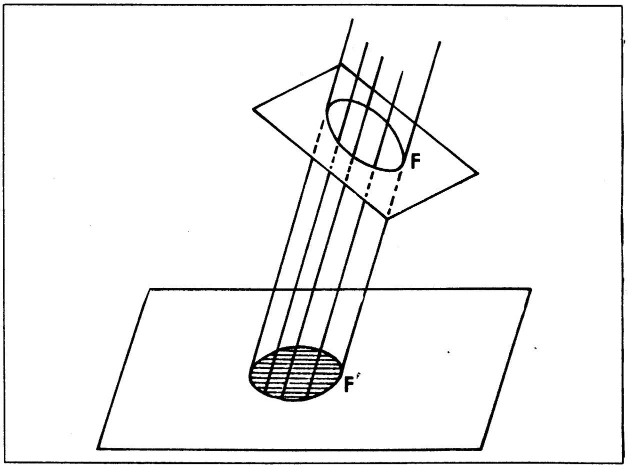
Per gentile concessione dell'Autore Prof. Luigi Campedelli e della Direzione della rivista SAPERE - Edizione DEDALO - Milano, siamo lieti di poter pubblicare per i nostri Angolisti il seguente articolo chiaro, interessante ed attuale.

IL PROGRAMMA DI ERLANGEN

di Luigi Campedelli

I matematici celebrano il centenario di una loro fondamentale scoperta: nella dissertazione fatta in occasione dell'inaugurazione dell'anno accademico (1872) dell'Università di Erlangen, Felice Klein esponeva le idee, maturatesi in quel periodo, relative al concetto di « gruppo di trasformazioni geometriche ».

Fig. 1 *La « proiezione parallela » di una figura piana sopra un piano (è il caso dell'ombra solare, sul suolo, di una figura piana).*



Reminiscenze liceali: la geometria elementare

Chi ripensi ai propri studi liceali è indotto a riflettere sopra una circostanza sulla quale forse, a suo tempo, non gli è stata richiamata l'attenzione. Il professore, di fronte alla lavagna, parla di geometria: traccia con il gesso una figura che spicca, bianca, sul nero del fondo. Per comodità di discorso, le diamo un nome: la chiamiamo *F*. L'insegnante spiega che la *F* gode di una certa proprietà, e lo prova con argomentazioni logiche, rigorosamente connesse fra loro: si tratta di quello che egli chiama un « teorema » relativo alla *F* e della sua « dimostrazione ».
Il ragazzo riproduce la figura sul proprio quaderno e sopra di essa segue le considerazioni via via svolte dal docente, e si convince che quel « teorema » è « vero ». Dunque: la figura *F* e quella — che indichiamo con *F'* — disegnata dallo studente presentano le stesse circostanze, valgono per esse i medesimi « teoremi ». Ma quelle due figure sono uguali? Certamente no: non lo consentirebbero, fra l'altro, la diversa estensione della lavagna e della pagina del quaderno. La *F* e la *F'* hanno la medesima forma, ma diverse dimensioni: cioè, come dicono i matematici, sono « simili », ossia, per intenderci più facilmente, è come se fossero due riproduzioni in « scale » differenti di una stessa figura. E malgrado ciò, la *F*, la *F'*, e tutta la serie delle figure che vediamo sopra i banchi dell'affollata aula scolastica, godono delle medesime proprietà: la *geometria* che le riguarda è la stessa. Ci si rivela così chiaramente il compito della *geometria*: si tratta di prendere una figura — la *F* —, sostituirne ad essa un'altra — la *F'*, ottenuta dalla prima con particolari criteri (nel nostro caso un cambiamento di « scala ») —, e ricercare ciò che, in questo cambiamento, non è mutato.
I matematici, anziché di sostituire la *F'* alla *F* (o questa a quella), preferiscono parlare di una *trasformazione* della *F* nella *F'* (o viceversa), e quindi ad ogni particolare tipo di trasformazioni è legata una sua *geometria*. Una visione di larga portata e di profondo significato, che vale, fra l'altro, a inquadrare la geometria in una primordiale esigenza del pensiero umano:

quella di ricercare ciò che vi è di non caduco in mezzo all'incessante mutare di quanto ci sta intorno [1].

La geometria proiettiva

Dunque: una *geometria* per ogni tipo di *trasformazioni*. Quelle che abbiamo chiamato *similitudini* (o cambiamenti di « scala ») conducono alla *geometria elementare*, che, in sostanza, risale ai celebri *Elementi* del vecchio Euclide (300 a. C.).
Ma necessità pratiche, problemi di carattere artistico (« prospettiva ») e tecnico (fotografia, cinematografia, ecc.), progresso degli studi, inducono a occuparsi di altri modi di mutare una figura.
La cinematografia mostra come una figura (piana) F si *proietti* da un punto, S (il centro ottico della macchina di proiezione), in una figura, F', sopra un piano, π (lo schermo). Il piano della F e lo schermo sono, di solito, paralleli, e la F e la F' risultano simili: ma la similitudine si perde se si toglie quel parallelismo.
Un fenomeno del tutto analogo è quello che dalla F (supposta ritagliata in un cartoncino) porta alla sua ombra, F', sopra un piano. Anzi, dal punto di vista geometrico, nulla cambia se la proiezione è fatta da una sorgente luminosa (puntiforme), S, situata a distanza finita o se si tratta dell'ombra solare. In quest'ultimo caso, ai raggi uscenti da S si sostituiscono quelli paralleli che provengono da tanta distanza. « La proiezione » — dice Leonardo — « si fa per coni o per cilindri », riferendosi al cono, o al cilindro, costituito dalle rette che congiungono i punti della F al « centro di proiezione » S, situato a distanza finita o infinita. E questo cono, o cilindro che sia, si « seziona » poi con il piano π.
Ad analogo trattamento può essere sottoposta la F', e si perviene ad una nuova figura, F'', e così di seguito. Le trasformazioni che in tal modo conducono da una figura iniziale alla finale (e che sono quindi costruibili con successive operazioni di « proiezione » e « sezione ») vengono dette *proiettività*. Da esse si perviene alla *geometria proiettiva*, secondo i concetti dianzi illustrati e che giova ripetere: si tratta della ricerca e dello studio delle

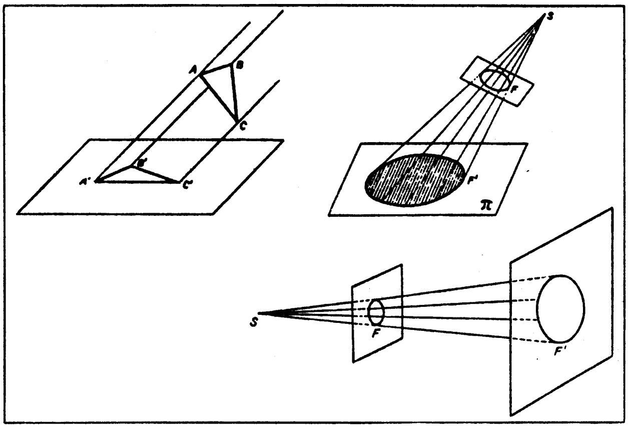


Fig. 2 *In alto a sinistra ancora una « proiezione parallela » di una figura piana su un piano; in alto a destra la « proiezione », F', di una figura piana, F, da un punto S (« centro di proiezione »), sopra un piano π (« piano di proiezione » o « schermo »); in basso come la figura precedente nel caso particolare in cui il piano della F e quello della F' sono fra loro paralleli (la F e la F' risultano « simili »). È l'aspetto geometrico della cinematografia.*

proprietà di una figura le quali si conservano (sono « invarianti ») quando invece quella figura viene comunque assoggettata a operazioni di proiezione e sezione (per semplicità, parliamo sempre di figure piane).
Indagini di questo tipo risalgono lontano nel tempo, e « ...assai prima che nascesse una vera e propria geometria proiettiva, si acquisivano dalle proprietà di una figura quelle di altre che se ne deducevano per proiezione. Ma la geometria proiettiva sorse solamente coll'abitudine di considerare la figura originale come essenzialmente identica a tutte quelle che ne sono deducibili proiettivamente, e di enunciare le proprietà che si trasportano per proiezione in modo da render evidente la loro indipendenza dalle modificazioni che si hanno proiettando » [2].

« Costruire una geometria »

Siamo di fronte ad una concezione dinamica della figura, la quale muta incessantemente (secondo un determinato processo) e di cui si mira a cogliere il persistere di questa o quella circostanza, il conservarsi di certe proprietà.

« Costruire una geometria » è quindi un ideare questo o quel particolare tipo di trasformazioni nel mondo delle figure.
Quando il pensiero scientifico, nel suo incessante progredire, è giunto a queste vedute di tanta generalità? Come sempre, non si può fissare una data e un nome, ché le idee maturano a poco a poco e sono in molti a dare il proprio contributo. Ma ciò nulla toglie al merito di chi sa afferrare il momento della maturazione e acquistare e dare consapevolezza delle mete raggiunte. Per la geometria, secondo gli orientamenti che abbiamo illustrato, quel compito doveva spettare a Felice Klein (Dusseldorf, 26 aprile 1849 - Gottinga, 27 giugno 1925), che cento anni fa, appena ventitreenne, salendo la cattedra nell'Università di Erlangen, rivelava il frutto delle proprie meditazioni. Le non molte pagine che le contengono sono divenute celebri con il nome di *programma di Erlangen* e nella traduzione italiana portano il titolo: *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti* [3].
« Figure » e loro « trasformazioni »: sono parole del linguaggio comune che richiamano in ognuno immagini e concetti abbastanza familiari, ma — fa-

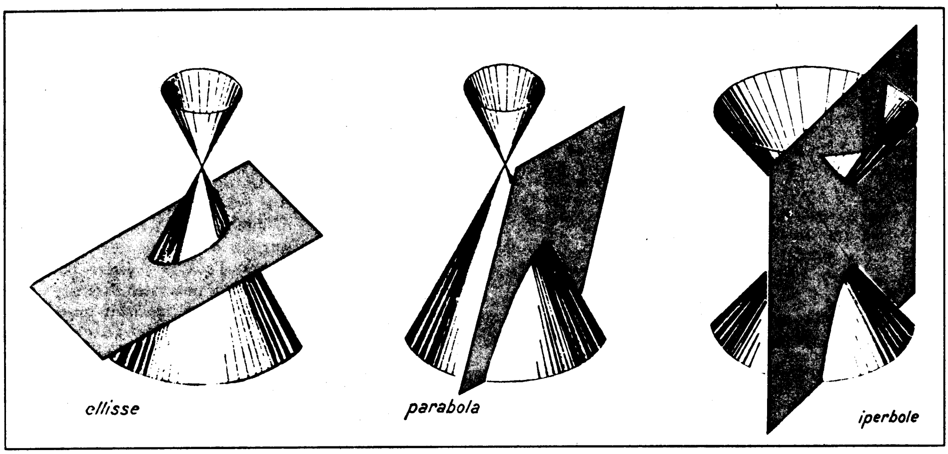


Fig. 3 *Le « coniche » come sezioni piane del « cono circolare retto », o, ciò che è lo stesso, come « proiezioni » del cerchio base di questo, dal vertice, sopra piani opportunamente scelti.*

cendo della matematica — richiedono qualche precisazione.

Abbiamo parlato di varie « geometrie », ciascuna collegata a un particolare tipo di trasformazioni. La natura di queste appare quindi elemento essenziale, e non basta il modo come si definiscono e il loro comportamento quando si applicano a una figura F: occorre anche che le trasformazioni di un medesimo tipo abbiano fra loro opportuni legami.

Cerchiamo di rendercene conto. Passare da una figura F a una figura F' attraverso una trasformazione T, e dalla F' alla F'' ricorrendo ad una trasformazione T', è come ricavare la F'' dalla F mediante la trasformazione che nasce dalla composizione della T con la T': anche questa dovrà quindi essere dello stesso tipo della T e della T'. D'altra parte, se dalla F si perviene alla F' con la T, deve essere anche possibile tornare dalla F' alla F con una trasformazione, sempre del medesimo tipo, da riguardare come inversa della T. Allora la composizione della T con la sua inversa determina una trasformazione che lascia ferma la F (ogni suo punto), e anch'essa sarà della stessa famiglia. Per queste circostanze (e qualche altra su cui non ci si può soffermare qui) si dice che l'insieme delle trasformazioni considerate forma un *gruppo*.

Si deve quindi più propriamente parlare di *gruppi di trasformazioni* e di *geometrie* ad essi associate.

Gruppi di trasformazioni nel piano

Le figure, F, F',..., fino a qui incontrate si sono sempre supposte piane. Per continuare il discorso a un livello il più semplice possibile, facciamo addirittura l'ipotesi che l'intero ambiente geometrico di cui disponiamo sia costituito da un unico piano, π: ad esso appartengono F, F', ...; in esso opera il gruppo delle trasformazioni T, T' ... . Intendiamo cioè occuparci esclusivamente di *geometria piana.*

Le *trasformazioni proiettive* (di π in se stesso), che già abbiamo in qualche modo illustrato, formano un gruppo (lo indichiamo con G_p), il quale dà luogo alla *geometria proiettiva*, Σ_p.

Le proiettività mutano rette in rette (l'ombra di una retta è una retta!), ma di solito non cambiano rette parallele in rette che pure sono parallele fra loro. Ciò accade soltanto per proiettività particolari, dette *affinità*, che pure costituiscono un gruppo, G_a (« sottogruppo » di G_p), e conducono alla *geometria affine*, Σ_a.

A questo punto conviene fermare l'attenzione sopra una figura che ci è familiare: il cerchio. Un'affinità lo trasforma in generale in una conica (ellisse, iperbole o parabola): ma esistono anche affinità particolari che gli fanno corrispondere ancora un cerchio. Sono quelle con cui ci siamo già incontrati e che abbiamo chiamate *similitudini.* Il loro gruppo G_s (sottogruppo dei precedenti) conduce alla *geometria delle similitudini*, Σ_s.

Però, in questa, due cerchi corrispondenti non hanno uguale raggio: ciò accade soltanto per le cosiddette *congruenze*, o *movimenti*, dal cui gruppo, G_m, nasce la *geometria delle congruenze*, o *dei movimenti*, Σ_m.

Nella successione dei gruppi (ciascuno dei quali, nell'ordine in cui li scriviamo, è « sottogruppo » di quelli che lo seguono):

$$G_m < G_s < G_a < G_p$$

rientrano anche altri rami della nostra scienza delle figure. Così le famose geometrie *non euclidee* si ricollegano a particolari sottogruppi di G_p.

E si può andare oltre. Il gruppo G_p si amplia in quello delle *trasformazioni birazionali* (o *cremoniane*: in omaggio a Luigi Cremona, 1830-1903), nelle quali le rette vengono cambiate in curve (algebriche) di vario ordine. La geometria omonima deve essere ricor-

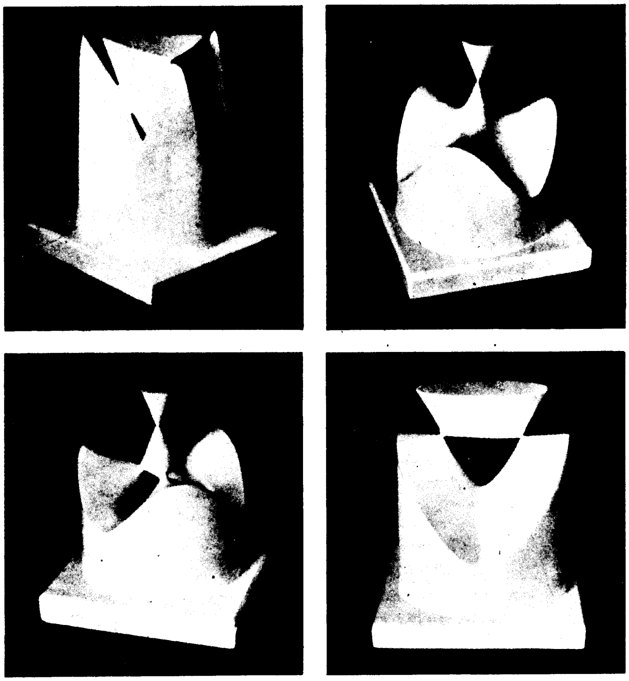


Fig. 4 *Superfici cubiche con quattro punti doppi. Tutte le superfici di questo tipo si ottengono l'una dall'altra mediante « trasformazioni proiettive »: quindi, nell'ambito della geometria proiettiva, debbono essere riguardate come « uguali » (proiettivamente identiche).*

data perché, in una sua più elevata accezione, sfocia in quella *geometria algebrica classica* che è stata gloria del nostro paese.
Oggi, a chi abbia curiosità per il lavoro dei matematici, può accadere di sentir parlare di *topologia*. È anch'essa classificabile come una « geometria » collegata al *gruppo delle trasformazioni biunivoche continue*. Questi aggettivi valgono a darne un'idea: bonariamente parlando, possiamo dire che si tratta delle trasformazioni di un foglio (piano) elastico che si stira o si comprime (senza rotture o sovrapposizioni).

Potenza di sintesi.

Si sta aprendo ai nostri occhi un quadro grandioso: anzi di troppa ampiezza per l'affrettata descrizione che qui possiamo darne. È una visione unitaria della geometria, nei suoi molteplici aspetti e nella varietà dei suoi sviluppi, che consente di comprendere gran parte della struttura del pensiero matematico, e, in questo senso, rientra nella cosiddetta *matematica moderna* la quale, per tanta parte, è appunto sforzo di penetrare l'essenza e il significato dei processi di indagine propri della nostra scienza.
Nella sintesi possente, quanto mai suggestivo appare l'incalzare dei concetti. In *geometria proiettiva*, Σ_p, a quattro punti allineati è collegato un elemento — detto *birapporto* ed esprimibile con un numero — il quale in Σ_a diviene il *rapporto* fra due segmenti di una stessa retta, e in Σ_s quello tra due segmenti qualunque.
Il *parallelismo*, ignorato in Σ_p, si incontra nella *geometria affine*, Σ_a. Soltanto nella *geometria delle similitudini*, Σ_s, si fa conoscenza con gli *angoli*, la *perpendicolarità* fra rette e il *cerchio*. Nella *geometria dei movimenti*, Σ_m, riceve precisazione il concetto di *lunghezza* di un segmento.
E le *figure uguali?* Si trovano, nel senso intuitivo del termine, in Σ_m, dove appunto due figure sono dette uguali quando l'una può essere portata ad occupare il posto dell'altra con un movimento, cioè mediante una trasformazione del gruppo G_m.
Ciò dà un improvviso chiarimento. Per ogni geometria si determina un proprio modo di concepire l'*uguaglianza* (un termine questo di cui i matematici fanno uso con tanta frequenza): due figure vi si considerano *uguali* quando si possono ottenere l'una dall'altra con una trasformazione del gruppo da cui quella geometria previene.
Così in Σ_p tutte le coniche si presentano come uguali, in Σ_a lo sono tutti i triangoli e tutte le ellissi fra loro (cerchio compreso), e lo stesso accade per le iperbole e per le parabole; nella topologia lo sono quadrati e cerchi (e, passando dal piano allo spazio, sfere e cubi!); nella geometria algebrica, rette e coniche, ecc.
Una rivoluzione? no: soltanto il gioco della logica.
Coloro che guardano alla matematica come a una scienza (o, addirittura, una tecnica) gelidamente irrigidita nel formalismo dei suoi astrusi calcoli, dovrebbero riflettere sulle pagine del « programma di Erlangen ».

BIBLIOGRAFIA

[1] Campedelli L., *Fantasia e logica nella matematica*, Feltrinelli, Milano 1966.

[2] Dall'opera citata nella nota successiva.

[3] Traduzione di G. Fano, apparsa negli « Annali di matematica pura ed applicata », s. II, to. XVII, 1890. L'originale tedesco, del 1872, F. Klein, *Vergleichende Betrachtugen über neure geometrsche Forschungen*, Program zum Eintritt in die Facultät ecc., dopo l'edizione di Erlangen, si trova ristampato, con aggiunte, nei « Mathem. Annalen », 43 Bd., 1893.

(continuazione Q. 99 da pag. 14)

Quindi l'equazione della parabola cercata è

$$y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x + 1.$$

II) Per determinare l'equazione della circonferenza β, si può, come per la parabola, imporre all'equazione generica della circonferenza

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0,$$

la condizione di passaggio per A, B e C, ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} 9 + 3m + p = 0 \\ 1 + 4 - m + 2n + p = 0 \\ 1 + n + p = 0 \end{cases}$$

da cui $m = -6$; $n = -10$; $p = 9$.

Quindi l'equazione della circonferenza β) è

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$$

Le coordinate del centro sono (3; 5). Il raggio è uguale a 5; quindi il centro si trova sulla perpendicolare condotta per A all'asse delle x e la circonferenza risulta tangente all'asse x in A.

III) Le coordinate dei punti di intersezione delle due curve si ottengono facendo sistema fra le loro equazioni

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{5x}{6} + 1 \\ x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0. \end{cases}$$

Sostituendo il valore della y fornito dalla prima e sostituendo nella seconda, dopo facili passaggi, si ottiene l'equazione in x di 4° grado:

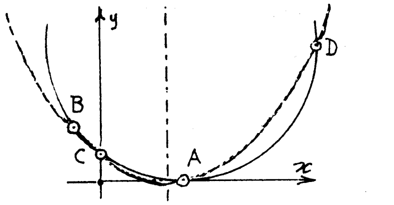
$$(*) \quad x^4 - 10x^3 + 13x^2 + 24x = 0,$$

le cui soluzioni sono le *ascisse* dei punti di intersezione cercati.

Di questa equazione sono note tre soluzioni

$x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $x_3 = -1$;

corrispondenti alle ascisse delle intersezioni note C, A e B.



Gli archi di parabola interni al cerchio sono BC e AD.

Quindi dividendo il polinomio del primo membro dell'equazione (*) successivamente per

x, $x-3$, $x+1$

si ottiene $(x-8)$.

Perciò la (*) diventa

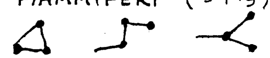
$$x(x-3)(x+1)(x-8) = 0$$

Ne segue che il quarto punto di intersezione D ha per ascissa 8, e quindi ordinata 5; cioè si ha D(8; 5)

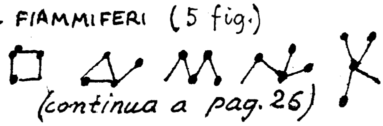
Ottime le risposte di:
E. Marrone - ROMA. *G. Belli* - BIELLA. *M. Landini* - REGGIO EM. *L. Silvestri* - REGGIO EM. - *F. Cagnolati* - REGGIO EM. *V. Del Vecchio* - ROMA - *G. Coppini* - PRATO - *A. Agrosi* - DISO - *S. Zilio* · PADOVA. *C. Buso* · PADOVA. *M. Balestri* - PISA - *P. Lucardesi* - BERGAMO - *F. Rossi* · FIRENZE - *A. Perelli* - GENOVA - *E. Frigerio* - MILANO - *F. Fogliotti* · GENOVA. *G. Guarato* · VALDAGNO.

(continua "Figure topologiche" da pag. 11

3 FIAMMIFERI (3 fig.)



4 FIAMMIFERI (5 fig.)

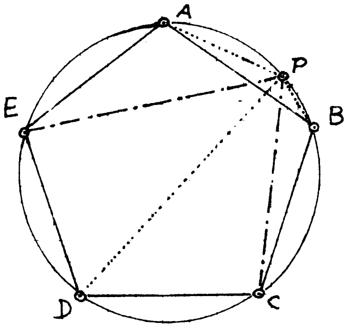


(continua a pag. 26)

QUESTIONE 100

Siano A, B, C, D, E i vertici di un *pentagono regolare* inscritto in una circonferenza e sia P un punto qualunque dell'arco AB. Dimostrare che si ha:

$$PC + PE = PA + PB + PD.$$



RISOLUZIONE
di Giovanni Roberto di Genova

Indicando con ℓ il lato del pentagono, per il teorema di Carnot, si hanno le seguenti uguaglianze

1) $\ell^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PE}^2 - 2\overline{PA}\cdot\overline{PE}\cos\alpha$

2) $\ell^2 = \overline{PE}^2 + \overline{PD}^2 - 2\overline{PE}\cdot\overline{PD}\cos\alpha$

3) $\ell^2 = \overline{PD}^2 + \overline{PC}^2 - 2\overline{PD}\cdot\overline{PC}\cos\alpha$

4) $\ell^2 = \overline{PC}^2 + \overline{PB}^2 - 2\overline{PC}\cdot\overline{PB}\cos\alpha$

(avendo posto $\alpha = A\hat{P}E = E\hat{P}D = D\hat{P}C = C\hat{P}B$)

Dalle 1) e 2), dalle 3) e 4) e dalle 2) e 3) si ha facilmente:

5) $\overline{PA} + \overline{PD} = 2\,\overline{PE}\cos\alpha$

6) $\overline{PD} + \overline{PB} = 2\,\overline{PC}\cos\alpha$

7) $\overline{PE} + \overline{PC} = 2\,\overline{PD}\cos\alpha$.

Dolle 5) e 6) si ha:

8) $2\cos\alpha(\overline{PE}+\overline{PC}) = \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PD}+\overline{PD}$

e ricavando $\overline{PD}$ dalla 7) e sostituendo nella 8)

$$2\cos\alpha(\overline{PE}+\overline{PC}) = \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PD}+\frac{\overline{PE}+\overline{PC}}{2\cos\alpha}.$$

$$(\overline{PE}+\overline{PC})\left(2\cos\alpha - \frac{1}{2\cos\alpha}\right) = \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PD}$$

Ma $\alpha = 36°$ e quindi

$\cos 36° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$, da cui segue:

$$2\cos\alpha - \frac{1}{2\cos\alpha} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \dots = 1.$$

Quindi $\overline{PE}+\overline{PC} = \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PD}$.

NOTA. L'angolo di 36° e' l'unico del primo quadrante che soddisfi all'equazione:

$$2\cos\alpha - \frac{1}{2\cos\alpha} = 1$$

RISOLUZIONE
di Gaetano D'Ambrosio del L. Sc. di Bisceglie (BA)

Poiche la misura di ciascuno degli angoli interni del pentagono regolare è $\frac{3}{5}\pi$, si ha:

$$\overline{EC} = 2\cdot\overline{ED}\,\mathrm{sen}\frac{E\hat{D}C}{2} = 2\cdot\overline{ED}\,\mathrm{sen}\frac{3}{10}\pi = \overline{ED}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Applicando il teorema di Tolomeo ai quadrilateri $ADBP$ ed $EDCP$, si ha rispettivamente:

I) $\overline{AD}\cdot\overline{BP} + \overline{AP}\cdot\overline{DB} = \overline{DP}\cdot\overline{AB}$
$\quad\overline{EC}(\overline{BP}+\overline{AP}) = \overline{AB}\cdot\overline{DP}$

I') $\overline{BP}+\overline{AP} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EC}}\cdot\overline{AP} = \frac{2}{\sqrt{5}+1}\overline{DP}$

II) $\overline{ED}\cdot\overline{CP} + \overline{EP}\cdot\overline{DC} = \overline{DP}\cdot\overline{EC}$
$\quad\overline{ED}(\overline{CP}+\overline{EP}) = \overline{DP}\cdot\overline{EC}$

II') $\overline{CP}+\overline{EP} = \frac{\overline{EC}}{\overline{ED}}\cdot\overline{DP} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\overline{DP}$

Dalla I') si ha:

$$(\overline{BP}+\overline{AP}) + \overline{DP} = \frac{2}{\sqrt{5}+1}\overline{DP} + \overline{DP} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1\right)\cdot\overline{DP} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\overline{DP}.$$

Tenendo presente la II') e quest'ultima si ha la tesi:

$$\overline{PC}+\overline{PE} = \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PD}.$$

Il prof. Alfonso La Paglia di Biella aggiunge alla sua risoluzione la seguente

OSSERVAZIONE ESTENSIVA

Consideriamo la tesi nella forma:

$$\overline{PA}-\overline{PE}+\overline{PD}-\overline{PC}+\overline{PB}=0$$

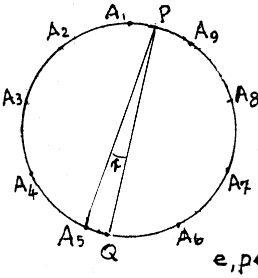
Se il poligono regolare avesse un numero dispari n di lati e i vertici fossero

$A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ (in fig. $n=9$)

la somma a segni alternati

$$\Sigma=\overline{A_1P}-\overline{A_2P}+\overline{A_3P}-\dots\dots+\overline{A_nP}$$

sarebbe ancora uguale a zero?



Posto $A_5\widehat{P}Q=x$ (essendo $\overline{PQ}$ un diametro $=1$ si avrebbe $A_1\widehat{P}A_2=A_2\widehat{P}A_3=$ $=\dots=A_{n-1}\widehat{P}A_n=\frac{\pi}{n}$ e, pertanto, per $n=9$

$$\Sigma=\cos(4\alpha+x)-\cos(3\alpha+x)+\dots-\cos(\alpha+x)+$$
$$+\cos x-\cos(\alpha-x)+\cos(2\alpha-x)-\dots\dots+$$
$$+\cos(4\alpha-x)\ ;\ \text{ove}\ \alpha=\frac{\pi}{9}.$$

E per le formule di prostaferesi:

$$\Sigma=\left[\cos(4\alpha+x)+\cos(4\alpha-x)\right]-$$
$$-\left[\cos(3\alpha+x)+\cos(3\alpha-x)\right]+\dots+\cos x\ ;$$

$$\Sigma=\cos x\left[2\cos 4\alpha-2\cos 3\alpha+2\cos 2\alpha-2\cos\alpha+1\right]$$

Essendo $\cos x\neq 0$, la tesi $\Sigma=0$ è valida se risulta genericamente

$$2\cos\frac{n-1}{2}\alpha-2\cos\frac{n-3}{2}\alpha+2\cos\frac{n-5}{2}\alpha-\dots\dots+$$
$$+2\cos 2\alpha-2\cos\alpha+1=0$$

ove $\alpha=\frac{\pi}{n}$.

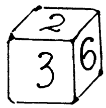
Si ha che questa uguaglianza è verificata per

$n=3\to\ \alpha=60°$ (VEDI QUESTIONE 47)

$n=9\to\alpha=20°$; $n=15-\alpha=12°$; ecc.

Hanno inviato ottime risposte Cosmo Pace del L. Sc. "Copernico" di PRATO; F. Fogliotti; G. Guarato; E. Frigerio e P. Lucardesi.

QUESTIONI 101



In quanti modi diversi possono essere segnati i numeri

1 2 3 4 5 e 6

sulle facce di un dado, con la sola condizione che 1 e 6, 2 e 5, 3 e 4 siano su facce opposte?

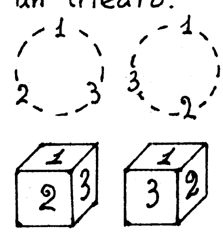
Marco Barlotti.

RISOLUZIONE di Gaetano D'Ambrosio del L. Sc. di Bisceglie.

Due dadi risultano "UGUALI" o meglio "UGUALMENTE SEGNATI" quando presentano un triedro sulle cui facce vi siano le stesse cifre, ugualmente disposte. Infatti, per la condizione imposta anche le altre tre facce avranno tre cifre uguali e ugualmente disposte.

Inoltre, per la condizione imposta, è sempre possibile trovare su un dado un triedro sulle cui tre facce vi siano le cifre 1,2,3.

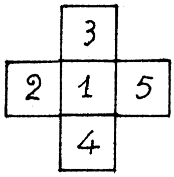
Quindi il numero delle disposizioni possibili delle sei cifre è dato dai diversi modi in cui si possono disporre le cifre 1, 2, 3 sulle tre facce di un triedro.

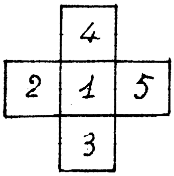


E' facile verificare che vi sono due SOLE posizioni possibili, corrispondenti ai due versi in cui si può disporre ciclicamente la terna 1,2.3.

RISOLUZIONE di Emma Frigerio del L.Sc."Einstein" di MILANO

Considero uno *sviluppo a croce* di cinque facce di un dado. Pongo al centro una cifra qualsiasi, per esempio, la cifra 1; è ovvio allora che la cifra 6 non andrà scritta nelle quattro caselle rimaste. Scrivo un'altra cifra, per esempio il 2 in un'altra casella; il 5 va allora nella casella opposta.





Restano da sistemare ancora il 3 e il 4.
E' evidente che si possono sistemare in due modi diversi, uno tale che per passare dal 2 al 3 si debba procedere in senso *orario*; l'altro in modo che per passare dal 2 al 3 si debba procedere in senso *antiorario*.
Anche ponendo al centro una cifra diversa, si ottengono schemi che sono equivalenti a questi due: coinsiderando tutte le sei facce si osserva che sono disposizioni identiche o alla prima o alla seconda.
Si hanno pertanto due sole possibilità.

Hanno inviato risposte esatte anche: Leonardo Bertini e Massimo Balestri del L. Sc. "U. Dini" di PISA.

QUESTIONE 102

Determinare il numero delle intersezioni interne determinate dalle diagonali di un poligono convesso di n lati
Esistono poligoni convessi aventi il numero delle diagonali uguali a quello delle intersezioni interne determinate dalle diagonali stesse?
G.C.

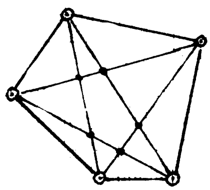
RISOLUZIONE di Alfonso La Paglia di Biella

Il numero delle intersezioni interne richiesto è

$$N = \frac{1}{24}\, n\,(n-1)(n-2)(n-3),$$

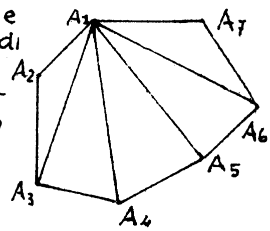
con la clausola che, ove in una intersezione concorrano K diagonali, tale intersezione deve essere considerata con l'indice di molteplicità

$$\binom{K}{2} = \frac{1}{2}K(K-1).$$



Esiste un solo poligono convesso, il pentagono, in cui le intersezioni e le diagonali sono in ugual numero, cioè 5.

Ecco la DIMOSTRAZIONE:
Per evitare astrusità di simbolismo, materializiamo il poligono con 7 lati:
Il passaggio a n lati sarà poi immediato



Sia $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ il poligono convesso Dal vertice A_1

conduciamo le $n-3=4$ diagonali A_1A_3 è tagliata in 4 punti da

$$A_2A_4;\ A_2A_5;\ A_2A_6;\ A_2A_7.$$

A_1A_4 è tagliata in $2\cdot 3$ punti da

$$A_2A_5;\ A_2A_6;\ A_2A_7;\ A_3A_5;\ A_3A_6;\ A_3A_7.$$

A_1A_5 è tagliata in $3\cdot 2$ punti da

$$A_2A_6;\ A_2A_7;\ A_3A_6;\ A_3A_7;\ A_4A_6;\ A_4A_7.$$

A_1A_6 è tagliata in $4\cdot 1$ punti da:

$$A_2A_7;\ A_3A_7;\ A_4A_7;\ A_5A_7.$$

In complesso le intersezioni determinate sulle 4 diagonali uscenti da A_1 sono:

$$1\cdot 4+2\cdot 3+3\cdot 2+4\cdot 1$$

ossia generalizzando:

$$N_1=1(n-3)+2(n-4)+3(n-5)+\dots+(n-3)\cdot 1=$$

[vedi NOTA I] $=\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)$.

Considerando ora le altre diagonali uscenti dai rimanenti vertici, le intersezioni sono n volte le precedenti, cioè $n\cdot N_1$. In questo modo però ciascuna intersezione è computata 4 volte, perchè se PQ ed RS sono due diagonali generiche che si incontrano in H interno, H viene computato come intersezione di $PQ\cdot RS$, di $PQ\cdot SR$, di $QP\cdot RS$ e di $QP\cdot SR$.

Il numero totale esatto delle intersezioni è quindi

$$N=\frac{1}{4}\,n\,N_1=\frac{1}{24}\,n(n-1)(n-2)(n-3) \quad (*)$$

Se poi K diagonali passano per uno stesso punto, esse devono considerarsi come $\binom{K}{2}$ coppie che dànno luogo a $\binom{K}{2}$ punti, anche se coincidenti.

Osservando infine che il numero D delle diagonali è $\frac{1}{2}n(n-3)$, l'equazione $N=D$, cioè:

$$\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)=\frac{1}{2}n(n-3)$$

ammette l'unica soluzione *accettabile* $n=5$.

NOTA I

Giustifichiamo la formula che esprime N_1.

In senso generico sia:

$$x=1\cdot h+2\cdot(h-1)+3(h-2)+\dots+h\cdot 1.$$

Si scrive:

$$x=1\cdot h+2(h-1)+3(h-2)+\dots+h\{h-(h-1)\}=$$

$$=h\,\frac{h(h+1)}{2}-\{(1+1)\cdot 1+(2+1)\cdot 2+(3+1)3+\dots$$

$$\dots(h-1+1)(h-1)\}=$$

$$=\frac{1}{2}h^2(h+1)-\{[1^2+2^2+3^2+\dots+(h-1)^2]+[1+2+3+\dots+(h-1)]\}$$

E ricordando che

$$1^2+2^2+3^2+\dots+m^2=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$$

[Vedi Nota II] PAGINA 24, per $m=h-1$ si ha:

$$x=\frac{1}{2}h^2(h+1)-\frac{1}{6}(h-1)h(2h-1)-\frac{1}{2}h(h-1)=$$

$$=\frac{1}{6}h\left[3h(h+1)-(h-1)(2h-1)-3(h-1)\right]=$$

$$=\frac{1}{6}h(h^2+3h+2)=\frac{1}{6}h(h+1)(h+2).$$

Ponendo ora $h=n-3$ si ha:

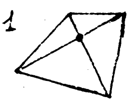
$$x=N=\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3).$$

Casi particolari:

Applicando la formula (*) è facile calcolare N.

Per il quadrilatero ($n=4$) si ha:

$$N=\frac{1}{24}\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=1$$



Per il pentagono $(n=5)$ si ha $N=\frac{1}{24}\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 5$. Per $n=6 \rightarrow N=15$ ecc.

NOTA II Dimostriamo che $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
Si ha infatti:

$$\begin{aligned}
1^3 &= &&= 1 \\
2^3 &= (1+1)^3 &&= 1 + 3\cdot 1^2\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1^2 + 1^3 \\
3^3 &= (1+2)^3 &&= 1 + 3\cdot 1^2\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 2^2 + 2^3 \\
4^3 &= (1+3)^3 &&= 1 + 3\cdot 1^2\cdot 3 + 3\cdot 1\cdot 3^2 + 3^3 \\
&\cdots\cdots &&\cdots\cdots \\
n^3 &= [1+(n-1)]^3 &&= 1 + 3\cdot 1^2(n-1) + 3\cdot 1(n-1)^2 + (n-1)^3 \\
(n+1)^3 &= (1+n)^3 &&= 1 + 3\cdot 1^2\cdot n + 3\cdot 1\cdot n^2 + n^3 .
\end{aligned}$$

Sommando membro a membro e semplificando si ha

$$(n+1)^3 = (n+1) + 3(1+2+3+\cdots+n) + 3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$

da cui:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3-(n+1)-3\cdot\frac{1+n}{2}\cdot n\right]=$$

$$=\frac{n+1}{3}\left[(n+1)^2-1-\frac{3}{2}n\right]=\frac{n+1}{3}\left[n^2+2n+1-1-\frac{3}{2}n\right]=$$

$$=\frac{n+1}{3}\cdot\frac{2n^2+n}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Hanno inviato ottime risposte: Maria Luisa Preti di Varese; Giuseppe Guarato di Valdagno; Francesco Fogliotti di Genova-Sampierd; Leonardo Bertini del L. Sc. "U. Dini" di Pisa

QUESTIONE 103

GARA MATEMATICA MATHESIS 1971

Tutte le sezioni di una sfera sono circolari.
Ma è anche vero, inversamente, che una superficie avente tutte le sezioni circolari è necessariamente una sfera?
Per poter rispondere NO basta trovare un controesempio.
Per poter rispondere SI occorre indicare una dimostrazione.

RISOLUZIONE di Emma Frigerio del L. Sc. "Einstein" di MILANO

Un solido può essere "di rotazione" oppure no.
Se non è di rotazione non può avere tutte le sezioni circolari.
Supponiamo ora che esista un solido di rotazione che abbia tutte le sezioni circolari e che non sia una sfera, e consideriamo una qualunque sezione che passi per l'asse di rotazione. Tale sezione non può essere circolare, altrimenti il solido sarebbe generato dalla rotazione di un semicerchio, cioè sarebbe una sfera.
Resta così dimostrato che un solido avente tutte le sezioni circolari è necessariamente una SFERA.

Sono pervenute anche le ottime risoluzioni di G. D'Ambrosio, F. Fogliotti e G. Guarato.

QUESTIONE 104

Dimostrare che se p e q sono numeri interi dispari, l'equazione

$$x^n + 2px + 2q = 0 \qquad (I)$$

non ha radici razionali per

$$n = 2, 3, 4 \ldots$$

(*Ammissione Sc. Normale Superiore di PISA – 1971*).

RISOLUZIONE

di Giuseppe Guarato - Valdagno

Risulta immediatamente:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{per } n=0 & x = -\dfrac{2q+1}{2p}, \\ \text{per } n=1 & x = -\dfrac{2q}{2p+1}. \end{array}\right\} \text{valori razionali}$$

Per $n \geq 2$ si supponga che esista una soluzione razionale

$$x = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{con} \quad \alpha; \beta \in Z$$

e primi fra loro.

Sostituendo nella (I) si ha:

$$\frac{\alpha^n}{\beta^n} + 2p\frac{\alpha}{\beta} + 2q = 0,$$

da cui

$$\alpha^n = -2\beta^{n-1}(p\alpha + q\beta)$$

Quest'ultima relazione impone che α sia pari e quindi β sia dispari con $(p\alpha + q\beta)$ pure dispari. Allora α^n è multiplo di 2^n con $n \geq 2$, mentre il secondo membro è multiplo soltanto di 2 e la relazione sopra scritta è assurda.

L'equazione (I) quindi non ammette radici razionali per $n \geq 2$.

Hanno inviato la risoluzione A. Maria Batic - L. Sc. Slov. TRIESTE · *A. La Paglia* - BIELLA · *G. D'Ambrosio* - L. Sc. BISCEGLIE - *E. Jannelli* L. Sc. BARI - *E. Frigerio* · L. Sc. MILANO *L. Felician, D. Terranova e P. Viola* - L. Sc. TRIESTE.

QUESTIONE 105

GARA MATEMATICA MATHESIS 1971

Si consideri il numero ottenuto moltiplicando fra loro tutti gli interi da 1 a 10000, (il cosiddetto *fattoriale di 10 000* = 10 000! = = 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · ..... 9999 · 10000)

Quante volte vi è contenuto come fattore il numero 7 ?

RISOLUZIONE

di Gaetano D'Ambrosio del L. Sc. di Bisceglie

Il numero di volte in cui appare come fattore in 10 000! il numero 7 è dato dal seguente calcolo

$$\begin{array}{l|l} 10000 & 7 \\ \cdots & 1428 \;|\; 7 \\ & \cdots \;\; 204 \;|\; 7 \\ & \qquad \cdots \;\; 29 \;|\; 7 \\ & \qquad\qquad \cdots \;\; 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \to 1428 + \\ \to 204 + \\ \to 29 + \\ \to 4 = \\ \hline \boxed{1665} \end{array}$$

Infatti, dividendo 10 000 per 7, otteniamo il numero dei multipli di 7 compresi fra 1 e 10 000. Dividendo il quoziente ottenuto ancora per 7, otteniamo il numero dei multipli di 7^2, e così via.

I successivi quozienti ci dicono che in 10 000! compaiono 1428 multipli di 7; di cui 204 sono anche multipli di 7^2; 29 multipli di 7^3 e 4 sono multipli di 7^4.

Quindi il fattore 7 si presenta in 10 000! complessivamente $1428 + 204 + 29 + 4 = 1665$.

Analoga risposta hanno inviato L. Felician · *L. Cl.* - *TRIESTE* - *M. Balestri* · *L. Sc. PISA* - *P. Viola* · *L. Sc. Trieste* - *E. Frigerio* · *L. Sc. MILANO*

(continua)

F. Rossi. L. Cl. FIRENZE - S. Zilio L. Cl. SARMEOLA - A. Perelli ed F. Fogliotti di GENOVA

RISOLUZIONE di Enrico Jannelli del L. Sc. di BARI

Per trovare quante volte un numero n è contenuto nel fattoriale «$a!$» si divide innanzitutto a per n e il quoziente $\frac{a}{n}$ indica il numero dei multipli di n minori di a (il resto eventuale della divisione non ha influenza). Se $\frac{a}{n} > n$ tra gli $\frac{a}{n}$ multipli ve ne saranno alcuni multipli di n^2. Per conoscere il numero di questi multipli si divide $\frac{a}{n}$ per n; si ha cioè $\frac{a}{n^2}$. Si continua così fino a quando $\frac{a}{n^k} < n$. La somma

$$\frac{a}{n} + \frac{a}{n^2} + \cdots + \frac{a}{n^k}$$

indica l'esponente con il quale n è presente in $a!$

Nel caso nostro, $n=7$, $a=10000$ si ha:

$$\frac{10000}{7} + \frac{10\,000}{49} + \frac{10\,000}{343} + \frac{10\,000}{2401} =$$

$$[10000:2401<7] \quad = \cdots = 1665.$$

RISOLUZIONE di Giuseppe Guarato di Valdagno

Un numero $\alpha \in \mathcal{N}$ e $\neq 1$ compare come fattore nel numero $x \in \mathcal{N}$:

1 volta se $1 < x \leq \alpha$
α volte se $\alpha+1 < x \leq \alpha^2$
α^2 volte se $\alpha^2+1 < x \leq \alpha^3$

α^n volte se $\alpha^n+1 < x \leq \alpha^{n+1}$

avendo contato in α^i «i» volte il fattore α.

Assunto un $n \in \mathcal{N}$ sia

$$n = a_h\alpha^h + a_{h-1}\alpha^{h-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = $$
$$= (a_h\, a_{h-1} \cdots a_1\, a_0)_{\text{in base alfa}}$$

con $a_i < \alpha$ l'espressione di n in base α.

Ne segue che il numero f di volte in cui α compare come fattore in $n!$ è espresso da:

$$f = a_1 + a_2(\alpha+1) + a_3(\alpha^2+\alpha+1) + \cdots$$
$$\cdots + a_h(\alpha^{h-1} + \alpha^{h-2} + \cdots + \alpha + 1).$$

Per $\alpha = 7$ e $n = 10000$ si ha

$$(10\,000)_{10} = (41104)_7$$

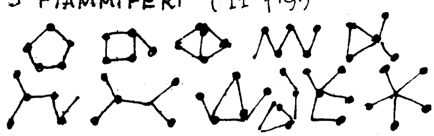
e 7 compare come fattore in $10\,000!$

$$f = 4(7^3+7^2+7+1) + (7^2+7+1) +$$
$$+ (7+1) = 1600 + 57 + 8 =$$
$$= 1665 \text{ volte}.$$

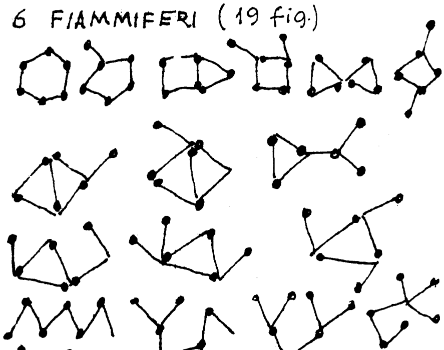
(continua da pag. 19)

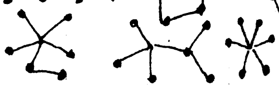
FIGURE TOPOLOGICAMENTE DIVERSE

5 FIAMMIFERI (11 fig.)



6 FIAMMIFERI (19 fig.)





Quante con 7 fiammiferi?

Il **PERIODICO DI MATEMATICHE**
riprende le pubblicazioni, sospese un paio di anni or sono. Diverrà l'organo della società **MATHESIS**,
per dare maggiore diffusione e maggiore efficacia alla sua azione intesa soprattutto a migliorare e valorizzare l'insegnamento della matematica in tutti gli ordini e tipi di scuole, e la comprensione della matematica e del suo ruolo nella cultura, nella scienza, nella vita.
Si rivolgerà soprattutto agli **INSEGNANTI DI MATEMATICA**, occupandosi dei problemi che essi effettivamente incontrano giorno per giorno, al contatto coi loro allievi, ai quali, prima ancora che « insegnare » matematica, occorre offrire stimoli spunti situazioni per suscitare idee e interessi di natura matematica.
Più ancora, i **FUTURI** insegnanti di matematica
potranno giovarsi delle osservazioni, notizie, indicazioni che troveranno nel Periodico, come necessaria integrazione di natura formativamente didattica agli studi spesso astrattamente dottrinari loro impartiti.

Il **PERIODICO DI MATEMATICHE**
si propone di presentarsi come efficace e semplice mezzo di comunicazione, di discussione, di corrispondenza coi lettori, centrato più sulle idee e sugli obiettivi e sui motivi di utilità delle matematiche che non, in genere, su aspetti più specificamente tecnici.

L'abbonamento annuo normale, di L. 3.000 (Estero L. 5.000) dà diritto all'abbuono di L. 500 sulla quota d'iscrizione alla Mathesis (cioè al pagamento della sola quota per la Sezione, senza quella di L. 500 per la Sede centrale).
Abbonamento sostenitore: L. 10.000 (Estero L. 15.000).
Per Istituzioni ed Enti interessati a promuovere lo sviluppo della cultura e della scuola si raccomanda la sottoscrizione di un Abbonamento di benemerenza: L. 100.000, oppure di un certo numero di abbonamenti ordinari (per es. 50, o 100, ecc.) a favore di scuole o biblioteche ecc. designate dal sottoscrittore.
Tutti i versamenti vanno effettuati sul c/c Postale n. 1/60695 intestato alla Società Mathesis; per la corrispondenza, l'indirizzo è:

MATHESIS, c/o Ist. Matem. dell'Università

00185 Roma, Via Vicenza 23 (Tel. 49.52.297)

direttore:
bruno de finetti

segretario di redazione:
bruno rizzi

SPEDIZIONE IN ABBONAMENTO POSTALE GRUPPO IV

Coloro che trattengono
ANGOLO ACUTO
sono pregati di inviare
con sollecitudine
la loro quota
di abbonamento

PER FAVORE, NON CESTINARE

Se questo periodico non vi interessa, vi preghiamo
di respingere le copie ricevute al MITTENTE:

ANGOLO ACUTO - Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

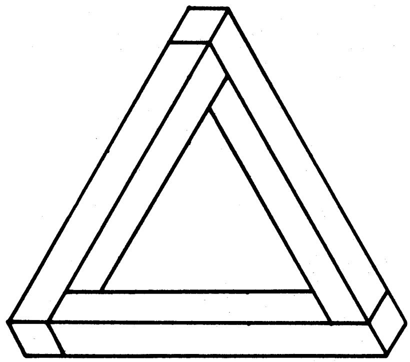
GLI AMICI DI « ANGOLO ACUTO »

BENEMERITI:

Prof. Pietro Castaldo - CITTA' DI CASTELLO
Prof. Alfonso La Paglia - BIELLA
Ing. Giovanni Pallai - ROMA

SOSTENITORI:

Prof. Francesco Criscione - RIMINI
Prof. Bruno De Finetti - ROMA
Prof. Giuseppe Guarato - VALDAGNO
Prof. Alessandra Pianca - ROBBIO
Prof. Annunziata Palumbo - NAPOLI
Prof. Sabina Palmieri - ERCOLANO
Prof. Bruno Rizzi - ROMA
Prof. Giorgio Sestini - FIRENZE
Prof. Mario Serra - TORINO
Prof. Luigia Spilimbergo - ODERZO



TRIANGOLO « INDECIDIBILE »

A chi ci procurerà DIECI nuovi abbonati invieremo l'abbonamento gratuito per il 1973, oppure i fascicoli di una annata arretrata completa.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 gennaio 1970
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso*
Stampato dalla **Tipografia KAPPAESSE - Firenze**
Associato all'USPI - Unione Stampa Periodica Italiana