ANNO IV 1973 3 MAGGIO-GIUGNO

L'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

Periodico bimestrale
a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

spedizione in abb. postale - gruppo IV
conto corrente postale 5/27919

Abbonamenti per il 1973

Studenti	L.	1400
Professori e Scuole	L.	2000
Sostenitori	L.	3000
Benemeriti	L.	5000

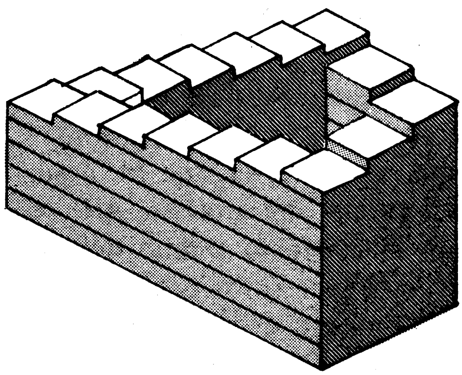
L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio.

SALIRE... SENZA SALIRE

Le « figure indecidibili » possono essere disegnate ma non hanno significato reale cioè non esistono come oggetti nella realtà.

La ragione di ciò va ricercata nel fatto che il sistema percettivo è abituato a ricostruire un mondo tridimensionale in base ad informazioni essenzialmente bidimensionali.

Quando l'informazione sulla terza dimensione risulta come in questo caso incompatibile con l'esperienza sensoria, il cervello non risulta in grado di pervenire ad una soluzione univoca e realmente determinata.



Pubblichiamo a pagina 2

IL TEMA DI MATURITÀ MAGISTRALE proposto dal Ministero della P. I. nella sessione suppletiva del 18 Luglio 1972.

LA PALESTRA DELLE GARE

AVVERTENZE IMPORTANTI PER I SOLUTORI. Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte. Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale. Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età. Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE
entro il 30 giugno 1973

Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori. Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.

QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 131

Tema proposto alla
MATURITA' MAGISTRALE
SESSIONE SUPPLETIVA
18 LUGLIO 1972

Il triangolo ABC è equilatero ed ha il lato di lunghezza a. Indicando con M il punto medio dell'altezza AH e con N il punto medio del lato AC si esprimano per mezzo di a il volume e l'area della superficie del solido generato dal trapezio MNCH in una rotazione completa attorno al lato AC.
Si determini poi a in modo che l'area predetta sia uguale a quella di una sfera avente il raggio di un centimetro.

(Gentilmente comunicatoci dal Prof. Nunzio Ortu di Viterbo).

QUESTIONE 132

Calcolare la somma dei coefficienti del polinomio-sviluppo del seguente prodotto:

$$(5x+3y-4z)^2 \cdot (3x+2y+5z)^3 \cdot$$
$$\cdot (4x-y+2z)^4$$

D. Palermo

QUESTIONE 133

Per un punto P dato nell'interno di un cerchio, si tracci una corda AB e le tangenti al cerchio nei punti A e B. Determinare la posizione della corda per cui risulti *minimo* (*oppure massimo*) il prodotto delle distanze del punto P dalle due tangenti.

Fernando Rossi

QUESTIONE 134

Dimostrare che moltiplicando due numeri *pari* consecutivi *oppure* due numeri dispari consecutivi ed aggiungendo 1 si ottiene sempre un quadrato perfetto.

QUESTIONE 135

Condurre per un punto P assegnato sul diametro AB di una circonferenza una corda CD in modo che l'arco BD sia *triplo* dell'arco AC.

Gianni Sena

RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 106

Scomporre un triangolo equilatero in 5 parti con le quali si possano ricomporre:

a) *due* triangoli equilateri;

b) *tre* triangoli equilateri.

Nota: Nelle due ricostruzioni alcune delle parti componenti il triangolo originario possono essere ribaltate.

Marco Barlotti

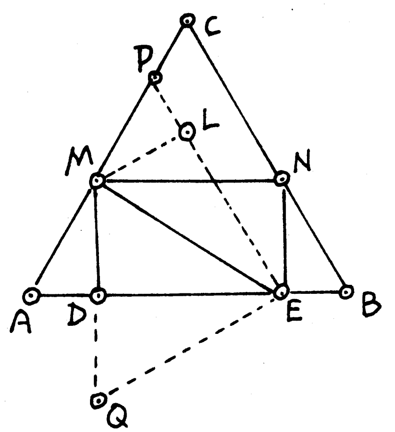
RISOLUZIONE

di Giuseppe Guarato di Valdagno (Vi)

La condizione *b)* porta a concludere che una delle 5 parti deve essere un triangolo equilatero CMN. Le perpendicolari per M ed N ad AB formano due triangoli rettangoli uguali AMD e BNE che, accostati, compongono un triangolo equilatero.

ME deve ora dividere il rettangolo DENM in due triangoli simili al triang. ADM e deve risultare $ME \perp AC$.

Ne segue $\overline{AE} = 2 \cdot \overline{AM} = 4\overline{AD} \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{AB} = 5\overline{AD} \Rightarrow \overline{AD} = 1/5 \cdot \overline{AB}$.



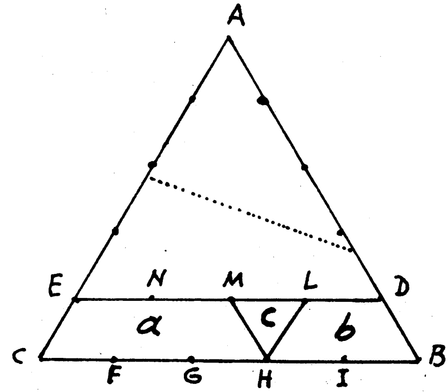
a) I. Il triangolo CMN;
II. Il triangolo AEP, ottenuto ribaltando il triang. MEN e portandolo nella posizione EML, e portando il triangolo NEB -nella posizione MLP.

b)
I. Il triangolo CMN.
II. Il triangolo che si ottiene accostando i triangoli MDA ed NEB;
III. Il triangolo MQE ottenuto ribaltando MNE e portandolo nella posizione EDQ.

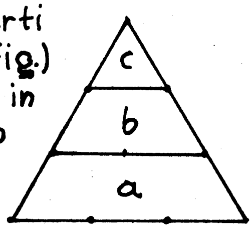
Analoga risposta hanno inviato: Giuliana Imbrogno dell'Istit. Magistr. "L. Della Valle" Cosenza e Gaetano D'Ambrosio del Lic. Scient. Bisceglie (Ba).

NOTA DELLA REDAZIONE.
La questione proposta va intesa nel senso che con le stesse cinque parti si possano ricostruire sia DUE triang. equilateri, sia TRE triang. equilateri. Molti Angolisti hanno considerato la questione come due quesiti separati. Merita tuttavia di essere pubblicata la risposta di Alberto Perelli di Genova:

α)
Considero il triangolo equilatero ABC e divido il lato BC in 5 parti uguali; sia inoltre $\overline{BD} = \frac{1}{5}\overline{AB}$. Dal punto D conduco la parallela a BC fino ad E; ovviamente è
$$\overline{DE} = \frac{4}{5}\overline{BC}.$$
Divido $\overline{ED}$ in 4 parti uguali. Unisco il punto H con i punti M ed L (vedi figura) e ottengo logicamente un triangolo equilatero.



Il trapezio CBDE risulta diviso in tre parti a, b, c (vedi fig.) ricomponibili in un triangolo equilatero così: →



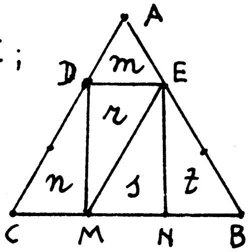
L'ulteriore triangolo equilatero è ADE.
Poichè la questione richiede la suddivisione del triangolo dato in 5 parti, una qualsiasi delle 4 parti ottenute può essere ulteriormente divisa in 2 parti in un modo

qualsiasi e poi ricomposta.

b)

Presento due risoluzioni:

I) Divido BC in tre parti uguali CM = MN = NB e conduco da M la parallela ad AC; conduco anche da M e da N la perpendicolare a BC fino ad incontrare AC e AB rispettivamente nei punti D ed E; congiungo D con E.

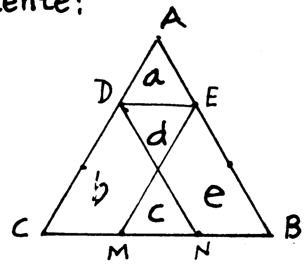


Il triangolo ABC è così suddiviso in 5 parti così ricomponibili:

1° triang. equil: triang. ADE,
2° " " : si ottiene avvicinando n e t in modo che i lati DM ed EN coincidano.
3° triang. equil: ribaltando r e avvicinandolo a s in modo che coincidano i lati EN ed MD.

La ricomposizione del triangoli 2° e 3° si può ottenere anche con altri raggruppamenti di n, r, s e t

II) Divido BC come nel primo caso, in 3 parti uguali Traccio da M la parallela ad AC (ME) e da N la parallela ad AB (ND). Congiungo D con E. Ottengo così 5 parti ricomponibili nel modo seguente:



I) triang. equil. a
II) " " : unendo b e c come nella fig.
III) triang. equil. : unendo e e d (d nella posizione di c).

Poichè

$a = d = c$ e $b = e$

le ricomposizioni possono essere effettuate con altri raggruppamenti.

NOTA DELLA REDAZIONE

Non è possibile ricomporre DUE TRIANGOLI EQUILAT., nè con le 5 parti della prima figura, nè con quelle della 2ª figura di questa pagina.

Sono pervenute anche le risposte di Emma Frigerio del L. Scient. "EINSTEIN" di MILANO, di Diego Terranova del L. Sc. "Oberdan" di TRIESTE e di Fzancesco Fogliotti di GENOVA-SAMPIERD.

Struttura dell'insieme dei polinomi ad una indeterminata

Consideriamo un polinomio ad una indeterminata x sul corpo R dei numeri reali, cioè consideriamo il polinomio

$$a = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

in cui il grado n è un numero intero positivo o nullo e i coefficienti

$$a_i\,, \qquad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

sono numeri reali.

È chiaro che il polinomio a è completamente individuato quando si conoscono il grado n e i coefficienti a_i, per tale motivo sinteticamente si indica col simbolo

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$$

In generale si dice *polinomio ad una indeterminata sul corpo dei numeri reali, una successione*

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, 0, 0, \dots)$$

di elementi $a_i \in R$ *tali che, a partire da un certo indice tutti i termini della successione sono uguali allo zero del corpo* R.
Il massimo indice n tale che risulti $a_n \neq 0$ si dice *grado del polinomio.* Quando occorre l'indeterminata si indica con x, oppure con y, oppure con altra lettera fra le ultime dell'alfabeto latino.

Se $n = 0$ il polinomio si riduce all'unico coefficiente $a_0 \neq 0$ e si rappresenta col simbolo

$$(a_0, 0, 0, \dots) = (a_0);$$

in questo caso si dice che il polinomio ha *grado zero* ed è ridotto ad una *costante.* In particolare se

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

il polinomio diventa

$$(0, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots)$$

e per definizione si dice ***polinomio nullo*** e si indica brevemente col simbolo O.

Un polinomio nullo non ha nessun grado.

L'insieme di tutti i polinomi ad una indeterminata sul corpo R dei numeri reali e del polinomio nullo, lo indicheremo col simbolo P.

In modo analogo si definisce l'insieme dei polinomi ad una indeterminata sul corpo Q dei numeri razionali, oppure sul corpo C dei numeri complessi e tutto ciò che diremo nel seguito per i polinomi ad una indeterminata su R, vale per i polinomi ad una indeterminata su Q oppure su C.

2.- Dati due polinomi dell'insieme P (1)

$$a = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) \quad ; \quad b = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_m),$$

supponiamo che si abbia

$$\begin{cases} n = m \\ \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\} : \; a_i = b_i . \end{cases}$$

Diremo che i due polinomi sono *uguali* oppure *identici* e scriveremo

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_m).$$

Polinomi uguali hanno uguale grado, inoltre i coefficienti di uguale indice nei due polinomi sono uguali.

L'uguaglianza dei polinomi costituisce una *relazione di equivalenza* nell'insieme P, perché gode delle tre proprietà caratteristiche:

$$\forall a,b,c \in P : \begin{cases} a = a & \text{(\textit{riflessiva})} \\ a = b \;\Rightarrow\; b = a & \text{(\textit{simmetrica})} \\ (a = b \text{ e } b = c) \;\Rightarrow\; a = c & \text{(\textit{transitiva}).} \end{cases}$$

L'insieme P si può ripartire in *classi di equivalenza* ponendo in ciascuna classe tutti i polinomi di P che hanno uguale grado; il polinomio nullo fa classe a sé.

3.- Nell'insieme P dei polinomi ad una indeterminata sul corpo R dei numeri reali si può definire una *prima legge di composizione interna* (*addizione*), tale che alla coppia di polinomi (a, b), si associa un terzo polinomio c che diremo *somma* dei polinomi dati. Precisamente, dati i *polinomi addendi*

$$a = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) \; ; \; b = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_m)$$

(1) È ovvio che qui e nel seguito si suppone che l'indeterminata sia la stessa per tutti i polinomi che si considerano.

definiremo il polinomio
$$c = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_r)$$
in modo che si abbia
$$\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, r\} \quad : \qquad c_i = a_i + b_i$$
e scriveremo
$$c = a + b .$$

Se $n > m$ si ha $r = n$, cioè il polinomio c è di grado n ; se $m > n$ si ha $r = m$, cioè il polinomio c è di grado m ; se $n = m$ si ha $r = n = m$, cioè il polinomio c è di grado uguale a quello dei polinomi addendi.

Così, se
$$a = (1, -2, 3, 8, -9) \quad ; \quad b = (4, -5, 7, 3)$$
tenendo presente che si ha
$$a = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \quad ; \quad b = (b_0, b_1, b_2, b_3, 0),$$
si ottiene
$$c = (5, -7, 10, 11, -9).$$
In questo caso c è un polinomio di quarto grado ottenuto addizionando il polinomio a di quarto grado col polinomio b di terzo grado.

L'addizione dei polinomi è sempre possibile, cioè rispetto all'addizione l'insieme P *è chiuso.* Ciò dipende dal fatto che nel corpo R l'addizione è sempre possibile.

L'addizione dei polinomi è *associativa* e *commutativa*, cioè
$$\forall a, b, c \in P : \begin{cases} a + (b + c) = (a + b) + c \\ a + b = b + a \end{cases}$$
perché nel corpo R l'addizione è associativa e commutativa.

Il polinomio nullo è *l'elemento neutro* (*elemento unità*) dell'addizione dei polinomi nell'insieme P , cioè
$$\forall a \in P \quad : \quad a + 0 = 0 + a = a .$$
Dato il polinomio
$$a = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$$
il polinomio
$$a' = (-a_0, -a_1, -a_2, \dots, -a_n)$$
si dice *opposto o simmetrico di* a .

Nell'insieme P dato $a \in P$ esiste sempre $a' \in P$;

cioè dato a esiste sempre a', tale che

$$a + a' = 0.$$

In altri termini nell'insieme P rispetto all'addizione è possibile la *simmetrizzazione*, ciò dipende dal fatto che nel corpo R rispetto all'addizione è possibile la simmetrizzazione, ossia dato un numero reale α esiste sempre il numero reale α' opposto di α

Dati i polinomi $a, b \in P$, si ha

$$a - b = a + b'$$

dove $b' = -b$; cioè, per sottrarre dal polinomio a (minuendo), il polinomio b (sottraendo), basta aggiungere al primo l'opposto del secondo. *Nell'insieme* P *la sottrazione è sempre possibile*, perché nel corpo R la sottrazione è sempre possibile. *Anche rispetto alla sottrazione l'insieme* P *è chiuso.*

Tenendo presente tutto ciò che abbiamo detto possiamo concludere che rispetto alla prima legge di composizione interna (addizione), *l'insieme* P *ha la struttura di un gruppo abeliano* (*cioè commutativo*).

4 - Nell'insieme P si può definire una *seconda legge di composizione interna* (*moltiplicazione*), tale che alla coppia di polinomi (a, b) si può associare un terzo polinomio c che diremo *prodotto* dei polinomi dati. Precisamente, dati i polinomi

$$a = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m) \quad ; \quad b = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

definiremo il polinomio

$$c = (c_0, c_1, c_2, \ldots, c_r)$$

in modo che si abbia

$$\left\{\begin{array}{l}
r = m + n \\
c_0 = a_0 b_0 \\
c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \\
c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \ldots + a_i b_0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_{r-1} = a_{m-1} b_n + a_m b_{n-1} \\
c_r = a_m b_n .
\end{array}\right.$$

e scriveremo
$$c = a \times b = a \cdot b = ab.$$

Il grado del polinomio prodotto c *è uguale alla somma dei gradi dei polinomi fattori* a, b .

Così, dati i polinomi
$$a = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \quad ; \quad b = (b_0, b_1, b_2)$$
si ha
$$c = ab = (c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6),$$
dove, tenendo presente che
$$a_5 = a_6 = 0 \quad ; \quad b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0$$
risulta
$$c_0 = a_0 b_0 \ ; \quad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \ ; \quad c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \ ;$$
$$c_3 = a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 \ ; \quad c_4 = a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0 \ ;$$
$$c_5 = a_3 b_2 + a_4 b_1 \ ; \quad c_6 = a_4 b_2 \ .$$

Come si vede in questo caso il grado di c è $6 = 4 + 2 =$ $=$ grado di a + grado di b .

La moltiplicazione dei polinomi è sempre possibile, cioè l'insieme P *rispetto alla moltiplicazione è chiuso*; ciò dipende dal fatto che nel corpo R l'addizione e la moltiplicazione sono sempre possibili.

La moltiplicazione dei polinomi è *associativa* e *commutativa*, cioè
$$\forall a, b, c \in P : \begin{cases} a(bc) = (ab)c \\ ab = ba \end{cases}$$

Inoltre la moltiplicazione dei polinomi è *distributiva* rispetto all'addizione dei polinomi, cioè
$$\forall a, b, c \in P : \quad a(b + c) = ab + ac.$$
Come al solito le proprietà della moltiplicazione dei polinomi dipendono dalle analoghe proprietà della moltiplicazione nel corpo R .

L'*elemento neutro* (*elemento unità*), della moltiplicazione dei polinomi è il polinomio
$$(1, 0, 0, \dots) = (1)$$
di grado zero, onde
$$\forall p \in P : \quad p \times (1) = (1) \times p = p .$$

Il polinomio nullo, elemento neutro dell'addizione dei polinomi, è *elemento assorbente* per la moltiplicazione dei polinomi, ossia

$$\forall p \in P \quad : \quad p \times 0 = 0 \times p = 0 .$$

Nell'insieme P la *divisione*, considerata come operazione inversa della moltiplicazione, in generale non è possibile. Cioè, dati i polinomi $a, b \in P$, con $b \neq 0$, che diremo rispettivamente dividendo e divisore, *in generale non esiste un terzo polinomio* c (*quoziente*), tale che

$$a = bc .$$

Nell'insieme P *per la seconda legge di composizione interna non è possibile la simmetrizzazione*, cioè in generale dato il polinomio $p \in P$ non esiste il polinomio $p' \in P$, tale che

$$p \times p' = (1) ,$$

ossia *dato un polinomio in generale non esiste il polinomio simmetrico detto inverso del polinomio dato.*

Per tale motivo *l'insieme* P *rispetto alla seconda legge di composizione interna non ha la struttura di un gruppo, e rispetto alla prima e seconda legge di composizione interna non ha la struttura di un corpo.*

Rispetto alla prima e alla seconda legge di composizione interna l'insieme P dei polinomi ad una indeterminata sul corpo R dei numeri reali, ha la struttura di un *anello unitario commutativo* (*anello dei polinomi*).

5.- Nell'insieme P possiamo definire una *legge di composizione esterna* detta *moltiplicazione di un numero reale per un polinomio.* Precisamente, se α è un numero reale ed

$$a = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$$

un polinomio di grado n, si ha

$$\alpha \times a = (\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n) = b$$

dove b è un polinomio di grado n i cui coefficienti si ottengono moltiplicando i coefficienti di a per il numero α.

In particolare se $\alpha = 1$, qualunque sia $a \in P$ si ha $1 \times a = a$, cioè l'elemento neutro della moltiplicazione nel corpo R è l'elemento neutro della moltiplicazione di un numero reale per un polinomio.

La legge così definita si dice di composizione esterna perché associa il *numero* $\alpha \in R$ e quindi *non appartenente a* P, cioè *esterno a* P, al polinomio $a \in P$ e dà come risultato il polinomio $b \in P$. Si dice pure che è un'*applicazione del pro-*

dotto $R \times P$ *, prodotto degl'insiemi* R *e* P *, sull'insieme* P .

La moltiplicazione di un numero reale per un polinomio è sempre possibile, perché si riduce alla moltiplicazione nel corpo R .

6.- La moltiplicazione definita nel numero precedente gode le seguenti proprietà:

$$\forall \alpha, \beta \in R \quad \text{e} \quad \forall a, b \in P$$

si ha

1) $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$;

2) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;

3) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$;

4) $1 \times a = a$,

dove 1 è l'elemento neutro della moltiplicazione nel corpo

Tenendo presente le caratteristiche della prima legge di composizione interna (addizione) nell'insieme P e tenendo presente quanto abbiamo detto per la moltiplicazione di un numero reale per un polinomio (legge di composizione esterna), si conclude che *l'insieme* P *dei polinomi ad una indeterminata sul corpo* R *dei numeri reali ha la struttura di uno spazio vettoriale.*

Da questo punto di vista un elemento qualunque di P , cioè un polinomio qualunque, costituisce un *vettore*.

PIETRO CASTALDO

UNA SPECIALE PARTICOLARITA' DEL NUMERO 1729

Il matematico indiano SRINIVA RAMANUJAN in un incontro con il matematico francese CLAUDIO HARDY ebbe a dichiarare che il numero 1729 è il più piccolo numero naturale che si possa esprimere in due modi come somma di due cubi:

$$1^3 + 12^3 = \underline{1729} = 9^3 + 10^3$$

Affidiamo agli Angolisti volenterosi il controllo della veridicità della dichiarazione di RAMANUJAN e chiediamo loro:
Qual è il MINORE dei numeri naturali maggiori di 1729 che si possano esprimere in due modi diversi come somma di due cubi?

QUESTIONE 107

Un padre bizzarro ...ma giusto.

Un padre lascia in eredità ai suoi figli una somma che deve essere divisa nel modo seguente: Al 1° Lire 1000 000 più $\frac{1}{10}$ della parte rimanente; al secondo Lire 2000000 più $\frac{1}{10}$ del nuovo resto, al terzo Lire 3 000 000 più $\frac{1}{10}$ del resto successivo, e così di seguito.

Fatta la divisione ciascuno dei figli ha la stessa somma. Determinare l'importo di tutta l'eredità e il numero dei figli.

RISOLUZIONE

di Giacinto Asprella della Scuola Media "Torraca" di Matera

Se i figli sono n, l'ultimo (e quindi anche ciascuno di essi) avrà la somma di n milioni di Lire.

D'altra parte, il penultimo avrà $(n-1)$ milioni più $\frac{1}{10}$ della somma rimanente che è costituita da $n+1$ milioni.

Perciò deve essere:

$$\frac{1}{10}(n+1) = 1$$

da cui $n=9$. Si può concludere che i fratelli sono 9, che a ciascuno di essi spetta la somma di L. 9000 000 e che l'eredità ammonta a L. 81'000 000.

A Giacinto Asprella è stato assegnato un premio di L. 1500.

RISOLUZIONE

di Gianni Dal Maso del L.Cl. "DANTE" di TRIESTE (Premio assegnato L. 1200)

Detto n il numero dei figli l'ultimo figlio riceve L. $10^6 \cdot n$, il penultimo L. $(10^6(n-1) + \frac{1}{10}r)$, dove r è la parte di eredità che rimane dopo che il penultimo figlio si è preso L. $10^6(n-1)$.

Poiche $r - \frac{1}{10}r = 10^6 n$, ne segue

$$r = \frac{10}{9} \cdot 10^6 n,$$

Così il penultimo figlio riceve

$$(n-1) \cdot 10^6 + \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9} 10^6 \cdot n$$

Poichè ciascun figlio ha ricevuto la stessa somma deve essere:

$$10^6 \cdot n = 10^6(n-1) + \frac{1}{9} 10^6 n$$

da cui ... $n=9$, etc.

Tutti gli altri Angolisti hanno inviato una risoluzione analoga alla seguente

RISOLUZIONE

di Giuseppe Guarato di Valdagno (Vi)

Detta e l'importo di tutta l'eredità in milioni di Lire, uguagliando la parte spettante rispettivamente al 1°

e al 2º figlio si ha:

$$1+\frac{1}{10}(c-1) =$$
$$= 2+\frac{1}{10}\left\{c-1-\frac{1}{10}(c-1)-2\right\}$$
$$\Rightarrow \qquad c = 81 .$$

L'intera eredità è di Lire 81 000 000. Ogni figlio riceve Lire $\left[1+\frac{1}{10}(81-1)\right]$ milioni = = L. 9 000 000. I figli sono dunque in numero di 9.

RISOLUZIONE GENERALIZZATA della Redazione

Se a ciascuno degli n figli spettano i milioni ($i = 1,2,3,\ldots n$), più $\frac{1}{K}$ (anzicchè $\frac{1}{10}$) della parte che rimane di volta in volta si ha:

n numero dei figli

n milioni = quota dell'ultimo figlio (e quindi di ciascuno)

S = intera eredità = n^2 milioni.

Uguagliando la quota del 1º e dell'ultimo figlio si ha l'equaz.

$$1+\frac{1}{K}(S-1) = n$$

e successivamente

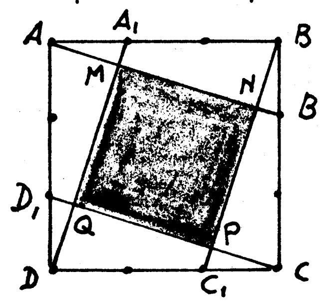
$$K+S-1 = nK$$
$$S-1-K(n-1)=0$$
$$n^2-1-K(n-1)=0$$
$$(n-1)(n+1-K)=0 \quad \text{da cui:}$$

$$\begin{cases} n_1 = 1 \\ S_1 = 1 \text{ milione} \end{cases} \qquad \begin{cases} n_2 = K-1 \\ S_2 = (K-1)^2 \text{ milioni} \end{cases}$$

La prima soluzione (indipendente da K) si riferisce al caso limite di un figlio unico che riscuote l'intera eredità di 1 milione.

QUESTIONE 108

Sui lati di un quadrato ABCD di lato $\overline{AB} = 3a$, sono dati i punti $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2; D_1, D_2$; in modo che sia $\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1} = \overline{DD_1} = a$



Le rette AB_1, BC_1, CD_1, DA_1 determinano un quadrato MNPQ (v. figura). Determinarne il perimetro e l'area.

RISOLUZIONE di Giacinto Asprella della Scuola Med. "TORRACA" di MATERA (Premio L. 1500)

Il lato PQ del quadrato MNPQ coincide con l'altezza del parallelogramma A_1BC_1D relativa alla base BC_1. Poichè l'area del parallelogramma A_1BC_1D è $6a^2$ si ha

$$\overline{PQ} = \frac{6a^2}{\overline{BC_1}}$$

Ma dal triang. BCC_1, per il teor. di Pitagora si deduce

$$\overline{BC_1}^2 = \overline{BC}^2+\overline{CC_1}^2 = 9a^2+a^2 = 10a^2$$

quindi $\overline{BC} = \sqrt{10a^2} = a\sqrt{10}$,

$\overline{PQ} = \frac{6a^2}{a\sqrt{10}} = \frac{6a}{\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}\,a}{10}$.

perim. MNPQ $= \dots = 2{,}4\sqrt{10}\,a$;

S. (area MNPQ) $= \dots = 3{,}60\,a^2$.

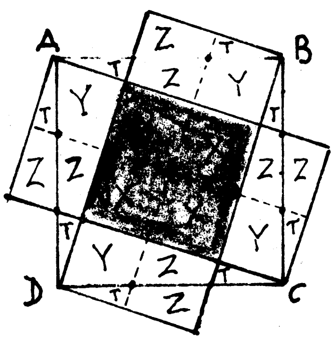
—

Un premio di L. 1200 è stato assegnato a Franco Pappadà, Sc. Media "Don Bosco" di NAPOLI

—

RISOLUZIONE della Redazione.

Dall'analisi della figura si ha:



$MNPQ = 4X = 4x^2$

$ABCD = 9a^2$, e poiché

$2Z = X$ e $Y + T = X$

si ha $ABCD = 4X + 4Y + 4Z + 4T = 4X + 4Z + 4(Y+T) =$
$= 4X + 2X + 4X =$
$= 10X = 10x^2$, da cui

$$\frac{MNPQ}{ABCD} = \frac{4X}{10X} = \frac{2}{5}.$$

area di $MNPQ = \frac{2}{5} ABCD =$
$= \frac{2}{5} \cdot 9a^2 = \frac{18}{5} a^2$.

$MN = \sqrt{\frac{18}{5} a^2} = \dots = \frac{3}{5}\sqrt{10}\,a$.

perimetro di $MNPQ = \frac{12}{5}\sqrt{10}\,a$.

Il prof. Alfonso La Paglia di Biella ci ha inviata una interessante risoluzione generalizzata. Sono pervenute alcune risposte errate – ALTRI RISOLUTORI delle Q.ni 107 e 108: Gianni Dal Maso, Leonardo Felician ed Enrico De Ferra del L. Cl. "Dante" di Trieste. Massimo Balestra L. Sc. Pisa. Sonia Zilio. L. Cl. Padova. Francesco Cagnolati e Pietro Ragni del L. Sc. di Reggio Em. – Enrico Jannelli del L. Scient. di Bari – Pietro Germelli. Lic. Sc. La Spezia – Claudio Buso L. Sc. Padova – Gaetano D'Ambrosio. L. Sc. Bisceglie (Ba). Emma Frigerio L. Sc. Milano. Giuliana Imbrogno - Ist. mag. Cosenza. Fernando Rossi. L. Cl. Firenze. Della Fera Raffaele - Ist. Tec. Geom. Avellino. Antonio Vincelli di Casacalenda (CB). Alberto Perelli di Genova – Giuseppe Guarato di Valdagno (Vi) – Francesco Foglietti di Genova-Samp. Aniello Agrosi di Diso (Le)

Diffondete "Angolo acuto"

Inviateci indirizzi completi di Professori, di Alunni e di Appassionati.

SPEDIZIONE IN ABBONAMENTO POSTALE GRUPPO IV

Coloro che trattengono
ANGOLO ACUTO
sono pregati di inviare
con sollecitudine
la loro quota
di abbonamento

PER FAVORE NON CESTINARE
Se questo periodico non vi interessa, vi preghiamo di rispedire al mittente le copie ricevute, in busta affrancata come stampe.
ANGOLO ACUTO - Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

GLI AMICI DI « ANGOLO ACUTO »

BENEMERITI:

Prof. Giovanni La Fata - TRAPANI
Prof. Vincenzo Marseguerra - ROMA
Ing. Dino Masini - PAVIA
Sig. Giulio Mosca - TERAMO

SOSTENITORI:

Prof. Vincenzo Asprella - MATERA
Prof. Maria Barbieri - FIRENZE
Prof. Marco Bernardi - BRESCIA
Prof. Ing. Nereo Bianchi - PAVIA
Prof. Luigi Chieppa - MINERVINO MURGE (BA)
Biblioteca Governativa - CREMONA
Prof. Claudia Ceroni - ROMA
Prof. Armando Chiellini - ROMA
Prof. Enzo Di Bari - FIRENZE
Prof. Margherita Fontana - CEREDA (VI)
Sig. Francesco Di Tempora - ROMA
Prof. Paola Fenili - FIRENZE
Prof. Giovanni Lariccia - ROMA
Liceo Ginnasio « R. Corso » CORREGGIO EMILIA
Prof. Tebaldo Liverani - FIRENZE
Prof. Pietro Mancini - FOGGIA
Prof. Pierina Mocellino - BASSANO DEL GRAPPA
Sig. Gino Mosca - CAVARZERE (VE)
Prof. Riccardo Ottaviani - ROMA
Dott. Costante Prampolini - REGGIO EMILIA
Prof. Bernardino Pugliese - CASERTA
Prof. Tullia Panerai - FIRENZE
Prof. Sergio Ricci - FIRENZE
Prof. Maria Signorini - FIRENZE
Prof. Romeo Saracino - BARILE (PZ)
Prof. Gaetanina Tiberi - ROMA
Prof. Gianna Maria Vaghi - MILANO
Prof. Flora Fiorentini - FIRENZE
Prof. Soccorso Scalone - AVELLINO

A chi ci procurerà DIECI nuovi abbonati invieremo l'abbonamento gratuito per il 1973, oppure i fascicoli di una annata arretrata completa.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 gennaio 1970
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso*
Stampato dalla **Kappaesse - Firenze**
Associato all'USPI - Unione Stampa Periodica Italiana