ANNO IV
1973
4-5
luglio-ottobre

L'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

Periodico bimestrale
a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

spedizione in abb. postale - gruppo IV
conto corrente postale 5/27919

Abbonamenti per il 1973

Studenti	L.	1400
Professori e Scuole	L.	2000
Sostenitori	L.	3000
Benemeriti	L.	5000

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio.

Le terne pitagoriche e l'ultimo teorema di FERMAT

Il più grande algebrista dell'antichità, vissuto probabilmente in epoca neroniana, fu Diofanto d'Alessandria, la cui opera non fu superata per più di un millennio. Diofanto si dedicò, in particolare, allo studio di equazioni cercandone le soluzioni solo nell'insieme dei numeri naturali; oltre che di alcune equazioni di primo grado, si occupò di problemi cosiddetti indeterminati, che possono cioè avere più di una soluzione. Di questi ultimi, detti appunto diofantini, vogliamo esaminarne uno assai noto che Diofanto enunciò co-

Francobollo emesso dalla Grecia nel 1955 riproducente la figura del caso più semplice di triangolo pitagorico.

sì: '*Dividere un quadrato dato nella somma di due quadrati*'. Preso cioè un quadrato (a lato intero), è possibile trovare altri due quadrati (a lati interi) tali che la somma delle loro aree sia l'area del quadrato di partenza?

Cominciamo a tradurre algebricamente il nostro problema: se indichiamo con z la lunghezza del lato del quadrato assegnato, con x ed y quelle dei lati quadrati da determinare, allora x, y, z devono soddisfare la seguente equazione, considerata nell'insieme N dei numeri naturali:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Quando dobbiamo risolvere una qualunque equazione, ci dobbiamo porre, in generale, i seguenti interrogativi: esistono o no soluzioni? e in caso affermativo, c'è un metodo per trovarle tutte? Ci proponiamo di rispondere a queste domande relativamente alla nostra equazione. Già nelle Scuole si incontra almeno una terna soluzione: La terna (3, 4, 5), nota perfino agli antichi Egizi.

Osserviamo ora che se, x, y, z sono tre numeri interi che soddisfano l'equazione (ad esempio 3, 4, 5), allora possiamo costruire un triangolo rettangolo in cui x ed y sono le misure dei cateti e z è la misura dell'ipotenusa. La relazione $x^2 + y^2 = z^2$ tra i quadrati costruiti sui lati esprime infatti il teorema di Pitagora in un triangolo rettangolo; e, viceversa, se x, y, z sono le misure (intere) dei cateti e dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo, allora esse verificano la relazione $x^2 + y^2 = z^2$. Proprio per questo una terna di numeri naturali che soddisfi l'equazione scritta si dirà pitagorica.

Non ci interessano naturalmente le soluzioni della $x^2 + y^2 = z^2$ con un elemento nullo, ad esempio la terna (0, 3, 3) per cui $0^2 + 3^2 = 3^2$, e via dicendo. Cerchiamo pertanto soluzioni nell'insieme dei naturali positivi.

Se (x, y, z) è una terna pitagorica (ad esempio (8, 15, 17)), anche tutte le terne ad essa proporzionali, (k8, k15, k17), sono pitagoriche. Infatti, se $x^2 + y^2 = z^2$ allora $k^2(x^2 + y^2) = k^2x^2 + k^2y^2 = k^2z^2$ cioè $(kx)^2 + (ky)^2 = (kz)^2$. Ci interesserà quindi, per il nostro problema, determinare terne pitagoriche costituite da numeri primi tra loro.

Possiamo ancora osservare che si avrebbe un problema equivalente a quello di partenza se l'insieme in cui cerchiamo le soluzioni fosse quello dei razionali positivi Q^+. Basta infatti mostrare che da ogni soluzione in Q^+ si può risalire ad una soluzione in N; ad esempio $\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$ è tale che $\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{8}\right)^2$. Moltiplicando per 8 otteniamo la terna (3, 4, 5) soluzione in N e proporzionale alla data. Ciò non sarebbe invece più vero se volessimo cercare soluzioni nel campo dei numeri reali positivi R^+; ad esempio, dalla $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ soluzione in R^+, non si può risalire a una terna nell'insieme dei numeri naturali.

Vediamo ora un'altra questione: per ogni dato numero naturale n, esistono terne pitagoriche che lo contengano?

Non possiamo certo pretendere che un numero qualsiasi, (ad esempio 3), sia la misura dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo. Invece ogni numero n maggiore di 2 è la misura di un cateto di un triangolo rettangolo a lati interi: se infatti n è pari, possiamo costruire un triangolo rettangolo in cui $\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1$ è la misura dell'altro cateto e $\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1$ è la misura dell'ipotenusa;
se n è dispari possiamo assumere

$$\frac{n^2-1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{n^2+1}{2}$$

come misure dell'altro cateto e del l'ipotenusa.

Vediamo qualche esempio: per $n = 3$ troviamo la terna (3, 4, 5), per $n = 6$ la terna (6, 8, 10), per $n = 15$ la terna (15. 112, 113).

Abbiamo così già trovato infinite soluzioni dell'equazione iniziale, anzi per ogni numero naturale una terna pitagorica che lo contiene. Ma otteniamo tutte le terne pitagoriche in questo modo? Purtroppo no: con questo procedimento, ad esempio, tralasciamo la terna (20, 21, 29).

Esiste però un metodo che ci fornisce tutte le terne pitagoriche. Prima di illustrarlo facciamo un'osservazione.

Se (a, b, c) è una terna pitagorica si possono verificare a priori i casi seguenti:

— a, b, c sono tutti pari; in tal caso, dividendo per 2 finché è possibile, ci riduciamo a numeri non tutti pari.

— a, b, c tutti dispari; non è possibile perché $a^2 + b^2$, come somma di due dispari sarebbe pari e quindi senz'altro diversa da c^2;

— a e b pari e c dispari: non è possibile per motivo analogo;

— a e b dispari e c pari: non è possibile neppure in questo caso. Infatti, se a e b fossero dispari, potremmo scrivere:
$a = 2p + 1, b = 2q + 1$ con p e q numeri naturali; ma allora
$$a^2 + b^2 =$$
$$= 4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + 1 =$$
$$= 4\,(p^2 + q^2 + p + q) + 2$$
non potrebbe essere il quadrato di un numero pari perché, come si vede dall'ultima uguaglianza, è divisibile per 2 ma non per 4.

— L'unico caso possibile, con numeri primi tra loro, è quindi che la misura di un cateto sia pari e siano invece dispari le misure dell'altro cateto e dell'ipotenusa.

Siamo in grado, ora, di dimostrare la seguente affermazione: Le terne pitagoriche sono tutte e sole le terne $(n^2 - m^2, 2nm, n^2 + m^2)$, con n ed m numeri naturali (e le loro proporzionali).

Verifichiamo per prima cosa che $(n^2 - m^2, 2nm, n^2 + m^2)$ è una terna pitagorica: basta osservare che

$$(n^2 - m^2)^2 + (2nm)^2 =$$

$= (n^2 + m^2)^2$. Ad esempio la terna che si ottiene per $n = 3$ ed $m = 2$, $(5, 12, 13)$ è pitagorica.

Ci rimane da mostrare che, se (a, b, c) è pitagorica, (ci riferiamo a terne di numeri primi tra loro), allora possiamo trovare due numeri naturali, n ed m, tali che $a = n^2 - m^2$, $b = 2nm$ e $c = n^2 + m^2$. Sappiamo già che a e b non sono entrambi dispari; almeno uno dei due sarà perciò pari: sia $b = 2r$ (e allora c ed a sono entrambi dispari). Dalla $a^2 + b^2 = c^2$ *si ricava*

$$b^2 = c^2 - a^2 =$$

$$= (c - a) \cdot (c + a) = 4r^2;$$

ma $c - a$ e $c + a$, come differenza e somma di numeri dispari, sono pari e allora possiamo scrivere

$c + a = 2p$ e $c - a = 2q$,

da cui

$a = p - q$, $c = p + q$ e $r^2 = pq$.

Ora dal fatto che a e c *siano primi* tra loro scende che p e q sono pure primi tra loro; essendo $r^2 = pq$, si può allora dimostrare che sia p che q sono dei quadrati:

$p = n^2$, $q = m^2$.

Ricaviamo perciò

dalla $4r^2 = 4pq = 4n^2m^2 = b^2$

$b = 2nm$,

e dalle $c = p + q$ e $a = p - q$

$c = n^2 + m^2$ e $a = n^2 - m^2$.

Siamo così arrivati al risultato voluto; pertanto tutte le terne pitagoriche saranno proporzionali a quelle del tipo indicato.

Commentando il problema di Diofanto, Fermat, famoso matematico del 1600, fece la seguente nota: ' Non è invece possibile dividere un cubo in due cubi, un biquadrato in due biquadrati nè in generale dividere alcun altra potenza di grado superiore al secondo in due altre potenze dello stesso grado: della qual cosa ho scoperto una dimostrazione veramente mirabile che non può essere contenuta nella ristrettezza del margine '.

Una generalizzazione quindi del problema esaminato in partenza: Fermat afferma che non esiste alcun esponente n maggiore di 2 tale che

l'equazione $x^n + y^n = z^n$ abbia soluzioni intere. Putroppo Fermat non trovò un... margine più ampio per lasciarci la sua dimostrazione! Nessuno da allora è stato in grado di ricostruirla, per quanto abbiano studiato il problema matematici forse più illustri dello stesso Fermat, ad esempio Gauss nel XIX secolo. Lo stesso Gauss fu uno dei tanti matematici i quali dubitarono che la ' meravigliosa dimostrazione ' di Fermat fosse effettivamente corretta. Questo problema aritmetico resta tuttora aperto; a giudicare dal fatto che oggi, con mezzi matematici più potenti, non si è ancora riusciti a risolverlo, sembrerebbe spontaneo pensare a un errore di Fermat; purtroppo manca effettivamente un esempio che ci autorizzi a concludere che il famoso ' teorema di Fermat ' è sbagliato.

Era in effetti abitudine di Fermat annotare osservazioni a margine del testo studiato e per la gran parte si tratta di enunciati corretti. Ma anche l'osservazione riportata sarà corretta? Finora si è riusciti a dimostrare che per moltissimi esponenti l'equazione $x^n + y^n = z^n$ non ha soluzioni intere; la difficoltà sta nel fatto che non si è trovato un procedimento dimostrativo generale per tutti gli esponenti: di volta in volta, per $n = 4$, $n = 5$ etc. si è risolto il problema con metodi particolari. Siamo quindi ancora lontani dalla dimostrazione generale che Fermat avrebbe trovato. E questo nonostante ci sia stato un particolare interesse per questo problema al punto che, nel 1908, l'Accademia Reale di Gottinga, importantissimo centro di studi, stanziò un premio di 100000 marchi per l'eventuale risolutore. Peccato che la svalutazione del marco dopo la prima guerra mondiale abbia reso inconsistente tale somma, impoverendo così, a detta di alcuni maligni, anche l'interesse per la questione stessa.

Recentemente in America hanno addirittura costruito una macchinetta che, per ogni esponente n, continua a cercare eventuali soluzioni dell'equazione $x^n + y^n = z^n$. A questo proposito sono interessanti alcune considerazioni: se esiste almeno un esponente n tale che $x^n + y^n = z^n$ abbia soluzioni, con tale macchinetta prima o poi la potremo trovare, fra un anno, dieci anni o... mille anni! Cioè, se esiste un controesempio all'affermazione di Fermat, siamo certi di trovarlo a un certo punto, nelle continue prove della macchinetta.

Se invece ciò non è vero, il procedimento prima descritto della macchinetta non è completo: essa continua a calcolare su terne e terne di numeri naturali scartandole successivamente, per gli esponenti considerati, ma non sarà mai in grado di terminare il suo lavoro nè di avvertirci così che la congettura di Fermat è esatta. La macchina cioè, in tale ipotesi, non ce ne fornisce alcuna prova.

D'altra parte sempre supponendo che Fermat avesse ragione, saremmo portati a concludere con estrema naturalezza che esista effettivamente una dimostrazione del suo teorema, che quindi un matematico geniale potrebbe a un certo punto trovare. Purtroppo non è detto che ciò sia vero; infatti, il tedesco Gödel, forse il più grande matematico del nostro tempo, ha dimostrato che esistono in aritmetica, degli enunciati indecidibili. Che cosa vuol dire? Si tratta di proposizioni che non sono né dimostrabili né confutabili: in altre parole non esiste un procedimento dimostrativo che ci permetta o di accettarle o di rifiutarle.

Cerchiamo di chiarire. Fondamentalmente, dobbiamo distinguere tra enunciato vero e enunciato dimostrabile (teorema). Una cosa è dire che un'affermazione è vera, cioè che esprime una proprietà soddisfatta nell'insieme dei numeri naturali, una cosa è parlare di dimostrazione dell'affermazione stessa, cioè di un procedimento matematico deduttivo che porti rigorosamente a concluderne la validità.

Vediamo un'analogia. Può accadere in tribunale che l'imputato venga assolto per mancanza di prove. Certo, è ovvio che o l'imputato è colpevole o è innocente; ma non si riescono a fornire le prove né dell'innocenza della colpevolezza.

Una cosa del genere capita anche in matematica: senz'altro ogni enunciato è vero o falso, però può darsi che non riusciamo a trovarne una dimostrazione né della sua verità né della sua falsità. Nell'esempio dell'imputato si può sospettare che l'esito del processo sia causato dalla incapacità del giudice o da circostanze particolarmente sfavorevoli. Non succede invece così in matematica: un teorema di Gödel afferma proprio la impossibilità di dimostrare la verità o la falsità di determinate proposizioni. In particolare Gödel ha fornito un esempio (troppo complicato e astratto per essere qui riportato) di una proposizione aritmetica che è vera nell'insieme N dei numeri naturali ma per cui non è senz'altro possibile trovare una dimostrazione.

Questo ci lascia abbastanza perplessi, diciamolo!

Possiamo allora concludere che il teorema di Fermat è una proposizione indecidibile? Neanche questo sappiamo: non conosciamo una dimostrazione, ma non è neppure provato che una tale dimostrazione non esista.

Siamo così di fronte a uno dei pochi problemi tuttora aperti in aritmetica.

Lucia Bernardi Siena

LA PALESTRA DELLE GARE

AVVERTENZE IMPORTANTI PER I SOLUTORI. Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte. Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale. Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età. Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE

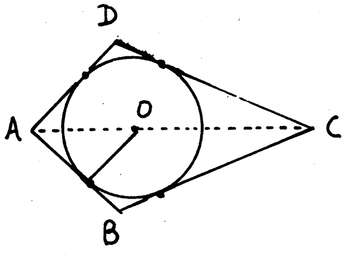
entro il 30 ottobre 1973

Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori. Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.

QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 136

Nel quadrilatero ABCD, circoscritto ad una circonferenza di raggio $2r$, l'angolo in A è retto, i lati AB e AD sono uguali e la diagonale AC è lunga $12r\sqrt{2}$.



Determinare la misura del perimetro e l'area del quadrilatero ABCD.

E. Poli.

QUESTIONE 137

Si rimanda il Lettore alla questione proposta da Giovanni Lariccia nella POSTA di ANGOLO ACUTO - pagina 31.

QUESTIONE 138

MATHESIS - sezione di MESSINA
Gara matematica 1973

Costruire un triangolo ABC, avente il lato $\overline{BC} = K$ e $B\hat{A}C = \alpha$. Dimostrare che la circonferenza avente per diametro BC determina con i lati del triangolo, AB e AC, un arco MN di ampiezza costante.

Per quale valore di α, l'ampiezza di questo arco MN è ancora α?

GENERALIZZAZIONE: Considerare una circonferenza qualunque avente per corda il segmento BC.

QUESTIONE 139

MATHESIS - Sezione di MESSINA
Gara Matematica 1973

Un ragazzo e una ragazza sono seduti uno di fronte all'altra.

« Io sono un ragazzo » dice la persona dai capelli neri.

« Io sono una ragazza » dice la persona dai capelli biondi.

Se almeno uno dei due mente, chi è?

QUESTIONE 140

Sono state distribuite 200 uova fra 100 persone comprendenti uomini, donne e alcune dozzine di bambini.

Ogni uomo ha ricevuto 6 uova, ogni donna 4 uova e ciascun bambino un uovo.

Quanti sono gli uomini, quante le donne e quanti sono i bambini?

QUESTIONE 141

IL TERZO TEOREMA DI EUCLIDE (*)

Dimostrare per via algebrica e per via geometrica che: « In ogni triangolo rettangolo, ciascun cateto è medio proporzionale fra il segmento somma e il segmento differenza dell'ipotenusa e dell'altro cateto ».

(*) Il proponente Dott. Aniello Agrosì fa notare che questo teorema ha una certa analogia con i due ben noti Teoremi di Euclide e propone perciò di denominarlo TERZO TEOREMA DI EUCLIDE.

Cosa ne pensano gli Angolisti?

QUESTIONE 142

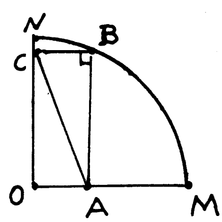
Un triangolo ABC, rettangolo in B, è inscritto in un quadrante di cerchio (A su OM, C su ON e B sull'arco MN).

Si sa anche che

$AB \parallel ON \quad , \quad BC \parallel OM$

e che $\overline{AM} = 2\sqrt{2}a$, $\overline{CB} = \sqrt{2}a$.

Determinare, *possibilmente in meno di 30 secondi*, la lunghezza dell'ipotenusa AC.



QUESTIONE 143

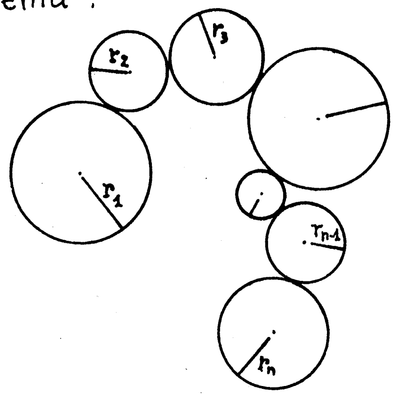
Sono date, nell'ordine, n ruote poggiate su un piano e girevoli attorno ad assi perpendicolari al piano e passanti per i loro centri.

Ciascuna ruota è tangente alla precedente (tranne la prima) e alla seguente (tranne l'ultima); hanno gli orli zigrinati e formano un ruotismo aperto, cioè l'ultima ruota non tocca la prima. Gli orli zigrinati hanno lo scopo di evitare slittamenti durante la rotazione del sistema provocata da un impulso rotatorio impresso ad una ruota qualunque del sistema. Inoltre i raggi $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sono commensurabili con un dato segmento q. Si chiede:

I) La relazione esistente fra le velocità angolari $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ delle ruote in ciascun istante durante la rotazione del sistema.

II) Che cosa succede se l'ultima ruota si pone tangente alla prima.

III) Se i moti rotatori sono uniformi, ogni quanto tempo si riproducono le posizioni iniziali di tutto il sistema?



IV) Rispondere a questa ultima domanda anche nel caso che due raggi qualunque siano fra loro incommensurabili.

ALFONSO LA PAGLIA

RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 109

In quali casi la somma di due unità frazionarie è ancora un'unità frazionaria?

Cioè per quali valori interi positivi di x, y, z si ha:

$$(I) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \quad ?$$

Quesito assegnato alla gara matematica della Sezione della MATHESIS di MESSINA - 1972.

RISOLUZIONE

di Aniello Agrosi di Diso (LE)

Sia $x = m \quad (m = 3, 4, 5, \ldots)$

ed $y = m(m-1) \Rightarrow z = m-1$.

Infatti la relazione (I) diventa:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{m(m-1)}=\frac{m-1+1}{m(m-1)}=$$

$$=\frac{m}{m(m-1)}=\frac{1}{m-1}.$$

ESEMPI :

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\cdots=\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4\cdot 3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\cdots=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5\cdot 4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\cdots=\frac{1}{4}$$

....

NOTA: Ovviamente questa risposta non esaurisce tutti i casi possibili; si ha infatti anche:

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=\frac{1}{6}\ ;\ \frac{1}{21}+\frac{1}{28}=\frac{1}{12};\ ecc.$$

RISOLUZIONE
di Giuseppe Guarato di Valdagno

Se la terna (x, y, z) è una soluzione, lo è anche la terna (Kx, Ky, Kz) con $K \neq 0$.

Consideriamo allora le sole soluzioni formate da terne aventi per MCD l'unità.

Basta considerare le due identità:

a) $(m > n)$

$$\frac{1}{2m(m+n)}+\frac{1}{2m(m-n)}=\frac{1}{m^2-n^2},$$

b) $(m < n)$

$$\frac{1}{2m(m+n)}+\frac{1}{n^2-m^2}=\frac{1}{2m(n-m)}.$$

dove m ed n sono interi positivi uno *pari* e l'altro *dispari* e primi fra loro [Può essere anche

$m = 1$ oppure $n = 1$]

Le relazioni a) e b), combinando m ed n nei vari modi possibili, forniscono infinite soluzioni:

Eccone alcune:

m	1	1	1	1	1
n	2	4	6	8	10
x	6	10	14	18	22
y	3	15	35	63	99
z	2	6	10	14	18

m	2	2	2	2	2
n	1	3	5	7	9
x	12	20	28	36	44
y	4	5	21	45	77
z	3	4	12	20	28

m	3	3	3	3	...
n	2	4	8	10	...
x	30	42	66	78	...
y	6	7	55	91	...
z	5	6	30	42	...

m	4	4	4	4	...
n	1	3	5	7	...
x	40	56	72	88	...
y	24	8	9	33	...
z	15	7	8	24	...

m	5	5	5	5 ...
n	2	4	6	8 ...
x	70	90	110	130 ...
y	30	10	11	39 ...
z	21	9	10	30 ...

m	6	6	6	6 ...
n	1	5	7	11 ...
x	84	132	156	204 ...
y	60	12	13	85 ...
z	35	11	12	60

Si può notare che quando m ed n sono consecutivi risulta $x = y \cdot z$ (vedi precedente risoluzione).

RISOLUZIONE
di Fernando Rossi
del L. Cl. "DANTE" di Firenze

La questione si riduce a determinare le soluzioni intere dell'equazione

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \qquad (I)$$

con $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, che con le stesse condizioni equivale a

$$yz + xz = xy .$$

Dividendo ambo i membri per $z^2 (\neq 0)$, si ha

$$\frac{y}{z} + \frac{x}{z} = \frac{y}{z} \cdot \frac{x}{z}$$

ovvero ponendo

$$\frac{x}{z} = X \quad e \quad \frac{y}{z} = Y \qquad (2)$$

$$X + Y = XY \qquad (3)$$

Ad ogni soluzione intera della (1) corrisponde una soluzione razionale della (3) e viceversa.

La (3) si può scrivere successivamente:

$$XY - X - Y = 0,$$
$$XY - X - Y + 1 = 1,$$
$$X(Y-1) - (Y-1) = 1,$$
$$(X-1)(Y-1) = 1 .$$

Ne segue che le sue soluzioni (razionali) si ottengono attribuendo a

$$(X-1) \quad ed \quad (Y-1)$$

tutte e soltanto le coppie di numeri razionali inversi cioè ponendo

$$X - 1 = \frac{r}{s}; \quad Y - 1 = \frac{s}{r} \qquad (4)$$

con r ed s interi non nulli.

Deve essere inoltre $r \neq -s$, perchè altrimenti risulterebbe

$$X = 0 , \quad Y = 0$$

Le (4) si possono scrivere:

$$X = \frac{r+s}{s} , \quad Y = \frac{r+s}{r}$$

e tenendo conto delle (2)

$$\frac{x}{z} = \frac{r+s}{s}, \quad \frac{y}{z} = \frac{r+s}{r}$$

ovvero anche:

$$\frac{x}{z} = \frac{r(s+r)}{rs}, \quad \frac{y}{z} = \frac{s(r+s)}{rs}.$$

Ne segue facilmente:

$$\frac{x}{r(r+s)} = \frac{y}{s(r+s)} = \frac{z}{rs}.$$

Vale a dire:

$$(5)\quad \begin{cases} x = K\ r(r+s) \\ y = K\ s(r+s) \\ z = K\ rs \end{cases}$$

essendo K intero qualsiasi $\neq 0$.

Le (5) rappresentano *tutte* le soluzioni della equazione proposta.

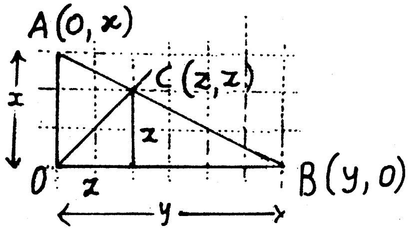
Per $K=1$ si ha più semplicemente

$$(6)\quad \begin{cases} x = r(r+s) \\ y = s(r+s) \\ z = rs. \end{cases}$$

Se r ed s sono primi fra loro, lo sono anche x, y, z e si hanno le soluzioni primitive.

RELAZIONE GEOMETRICA fra x, y e z.

Considerato in un piano un reticolato a maglie quadrate, se $A(0,x)$ e $B(y,0)$ si trovano su due nodi, si troverà su un nodo anche $C(z,z)$ [C, intersezione della retta AB con la bisettrice dell'angolo AOB]



Si ha infatti facilmente

$$x : y = z : (y-z)$$

ossia

$$x(y-z) = yz$$

$$xy - xz = yz$$

$$xy = xz + yz$$

e dividendo per $xyz \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}.$$

Pubblichiamo volentieri anche la seguente:

RISOLUZIONE generalizzata di Alfonso La Paglia di Biella

Risolvere per numeri interi positivi l'equazione

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{z}$$

Espongo prima la regola pratica, poi un esempio e infine la dimostrazione.

E' ovvio che interessano solo le soluzioni <u>*essenziali*</u> o <u>*primitive*</u>, cioè quelle formate da numeri primi fra loro.

Siano allora fissati a piacere n numeri interi positivi $a_1, a_2, \dots, a_n$ e si ponga

$$h = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Le soluzioni essenziali sono:

$$x_1 = \frac{a_1 h}{D}, \quad x_2 = \frac{a_2 h}{D}, \dots$$

$$x_n = \frac{a_n h}{D}, \quad z = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}{D}$$

in cui D è il MCD di tutti i numeratori $(a_1 h, a_2 h, \dots, a_n h)$

ESEMPIO: $n = 5$

Posto a piacere $a_1 = 2$, $a_2 = 4$; $a_3 = 5$; $a_4 = 7$, $a_5 = 8$ risulta

$h = 2728$; $a_1 a_2 \cdots a_n = 2240$; e poichè $D = 8$ ne segue

$$x_1 = \frac{2 \cdot 2780}{8}, \quad x_2 = \frac{4 \cdot 2780}{8}$$

$$x_3 = \frac{5 \cdot 2780}{8}, \quad x_4 = \frac{7 \cdot 2780}{8}$$

$$x_5 = \frac{8 \cdot 2780}{8}, \quad z = \frac{2240}{8}$$

e quindi

$$\frac{1}{682} + \frac{1}{1364} + \frac{1}{1705} + \frac{1}{2387} + \frac{1}{2728} = \frac{1}{280}.$$

I precedenti denominatori sono primi fra loro; moltiplicandoli per qualsiasi intero $K > 1$ si ottengono gruppi proporzionali non essenziali.

DIMOSTRAZIONE

Scelti a piacere n numeri interi positivi $a_1, a_2, \dots, a_n$ si considerino le proporzioni

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots\dots = \frac{x_n}{a_n}$$

da cui:

$$x_2 = \frac{x_1 a_2}{a_1},$$

$$x_3 = \frac{x_1 a_3}{a_1}; \dots; x_n = \frac{x_1 a_n}{a_1}.$$

Ponendo $z = m$ l'equazione diventa:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{a_1}{x_1 a_2} + \frac{a_1}{x_1 a_3} + \dots + \frac{a_1}{x_1 a_n} = \frac{1}{m}$$

da cui:

$$x_1 = m a_1 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)$$

Per assicurare ad x_1 la forma intera deve essere:

$$m = K a_1 a_2 \dots a_n$$

per cui

$$x_1 = a_1 \cdot K \cdot a_1 a_2 \cdots a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) = a_1 K h.$$

E analogamente:

$x_2 = a_2 K h$, $x_3 = a_3 K h, \dots,$
$x_n = a_n K h$, $z = m = K a_1 a_2 \dots a_n$.

Perchè poi tutte le variabili x e anche z risultino primi fra loro, basta porre $K = \frac{1}{D}$, dove D è il M.C.D. di $(a_1 h; a_2 h; \dots; a_n h; a_1 a_2 \dots a_n)$.

ANGOLISTI, se volete che «Angolo acuto» continui a vivere e a migliorare, dovete procurare nuovi Abbonati.

QUESTIONE 110

Dati una circonferenza di centro O e raggio R, una retta MN e un punto A su MN, determinare GRAFICAMENTE la posizione del centro e il raggio della circonferenza tangente alla circonferenza data e alla retta MN nel punto A.

Prima RISOLUZIONE
di Giovanni Longo di Fragneto (BN) e di Francesco Fogliotti di Genova-Sampierdarena.

Si conduca per A la retta AL perpendicolare ad MN (luogo dei centri delle circonferenze tangenti in A ad MN).

Con centro in O' arbitrario su AL e raggio O'A si traccia l'arco di circonferenza γ AEF (E, F sono le intersezioni di γ con la circonferenza data)

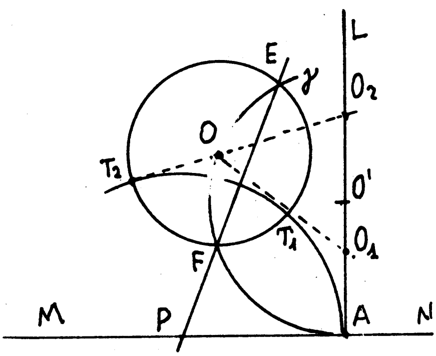
La retta EF determina sulla retta MN il punto P *(centro radicale)*.

Con centro in P e raggio PA si determinano sulla circonferenza data i punti T_1 e T_2 che sono i punti di tangenza.

Le intersezioni O_1 e O_2 di OT_1 e OT_2 con la retta AL sono i centri delle circonferenze richieste; i raggi sono rispettivamente i segmenti O_1A e O_2A.

* * *

Si lascia agli Angolisti volenterosi lo studio dei casi particolari.



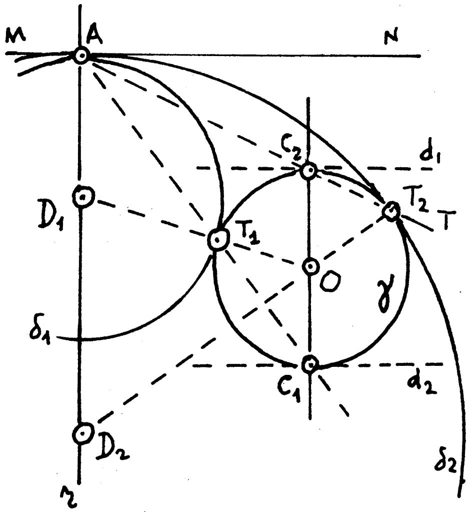
Per semplicità nella figura, non sono tracciate le circonferenze $O_1(O_1A)$ e $O_2(O_2A)$.

Seconda RISOLUZIONE
di Gius. Guarato di Valdagno di Alfonso La Paglia di Biella e di Ant. Vincelli di Casacalende.

Il centro D_1 della circonferenza δ_1 si trova sulla retta $r \perp MN$ passante per A e il punto di contatto T_1 di δ_1 con γ (= circonfer. O, R) è sulla D_1O.

Il triangolo AD_1T_1 è iso-

scele sulla base AT_1.
Condotta il diametro di γ $C_1C_2 \parallel r$,
il triangolo T_1OC_1 isoscele sulla base T_1C_1 risulta SIMILE ad $A\widehat{D_1}T_1$ per la congruenza degli angoli al vertice AD_1T_1 e T_1OC_1.
Ne segue che T_1 è allineato con A e C_1.
AC_1 e AC_2 individuano, sulla γ, T_1 e T_2 e infine OT_1 e OT_2 determinano sulla r i centri D_1 e D_2 cercati.



In generale esistono due soluzioni.
Consideriamo i seguenti casi:

I) MN esterna a γ.
Si hanno sempre due soluzioni δ_1 e δ_2 situate dalla stessa banda rispetto a MN.

II) MN tangente a γ nel punto P.
Si distinguono due casi:

a) $P \not\equiv A$; una delle due circonferenze degenera nella retta MN (considerata come circonferenza di raggio infinito.

b) $P \equiv A$; esistono infinite soluzioni: ogni punto di r è centro di una circonferenza che soddisfa alle condizioni imposte.

III) MN sega la circonferenza γ.
Si hanno ancora due casi:

1) $A \notin \gamma$; due soluzioni δ_1 e δ_2 da parti opposte rispetto ad MN a seconda che A è interno o esterno a γ.

2) $A \in \gamma$: le due circonferenze δ_1 e δ_2 si riducono al loro centro:

$$D_1 \equiv D_2 \equiv A.$$

* * *

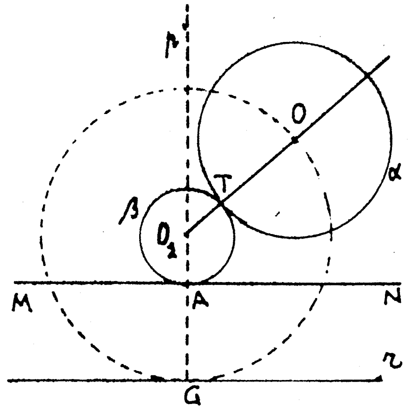
Dal punto di vista proiettivo, la costruzione elemen-

tare sopra riportata può essere interpretata come applicazione dell'inversione o trasformazione per raggi vettori reciproci avente per POLO il punto A e POTENZA tale da trasformare γ in se stessa.
Infatti dette d_1 e d_2 le tangenti alla γ in C_1 e C_2 si hanno le seguenti corrispondenze: $\gamma \Leftrightarrow \gamma$; $\delta_1 \Leftrightarrow d_1$; $\delta_2 \Leftrightarrow d_2$; $MN \Leftrightarrow MN$; $r \Leftrightarrow r$; $T_1 \Leftrightarrow C_1$; $T_2 \Leftrightarrow C_2$, che suggeriscono la costruzione riportata.

Terza RISOLUZIONE inviata, in due tempi, da Gaetano D'Ambrosio del L. Sc. di Bisceglie (Ba)

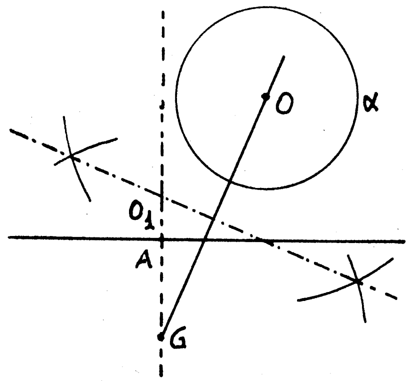
I TEMPO

Indico con α la circonferenza data e con β quella da costruire.
Perchè β risulti tangente ad MN, il suo centro O_1 deve trovarsi evidentemente sulla retta $p \perp MN$ in A.
Inoltre perchè essa risulti tangente alla α, O_1 deve trovarsi nel semipiano di origine MN contenente α e deve risultare:



$\overline{AO_1} = \overline{OO_1} - R$ da cui: $\overline{AO_1} + R = \overline{OO_1}$

Quindi, prolungato O_1A di un segmento $\overline{AG} = R$, il problema si riduce ad individuare su p il punto equidistante da O e da G.



A tale scopo è sufficiente costruire l'ASSE di OG.
NOTA. Dalla proprietà di O_1 di essere equidistante da O e dalla retta r, parallela

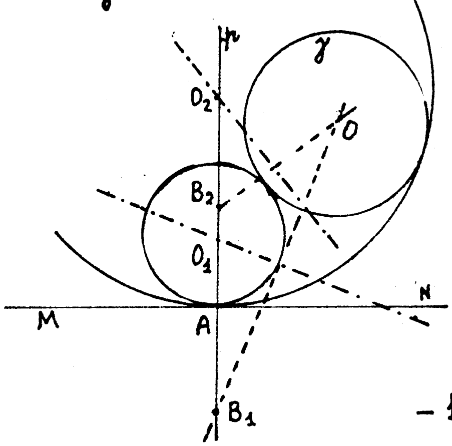
parallela ad MN e passante per G, si deduce che al variare di A su MN, il luogo geometrico dei punti O_1 è la *parabola* di fuoco O e direttrice r.

* * *

II TEMPO

Nella mia precedente risposta -ci scrive l'Angolista D'Ambrosio- mi sono limitato a costruire la circonferenza tangente esternamente alla data, nel caso in cui MN risulti esterna a questa. Mi propongo ora di completare la mia risposta esaminando separatamente i vari casi:

Se MN è esterna alla circonferenza γ, è possibile costruire due circonferenze tangenti in A ad MN ed alla γ, una esternamente e l'altra internamente.
Esse sono situate nel semipiano di origine MN, contenente γ.



A tale scopo basta prendere sulla perpendicolare p condotta per A ad MN i segmenti

$$\overline{AB_1} = \overline{AB_2} = R$$

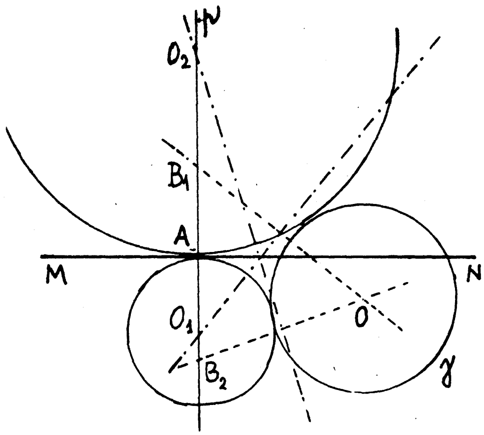
e costruire gli assi di OB_1 e di OB_2. Questi intersecano p in O_1 e O_2 che sono rispettivamente i centri della circonferenza tangente esternamente e di quella tangente internamente alla γ.
Si ha infatti:

$$\overline{O_1A} = \overline{O_1B_1} - R = \overline{O_1O} - R$$

$$\overline{O_2A} = \overline{O_2B_2} + R = \overline{O_2O} + R$$

* * *

Se AM risulta secante la circonferenza bisogna distinguere due casi a seconda che A risulti interno o esterno a γ.
Se A è esterno si potranno costruire due circonferenze tangenti esternamente alla γ, situate da bande opposte rispetto ad AM.
A tale scopo si esegue la stessa costruzione del caso precedente, però i punti B_1 e B_2 si trovano da bande opposte rispetto ad MN, e risulta:

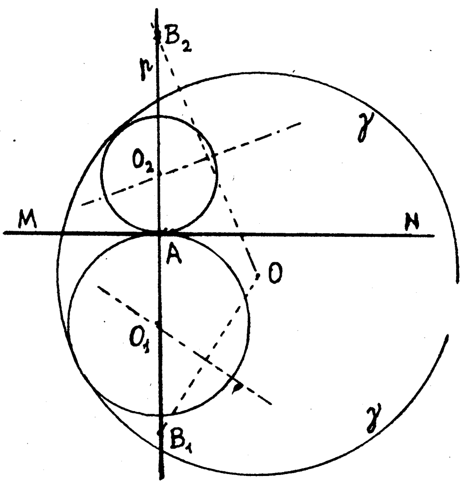


$$\overline{O_1A} = \overline{O_1B_1} - R = \overline{O_1O} - R$$

$$\overline{O_2A} = \overline{O_2B_2} - R = \overline{O_2O} - R$$

***

Se A risulta invece interno a γ, allora è possibile costruire due circonferenze tangenti internamente situate da bande opposte rispetto ad MN.



La solita costruzione è ancora valida e si ha:

$$\overline{O_1A} = R - \overline{O_1B_1} = R - \overline{O_1O}$$

$$\overline{O_2A} = R - \overline{O_2B_2} = R - \overline{O_2O}$$

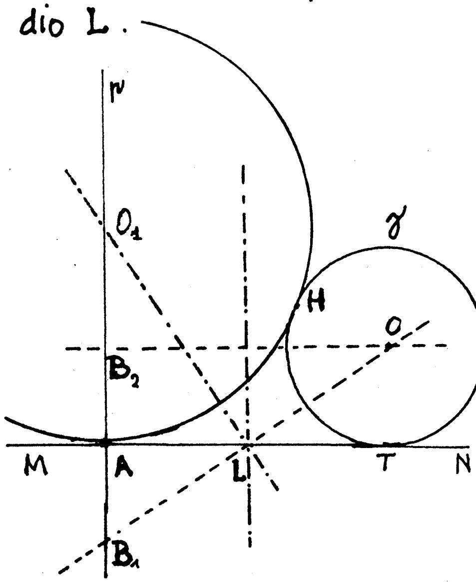
***

Resta infine da esaminare il caso limite in cui la retta MN risulta tangente in T a γ.

Ripetendo la solita costruzione si ha:

$$\overline{OT} = R = \overline{AB_1} = \overline{AB_2}\,.$$

Quindi OB_1 e AT si intersecano nel loro punto medio L.



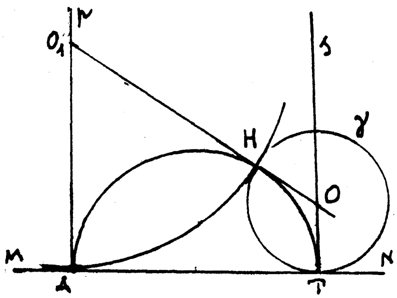
L'asse di OB_1 passa per L e individua su p il centro O_1 di una circonferen- tangente esternamente alla γ

di raggio

$$\overline{O_1A} = \frac{\overline{AL}^2}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AT}^2}{4R}$$

L'asse di OB_2, invece, risulta parallelo a p e quindi non è possibile determinare il centro O_2 della seconda circonferenza.

In queste condizioni è possibile effettuare un'altra costruzione per determinare il centro O_1 e il punto di tangenza H delle due circonferenze.



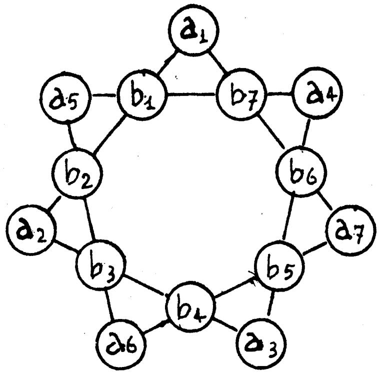
Condotte per A e per T le perpendicolari p ed s ad MN si descriva la semicirconferenza di diametro AT che interseca γ in H. La tangente in H alla semicirconferenza (OH), individua su p il punto O_1. Infatti si ha:

$$\overline{O_1H} = \overline{O_1A} \text{ e } \overline{HO} = \overline{OT} = R.$$

Si può quindi tracciare la circonferenza cercata: centro O_1 e raggio O_1A.

QUESTIONE 112

Porre nei cerchietti di questa STELLA MAGICA i primi 14 numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5, ... ,12, 13, 14 in modo che risulti COSTANTE la somma dei numeri posti in ciascuno dei sette gruppi di quattro cerchietti i cui centri sono allineati.



RISOLUZIONE
di Giuseppe Guarato

Poichè ogni numero da 1 a 14 fa parte di due quaterne, la costante magica vale:

$$\frac{2\cdot(1+2+3+\dots+13+14)}{7} = 30$$

Indico con a_i e con b_i ($i = 1, 2, 3, .., 6, 7$) gli estremi e i medi di ogni quaterna come appare in figura.

Ogni numero da 1 a 14 può essere scritto nella forma

$$n = 3q + r \quad \text{con} \quad q = 0,1,2,3,4\,;\; r = 0,1,2,$$

dove q ed r non sono contemporaneamente nulli.
Chiamo con A l'insieme dei naturali da 1 a 14,
con A' l'insieme dei quozienti e
con A'' l'insieme dei resti rispettivi.
Considero la partizione di A nelle tre classi di congruenza di modulo 3 : A_0, A_1, A_2 ed i corrispondenti sottoinsiemi di A' e di A''.

$$A_0 = (3,6,9,12) \quad A_1 = (1,4,7,10,13) \quad A_2 = (2,5,8,11,14)$$
$$A'_0 = (1,2,3,4) \quad A'_1 = (0,1,2,3,4) \quad A'_2 = (0,1,2,3,4)$$
$$A''_0 = (0,0,0,0) \quad A''_1 = (1,1,1,1,1) \quad A''_2 = (2,2,2,2,2).$$

Ogni quaterna può essere costituita da
1) due elementi di A_1 e due di A_2, oppure
2) tre elementi di A_1 e uno di A_0, oppure
3) tre elementi di A_2 e uno di A_0, oppure
4) un elemento di A_1, uno di A_2 e due di A_0.

Una quaterna non può mai essere formata dagli elementi di una sola classe. Per A_1 e A_2 è evidente. Se tutti gli elementi di una quaterna fossero quelli di A_0, le quattro quaterne che si incrociano in essi dovrebbero contenere 9 elementi di una delle altre due classi.

Consideriamo i tre sistemi di sette equazioni ciascuno:

$$1)\begin{cases} a_1+b_1+b_2+a_2 = 30 \\ a_2+b_3+b_4+a_3 = 30 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_7+b_6+b_7+a_1 = 30 \end{cases} \quad 1')\begin{cases} a'_1+b'_1+b'_2+a'_2 = Q_1 \\ a'_2+b'_3+b'_4+a'_3 = Q_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a'_7+b'_6+b'_7+a'_1 = Q_7 \end{cases} \quad 1'')\begin{cases} a''_1+b''_1+b''_2+a''_2 = R_1 \\ a''_2+b''_3+b''_4+a''_3 = R_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a''_7+b''_6+b''_7+a''_1 = R_7 \end{cases}$$

in cui un apice e due apici stanno ad indicare che le incognite sono gli elementi di A' e di A'' rispettivamente.

Fra i termini noti Q_i e R_i vale la relazione:

$$2) \qquad 3Q_i + R_i = 30 \qquad (i = 1,2,3,4,5,6,7)$$

che conferma che R_i deve essere multiplo di 3.

Le considerazioni fatte prima circa la formazione delle quaterne ci permettono di limitare i valori di R_i ai numeri 3 e 6; conseguentemente, per la (2) si ha in corrispondenza: $Q_i = 9$ e $Q_i = 8$

Inoltre $\Sigma Q_i = 60$ e $\Sigma R_i = 30$ (rispettivamente il doppio della somma degli elementi di A' e di A").

Indicando con x e y il numero delle equazioni di 1") per cui $R_i = 3$ e $R_i = 6$, ne consegue il sistema:

$$\begin{cases} 3x + 6y = 30 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad x = 4 \text{ e } y = 3.$$

Usando gli elementi di A", per ottenere, con quattro di essi,

la somma 6 occorrono
o tre 2 e uno 0
oppure due 2 e due 1

la somma 3 occorrono
o tre 1 e uno 0
oppure un 2, un 1 e due 0.

La successione degli R_i nelle 1") secondo l'ordine degli i crescenti è tale che fra le quaterne di somma 6 *due almeno* debbono essere *consecutive*.

Ne segue che la disposizione degli R_i, a meno di una permutazione circolare o inversione deve essere una delle seguenti:

3) 3 3 3 6 6 3 6 oppure 6 3 3 6 6 3 3 oppure 6 6 6 3 3 3 3

cui corrispondono per la successione dei Q_i

4) 9 9 9 8 8 9 8   8 9 9 8 8 9 9   8 8 8 9 9 9 9.

Si possono ordinare, per tentativi gli elementi di A" in modo che sia verificata una delle 3).

Riporto qui alcuni di tali ordinamenti (non posso sostenere che siano tutti, appunto perchè tentativi; penso anzi che ce ne siano altri).

Angolo M.F. "Mangano" "Angolo acuto"

5)

a''_1	b''_1	b''_2	a''_2	b''_3	b''_4	a''_3	b''_5	b''_6	a''_4	b''_7	b''_1	a''_5	b''_2	b''_3	a''_6	b''_4	b''_5	a''_7	b''_6	b''_7	a''_1
0	2	2	2	0	0	1	2	1	2	1	2	1	2	0	0	0	2	1	1	1	0
0	2	2	2	2	1	1	0	2	0	0	2	1	2	2	1	1	0	1	2	0	0
0	2	2	2	0	0	1	0	1	1	1	2	2	2	0	2	0	0	1	1	1	0
0	2	2	2	1	0	0	0	1	2	1	2	1	2	1	2	0	0	1	1	1	0
2	0	2	2	1	1	2	1	0	0	1	0	2	2	1	1	1	1	0	0	1	2
2	0	2	2	1	0	0	1	2	0	1	0	2	2	1	1	0	1	1	2	1	2
0	2	2	2	1	0	0	1	1	1	2	2	1	2	1	2	0	1	2	1	2	0

Chiamo ciascuno di tali ordinamenti *uno SCHEMA*.

Scelto uno schema si prendono in considerazione le sette equazioni 1'), ponendo in luogo dei Q_i gli elementi della successione 4) corrispondente alla 3) individuata dallo schema prescelto; a queste equazioni si possono aggiungere due delle tre equazioni linearmente dipendenti che si ottengono uguagliando a 10 (somma degli elementi di ciascuna delle partizioni di A' nelle classi di congruenza di mod 3) la somma degli elementi di A' corrispondenti agli elementi di A'' dello schema prescelto.
Così, prendendo come schema il primo dato, si ha il sistema:

$$
6)\left\{\begin{array}{l}
a'_1 + b'_1 + b'_2 + a'_2 = 8 \\
a'_2 + b'_3 + b'_4 + a'_3 = 9 \\
a'_3 + b'_5 + b'_6 + a'_4 = 8 \\
a'_4 + b'_7 + b'_1 + a'_5 = 8 \\
a'_5 + b'_2 + b'_3 + a'_6 = 9 \\
a'_6 + b'_4 + b'_5 + a'_7 = 9 \\
a'_7 + b'_6 + b'_7 + a'_1 = 9 \\
\\
a'_1 + a'_6 + b'_3 + b'_4 = 10 \\
a'_3 + a'_5 + a'_7 + b'_6 + b'_7 = 10
\end{array}\right.
$$

costituito da $7+2=9$ equazioni con 14 incognite (con un grado di indeterminazione uguale a 5).

Non tutti gli schemi dànno lo stesso numero di soluzioni, anzi qualcuno non ne dà affatto (come il 7° schema).

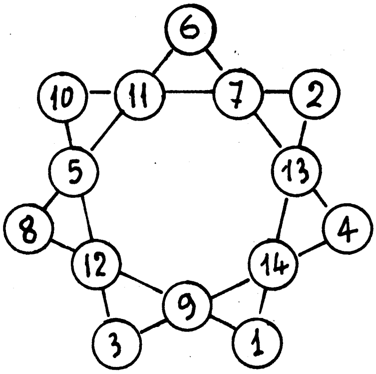
Qui riporto 20 soluzioni : quattro sotto forma di stella e sedici scritte come se le quattro quaterne fossero poste una di seguito all'altra.

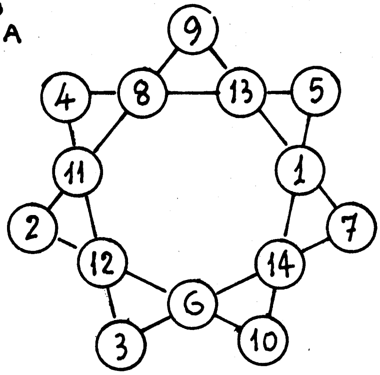
Il primo schema ha fornito le prime 4 soluzioni ; il secondo ne ha fornito due (la 5ª e la 6ª) ; il terzo tre (7ª, 8ª, 9ª); il quarto sette (10ª–16ª) ; il quinto una (17ª) ; il sesto le ultime tre, mentre il settimo schema non ha fornito soluzioni.

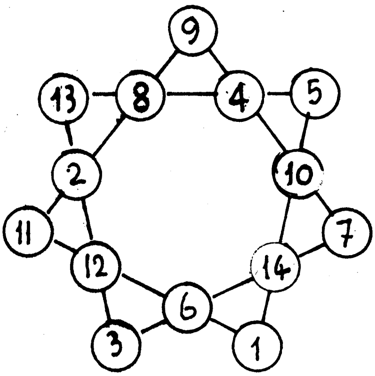
Le 20 soluzioni sotto riportate, tutte distinte, non hanno la pretesa di esaurire il problema.

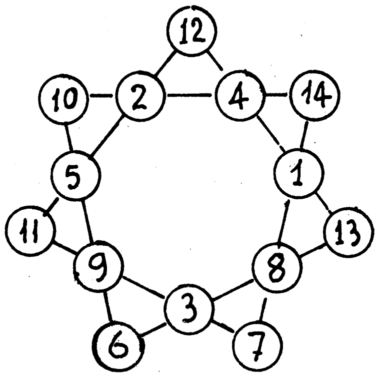
Ogni soluzione permette di risalire allo schema da cui è stata dedotta ; per questo basta scrivere al posto degli elementi della soluzione i resti della loro divisione per 3 e si ha lo schema di partenza.

PRIMO SCHEMA



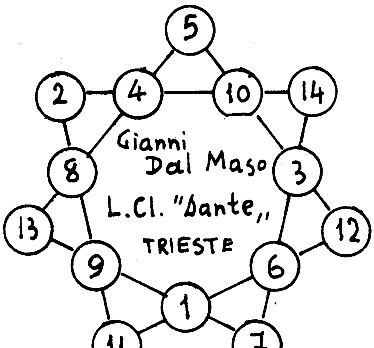


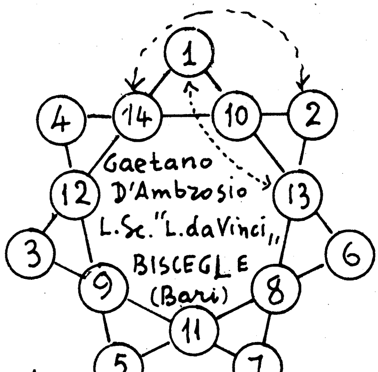




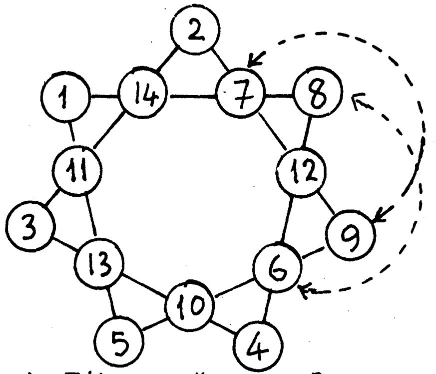
a_1	b_1	b_2	a_2	b_3	b_4	a_3	b_5	b_6	a_4	b_7	b_1	a_5	b_2	b_3	a_6	b_4	b_5	a_7	b_6	b_7	a_1
II SCHEMA																					
9	11	2	8	14	1	7	6	5	12	3	11	4	2	14	10	1	6	13	5	3	9
9	11	2	8	14	1	7	12	5	6	3	11	10	2	14	4	1	12	13	5	3	9
III SCHEMA																					
6	14	2	8	12	3	7	9	10	4	1	14	11	2	12	5	3	9	13	10	1	6
9	11	8	2	3	12	13	6	10	1	4	11	14	8	3	5	12	6	7	10	4	9
9	14	5	2	6	12	10	3	13	4	1	14	11	5	6	8	12	3	7	13	1	9
IV SCHEMA																					
3	11	14	2	7	12	9	6	10	5	13	11	1	14	7	8	12	6	4	10	13	3
6	2	8	14	1	3	12	9	4	5	13	2	10	8	1	11	3	9	7	4	13	6
6	11	5	8	1	9	12	3	13	2	7	11	10	5	1	14	9	3	4	13	7	6
6	2	14	8	1	6	12	3	4	11	7	2	10	14	1	5	9	3	13	4	7	6
9	14	5	2	13	3	12	6	4	8	7	14	1	5	13	11	3	6	10	4	7	9
12	2	5	11	7	3	9	6	1	14	4	2	10	5	7	8	3	6	13	1	4	12
12	11	5	2	13	9	6	3	7	14	1	11	4	5	3	8	9	3	10	7	1	12
V SCHEMA																					
8	6	11	5	4	7	14	1	3	12	10	6	2	11	4	13	7	1	9	3	10	8
VI SCHEMA																					
2	12	5	11	10	6	3	4	14	9	1	12	8	5	10	7	6	4	13	14	1	2
2	9	11	5	4	12	6	7	14	3	13	9	5	11	4	10	12	7	1	14	13	2
2	3	14	11	1	6	12	4	5	9	10	3	8	14	1	7	6	4	13	5	10	2

Altre risoluzioni pervenuteci:

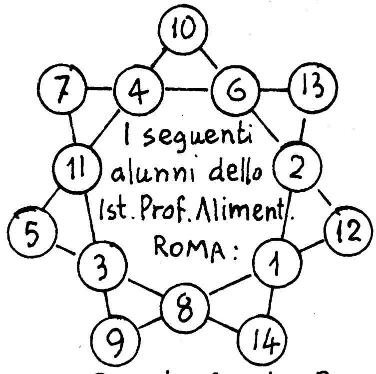




Scambiando contemporaneamente le due coppie indicate dalle frecce si ottiene una seconda soluzione.



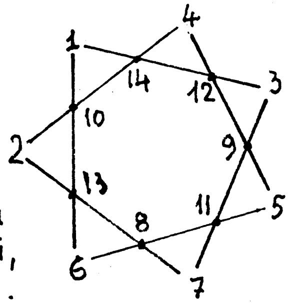
Sonia Zilio . L Cl. "T. Livio" Padova e Leonardo Felician. L. Cl. "Dante Alighieri" Trieste.

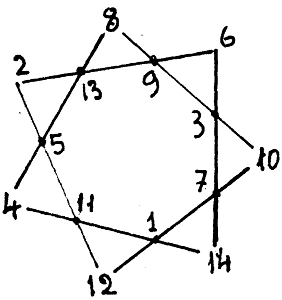


Laura Bezzi - Sandro Pace - Fernando De Bianchi - Luciana Moroni e Ivana Onida

Hanno inviato una soluzione: Claudio Buso del L. Sc. "I. Nievo" di Padova (la 7^a); Roberta Pellini - L. Cl. "Manara" ROMA (la 11^a)

Alfonso La Paglia di Biella ci ha inviato 4 soluzioni la 3^a, la 15^a e quelle qui riportate che hanno le seguenti caratteristiche:
- Ai vertici esterni la prima presenta i primi 7 numeri, la seconda i numeri pari.

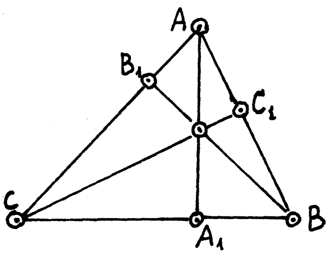




QUESTIONE 111

Costruire un triangolo ABC dati tre segmenti congruenti alle altezze AA_1, BB_1, CC_1 del triangolo.

Giovanni Longo

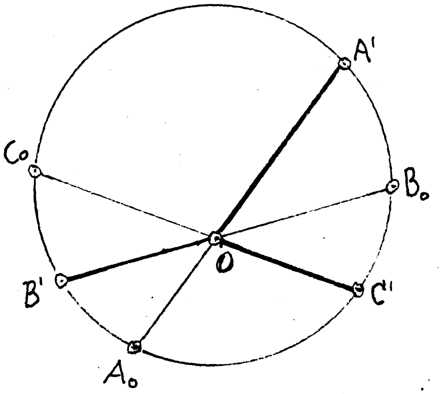


RISOLUZIONE

tratta dalle risposte inviate da GIANNI DAL MASO - L. Cl. "Dante" di TRIESTE - GAETANO D'AMBROSIO - L. Sc. di BISCEGLIE (BA) GIUSEPPE GUARATO - VALDAGNO. ALFONSO LA PAGLIA - BIELLA - (VC) GIOVANNI LONGO - FRAGNETO (BN) e FRANCESCO FOGLIOTTI - GE-SAMP.

Ricordiamo anzitutto che i lati $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ e $\overline{AB} = c$ del triangolo ABC sono in-

versamente proporzionali alle corrispondenti altezze
$\overline{AA_1} = h_a$, $\overline{BB_1} = h_b$, $\overline{CC_1} = h_c$

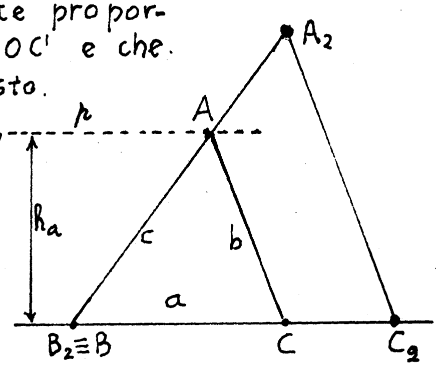


Presi su tre rette passanti per O tre segmenti
$\overline{OA_0} = h_a$, $\overline{OB_0} = h_b$, $\overline{OC_0} = h_c$
si costruisce la circonferenza che passa per A_0, B_0, C_0 e siano A', B', C' le ulteriori intersezioni di questa con le tre rette. Si ha evidentemente:

$$\overline{OA_0} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB_0} \cdot \overline{OB'} = \overline{OC_0} \cdot \overline{OC'}$$

e quindi $\overline{OA'} = Ka$; $\overline{OB'} = Kb$; $\overline{OC'} = Kc$,
essendo K un arbitrario fattore di proporzionalità ($\neq 0$).

Si costruisca ora un triangolo $A_2B_2C_2$ avente i lati $\overline{B_2C_2}$, $\overline{C_2A_2}$, $\overline{A_2B_2}$ direttamente proporzionali ai segmenti OA', OB', OC' e che risulta simile a quello richiesto.



La retta p, parallela a B_2C_2, (nel semipiano di origine B_2C_2 e contenente A_2) la cui distanza da B_2C_2 sia h_a, incontra B_2A_2 in A ; la parallela per A ad A_2C_2 incontra B_2C_2 in C. Il triangolo ABC ($B \equiv B_2$) è il triangolo cercato.

<u>Condizione di possibilità</u>:

Con i segmenti a, b, c si deve poter costruire un triangolo per cui, se c è il maggiore di essi deve essere:

$$c < a + b \qquad \text{ossia} \qquad \frac{a h_a}{h_c} < a + \frac{a h_a}{h_b}$$

da cui

$$\boxed{h_c > \frac{h_a h_b}{h_a + h_b}}$$

Ciò significa che *l'altezza minore deve superare la* quarta proporzionale tra la somma delle altre due altezze e queste due altezze. Ad esempio:

Con altezze di lunghezza
2, 4, 5.
il triangolo <u>NON ESISTE</u>
perchè

$$2 < \frac{4 \cdot 5}{4+5}$$

Invece con altezze di lunghezza
3, 5, 6
il triangolo <u>ESISTE</u> perchè

$$3 > \frac{5 \cdot 6}{5+6}$$

NOTA: Per la costruzione di un triangolo $A_2B_2C_2$, simile al triangolo cercato si può anche procedere nel modo seguente: Si costruisce prima un triangolo $A_0B_0C_0$ avente per lati le altezze h_a, h_b, h_c. Successivamente si costruisce un triangolo $A_2B_2C_2$ avente per lati le altezze del triangolo $A_0B_0C_0$.

QUESTIONE 113

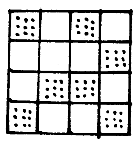
Un finestrone quadrato è suddiviso in 16 riquadri uguali. Ciascun riquadro può essere illuminato o no.
Quanti aspetti diversi può assumere il finestrone variando il numero (da zero a 16) e la posizione dei riquadri illuminati?

Interessa conoscere il numero esatto dei possibili aspetti assunti e soprattutto il procedimento usato per determinarlo.

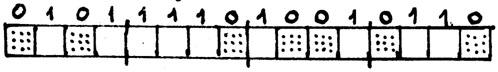
Fra le numerose risoluzioni pervenuteci la più interessante ci sembra la

RISOLUZIONE
di Angela Vania Giordano della Scuola Media "SPANÒ BOLANI" di Reggio Cal. alla quale va assegnato il premio di L. 1500 (o una annata arretrata di Angolo acuto)

Considero il seguente aspetto del finestrone



e dispongo i riquadri nel modo seguente:



Attribuisco al riquadro

al riquadro SPENTO il numero ZERO e al riquadro ACCESO il numero UNO.

Un qualunque aspetto del finestrone rappresenta un dato numero del SISTEMA BINARIO. Partendo da

"16 zeri" tutto spento

debbo arrivare a

"16 uno" tutto acceso.

Il numero totale degli aspetti del finestrone è quindi

$$1 + (1111\,1111\,1111\,1111)_2 =$$
$$= 1 + (2^{15} + 2^{14} + \cdots\cdots + 2^2 + 2 + 2^0) =$$
$$= 1 + (2^{16} - 1) = 2^{16} = 65536.$$

SECONDA RISOLUZIONE
di Enrico Jannelli del L.Sc. "E.Fermi" di BARI
(premio assegnato L.1200)

Ogni riquadro può essere illuminato o no; per ogni riquadro ci sono perciò 2 possibilità.

Le due possibilità di ciascun riquadro si devono combinare con le possibilità degli altri riquadri. Quindi il finestrone può assumere

$$2\cdot2\cdot2\cdot2 \cdot 2\cdot2\cdot2\cdot2 \cdot 2\cdot2\cdot2\cdot2 \cdot 2\cdot2\cdot2\cdot2 =$$
$$= 2^{16} = 65\,536$$

aspetti diversi.

All'Angolista Leonardo Felician del L.Cl. "Dante" di Trieste è stato assegnata una annata arretrata di Angolo acuto, per il numero di risoluzioni diverse inviate.

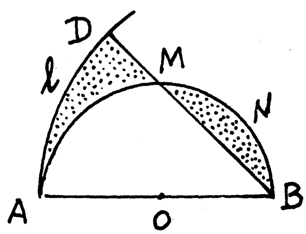
Alcuni Angolisti hanno indicato 65535 invece di 65536.

Questi Angolisti hanno trascurato nel conteggio l'aspetto del finestrone "tutto spento" rappresentato da ZERO.

Ottime le risposte di
Aniello Agrosi - DISO.
Emma Frigerio - MILANO.
Luigi Silvestri - L.Sc. REGGIO E.
Francesco Cagnolati. L.Sc. R.E.
Francesco Fogliotti - GENOVA
Gaetano D'Ambrosio. L.Sc. BISCEGLIE
Claudio Buso. L.Sc. PADOVA
Gianni Dal Maso. L.Cl."Dante. TS
Giuseppe Guarato - VALDAGNO

QUESTIONE 114

Si consideri la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$



e sia M il punto medio della circonferenza stessa.

Si tracci la semiretta BM e l'arco ℓ di circonferenza avente il centro in B e raggio uguale ad AB.

Detta D l'intersezione della semiretta BM con l'arco ℓ, si calcoli l'area e il perimetro sia del segmento circolare BMN (vedi figura) sia del triangolo mistilineo AMD (FALCATA).

RISOLUZIONE

di Lucia D'Ambrosio della Sc. Media "C.BATTISTI" di BISCEGLIE (premio di L. 1500)

Il semicerchio AMB, di diametro $AB = 2r$, è equivalente al settore circolare ABD (raggio $= 2r$; $A\hat{B}D = 45°$).

Risultano quindi equivalenti (per differenza) il segmento circolare BNM e la falcata AMD. Si ha: $\mathcal{A}(AMD) =$

$$\mathcal{A}(BNM) = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2} = \boxed{\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}.$$

Inoltre si ha:

Perimetro segmento circolare

$$(BNM) = \overline{BM} + \overset{\frown}{BNM} = r\sqrt{2} + \frac{\pi r}{2} = \boxed{\frac{r}{2}\left(2\sqrt{2} + \pi\right)}$$

Perimetro FALCATA (AMD) =

$$= \overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{AD} + \overline{MD} = \frac{\pi r}{2} + \frac{\pi r}{2} + \left(2r - r\sqrt{2}\right) = r\left(\pi + 2 - \sqrt{2}\right).$$

Il premio di L. 1200 è stato assegnato a *Maddalena Viola del Ginnasio "D. Alighieri" di TS.*

RISOLUZIONE generalizzata di Gius. Guarato

Posto in generale $A\hat{B}M = x$ (in radianti), risulta (fig. a pag. 30)

$$A\hat{O}M = 2x, \quad M\hat{O}B = \pi - 2x.$$

Inoltre si ha:

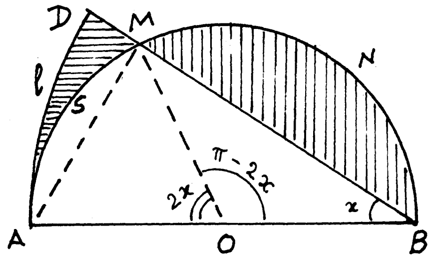
$$\overline{BM} = 2r\cos x;$$
$$\overline{AM} = 2r\,\mathrm{sen}\,x;$$
$$\overset{\frown}{BNM} = r(\pi - 2x);$$
$$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AD} = \ell = 2rx;$$
$$\overline{BD} = 2r; \quad \overline{MD} = 2r(1 - \cos x).$$

Chiamando con P_1 e P_2 i perimetri e con A_1 e A_2 le aree del segmento circolare BMN e del triangolo mistilineo AMD si ha:

$$P_1 = 2r\cos x + r(\pi - 2x) = r(2\cos x + \pi - 2x).$$

$$P_2 = 4rx + 2r(1 - \cos x) = 2r(2x + 1 - \cos x).$$

$$A_1 = \frac{r^2(\pi - 2x)}{2} - r^2\,\mathrm{sen}\,x\cos x = r^2\,\frac{\pi - 2x - \mathrm{sen}\,2x}{2}.$$



$$A_2 = 2r^2x - r^2x - r^2 \operatorname{sen} x \cos x =$$
$$= r^2 (x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x).$$

Ponendo $x = \frac{\pi}{4}$ risulta:

$$P_1 = r(2\sqrt{2} + \pi) : 2 ;$$

$$P_2 = r(\pi + 2 - \sqrt{2}) ;$$

$$A_1 = A_2 = r^2(\pi - 2) : 4 .$$

L'Angolista Gaetano D'Ambrosio del L. Sc. di Bisceglie ha anche dimostrato che il triangolo mistilineo ASMD è equivalente al segmento circolare ASM, e quindi per $x = \pi/4$ si deduce subito l'equivalenza fra ASMD e BNM.

Esatte le risposte di Sonia Zilio - L. Cl. "T. LIVIO" PD. Maurizia Landini, Francesco Cagnolati e Luigi Silvestri del L. Sc. "L. SPALLANZANI" RE. Claudio Buso. L. Sc. "I. NIEVO" PD. Furio Honsell. L. Sc. "G. GALILEI. TS. Enrico Jannelli - L. Sc. "E. FERMI" BA. Sergio Bianchi. L. Cl. "U. FOSCOLO" PV. Leonardo Felician - L. Cl. "DANTE" TS Gianni Dal Maso. L. Cl. "DANTE" TS Roberta Pellini. L. Cl. "MANARA" ROMA • Walter Roselli. L. Sc. "P. PALEOCAPA" RO • Stefania Gallucci - Istit. Prof. Alim. ROMA Emma Frigerio. MILANO Aniello Agrosi - DISO (LE) Paolo Lucardesi - BERGAMO Alberto Perelli - GENOVA e Francesco Fogliotti - GE-SAMPIERD.

Per... FINIRE

Una persona, scrivendo a macchina usava il nastro a due colori.

Scriveva tutto in nero tranne la parola FINE in rosso, al termine di ogni capitolo.

Una volta notò che tale parola si vedeva scritta in nero sul nastro rosso (perchè i caratteri erano sporchi di nero).

Però guardando il nastro alla fine del lavoro, vide che a volte era scritto

FINE

e altre volte

ENIF.

Perchè?

da IL "SAPER VEDERE" IN MATEMATICA *di BRUNO DE FINETTI* LOESCHER EDITORE TORINO

LA POSTA di ANGOLO ACUTO

Il Dott. Giovanni Lariccia ci scrive: « Ho raccolto un certo numero di interviste (registrandole e trascrivendole accuratamente) su *riflessioni parlate* che la gente compie nel risolvere un certo problema che enunciato a parole suona così:

QUESTIONE 137

IO HO IL DOPPIO DELL'ETA' CHE TU AVEVI QUANDO IO AVEVO L'ETA' CHE TU HAI ADESSO, E QUANDO TU AVRAI L'ETÀ CHE IO HO ORA, INSIEME AVREMO 90 ANNI.

Il problema non è nuovo, anzi ricorre ..... in diversi libri. E' interessante dal punto di vista psicologico, osservare che la difficoltà maggiore che le persone incontrano sta nel fatto di dover aggiungere, per così dire, una condizione ovvia ...che non è e non può essere esplicita nell'enunciato della questione, vale a dire ....*(eh! no, saltiamo un rigo, non ve lo possiamo dire, ora!)*.

Ho osservato che una persona, posta ex abrupto di fronte a questa formulazione del problema, alla presenza di un intervistatore, sta spesso perplessa per alcuni minuti cercando di dipanare la matassa piuttosto aggrovigliata di termini e di riferimenti reciproci. Mi chiedo quanto ciò sia effetto del modo di presentare il problema e quanto dal problema stesso. A tale scopo le chiederei

1) di proporre il quesito agli Angolisti, permettendomi poi di accedere alle soluzioni che verranno inviate;

2) di invitare gli appassionati Angolisti a voler inviare anche gli appunti scritti, durante la stesura della risoluzione, corredati da commenti e riflessioni sui passaggi mentali che via via si effettuano; o eventuali registrazioni su cassettine (tipo Philips) delle riflessioni che il risolutore fa, durante o subito dopo.

Potrebbe essere consigliabile che l'intervista fosse condotta da una persona che avesse già risolto il problema e che guidi l'intervistato registrando il dialogo. Si chiede anche di voler indicare l'età e la classe frequentata e se si è disponibili a fornire chiarimenti sul materiale inviato ...»

Gli Angolisti sono pregati di rispondere indirizzando al Dr. Giovanni Lariccia presso ANGOLO ACUTO
via Cairoli 78 -
50131 FIRENZE

SPEDIZIONE IN ABBONAMENTO POSTALE GRUPPO IV

Coloro che trattengono ANGOLO ACUTO
sono pregati di inviare con sollecitudine
la loro quota di abbonamento

PER FAVORE NON CESTINATE

Se questo periodico non vi interessa, vi preghiamo
di rispedire al mittente le copie ricevute,
in busta affrancata come stampe.
ANGOLO ACUTO - Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

ANGOLISTI, se volete che ANGOLO ACUTO continui la sua fatica migliorandosi, dovete aiutarci a diffonderlo sempre più.

I GENITORI sottoscrivano un abbonamento a favore dei propri figli appassionati di Matematica.

LE CASSE SCOLASTICHE degli Istituti Tecnici e Professionali, dei Licei Classici, Scientifici e Magistrali e delle Scuole Medie assegnino un abbonamento premio agli Alunni che hanno conseguito 8 o 7 in Matematica.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 gennaio 1970
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso*
Stampato dalla Kappaesse - Firenze

Associato all'USPI
Unione Stampa Periodica Italiana