ANNO V - 1974
GENNAIO FEBBRAIO
1

L'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

Periodico bimestrale
a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

spedizione in abb. postale - gruppo IV
conto corrente postale 5/27919

Abbonamenti per il 1974

Studenti	L.	1600
Professori e Scuole	L.	2000
Sostenitori	L.	3000

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio.

Il MISTERO dei due quadratini che risultano IN PIU' nella fig. a) è spiegato a pagina 2.

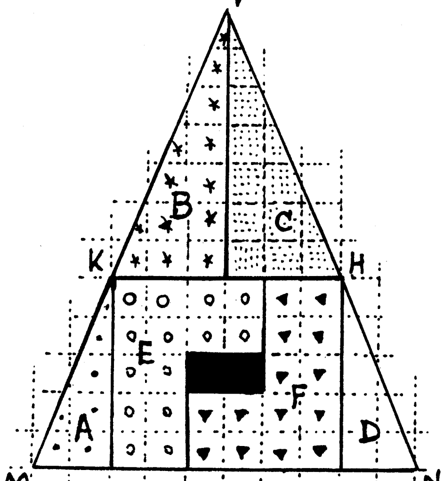


fig. a)

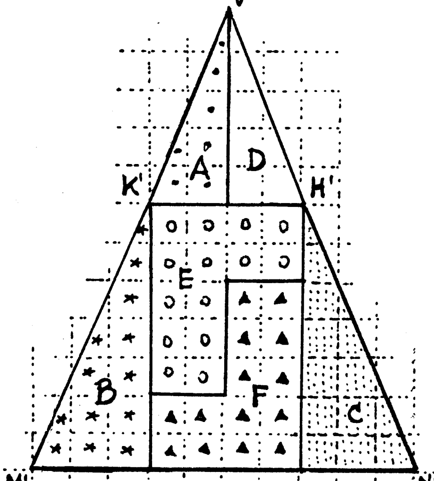


fig. b)

Le fig. a) e b) [vedi fascicolo 4-5 anno III, pag. 23] non rappresentano due triangoli isosceli uguali (MNV ed M'N'V') - vedi anche pag. 1 di questo fascicolo - ma rappresentano due pentagoni (!):
l'uno convesso MNHVK [fig. a)] e l'altro concavo M'N'H'V'K' [fig. b)].

I triangoli A e B (e i triangoli C e D) NON SONO SIMILI

quindi	K	non è allineato	con M e V
	K'	non è allineato	con M' e V'
	H	non è allineato	con N e V
	H'	non è allineato	con N' e V'.

Sovrapponendo i due pentagoni, disegnati su carta trasparente, in modo che coincidano i vertici M ed M', N ed N', V e V', si può osservare che i vertici K' ed H' risultano interni al pentagono MNHVK.

Riferendo i due pentagoni così sovrapposti ad un sistema di assi cartesiani ortogonali in modo che sia

$M = M' = (0;0)$, $N = N' = (10;0)$, $V = V' = (5;12)$

si ha: $K = (2;5)$, $K' = (3;7)$, $H = (8;5)$, $H' = (7;7)$.

L'area S del triangolo MKK' (uguale al triangolo NHH') è data da

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = \frac{1}{2}.$$

Ne segue che il parallelogramma MK'VK e il parallelogramma NHVH' hanno ciascuno area uguale all'area di un quadratino e complessivamente sono equivalenti a due quadratini. Ecco perchè la figura a) supera di due quadratini la figura b).

Sono pervenute due esaurienti risposte di Giuseppe Guarato di Valdagno e di Francesco Fogliotti di Genova.

<u>RETTIFICA</u>. L'enunciato del Quinto assioma di PEANO, riportato a pag. 2, col. 2ª, del fasc. 6-IV (NOV.-DIC. 1973) di Angolo acuto va rettificato come segue: «*Sia A un sottoinsieme dell'insieme N dei numeri natura-*
«*li che contiene il numero* ZERO; *se, ogni volta che A contiene un numero*
«*x, contiene anche il successivo x^+ allora A contiene tutti i numeri*
«*naturali. Cioè A coincide con N.*»

Pietro Castaldo

Angolo acuto V, 1

LA PALESTRA DELLE GARE

AVVERTENZE IMPORTANTI PER I SOLUTORI. Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte. Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale. Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età. Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE
entro il 4 aprile 1974

Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori. Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.

QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 151

Ricostruire l'addizione criptaritmetica.
Quante soluzioni ?

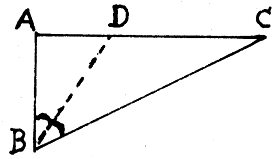
$$\begin{array}{r} \text{T R E} + \\ \text{T R E} + \\ \text{S E T T E} + \\ \text{S E T T E} = \\ \hline \text{V E N T I} \end{array}$$

Fernando Rossi

QUESTIONE 152

Il dividendo di una divisione è 709 e il quoziente è 12. Determinare il divisore e il quoziente.
Quante soluzioni esistono?

QUESTIONE 153

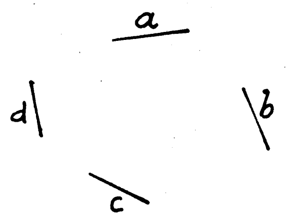


Un triangolo ABC, rettangolo in A, ha il cateto AC doppio del cateto AB; la bisettrice dell'angolo acuto ABC divide il cateto AC in due parti AD e DC. Dimostrare che AD è la sezione aurea del cateto AB.

Francesco Criscione

QUESTIONE 154

Un quadrilatero MNPR, con i vertici inaccessibili, è in-



dividuato dai frammenti a, b, c, d dei lati MN, NP, PR, RM. Individuare il tracciato delle due diagonali MP ed NR.

Alfonso La Paglia.

QUESTIONE 155

Dimostrare che se a e b sono due numeri naturali primi fra loro, la loro somma $a+b$ e la loro differenza $a-b$ sono entrambe "primi" con il prodotto ab.

M.M.

QUESTIONE 156

Trovare due numeri sapendo che il loro M.C.D. è 3 e che il loro m.c.m. è 2520. Quante coppie di numeri soddisfano alle condizioni sopra indicate?

M.M.

QUESTIONE 157

MATURITA' SCIENTIFICA 1973 - SESSIONE SUPPLETIVA - I Quesito

Dato il triangolo rettangolo AOB di cateti $OA = a$ e $OB = b$, si prenda sull'ipotenusa AB un punto P di cui sia Q la proiezione ortogonale su OB, e si ponga $QP = x$. Si consideri la funzione

$$y(x) = \frac{V_1}{V_2},$$

essendo V_1 e V_2 i volumi dei due solidi generati dalla rotazione completa del trapezio $OAPQ$ attorno, rispettivamente, al cateto OA ed al cateto OB e, indipendentemente dalla questione geometrica, la si studi per x variabile in tutto il campo reale.

QUESTIONE 158

MATURITA' SCIENTIFICA 1973 - SESSIONE SUPPLETIVA - II Quesito.

In un riferimento cartesiano ortogonale $O(x, y)$ siano date la parabola di equazione

$$y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{27}{8}$$

e le circonferenze di equazione:

$$x^2 + y^2 - 2Ky = 0$$ essendo K un parametro reale

Delle predette circonferenze si consideri quella che risulta tangente alla parabola ed appartiene al semipiano $y>0$, si scrivano le equazioni delle rette tangenti comuni alla parabola stessa ed alla circonferenza e si dica qual è l'angolo formato dalle due tangenti.

NOTA. *Nel prossimo numero saranno proposti agli Angolisti il III e il IV quesito della Mat. Scient. 73 - Sessione suppletiva. Ringraziamo intanto il Prof. Alberto Sella di Imola che gentilmente ci ha inviato il testo dei quattro quesiti.*

RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 120

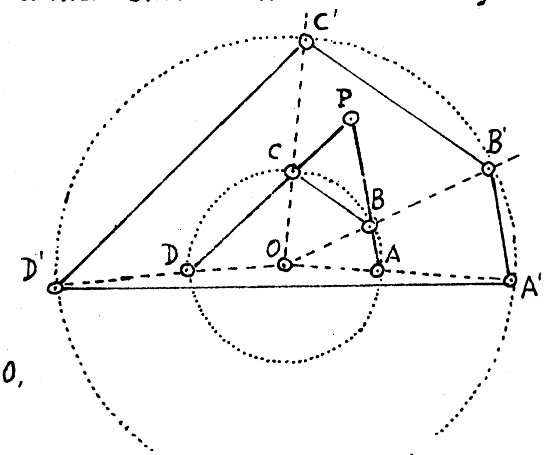
In un cerchio dato inscrivere un quadrilatero avente i lati consecutivi in progressione aritmetica con la ragione uguale al lato minore. È richiesta la costruzione grafica.

Alfonso La Paglia

RISOLUZIONE

di Roberto Imperato del III L. Scient. di Bari.

Sia ABCD un quadrilatero inscritto in una circonferenza con i lati in progressione come richiesto. I lati AB e CD si intersechino in P. Posto $AB = \ell$, $BC = 2\ell$, $CD = 3\ell$, $DA = 4\ell$, $BP = x$, $CP = y$, dalla similitudine dei triangoli BCP, DAP risulta:



$$BC : DA = CP : AP \quad \text{e}$$

$$CP : AP = BP : DP \quad \text{ossia}$$

$$\begin{cases} 2\ell : 4\ell = y : (\ell + x) \\ y : (\ell + x) = x : (3\ell + y) \end{cases}$$

quindi

$$\ell = 2y - x$$

$$\ell = \frac{x^2 - y^2}{3y - x}$$

e infine, scartando $x = -\ell$, $y = 0$, si ha:

$$x = \frac{7}{3}\ell \;, \quad y = \frac{5}{3}\ell .$$

È allora possibile costruire il triangolo BCP di lati:

$BC = 2\ell$, $BP = \frac{7}{3}\ell$, $CP = \frac{5}{3}\ell$ e quindi il quadrilatero ABCD con $AB = \ell$ sulla semiretta PB e $CD = 3\ell$ sulla semiretta PC, nonchè la circonferenza di centro O circoscritta al quadrilatero ABCD.

Con centro in O si descriva il cerchio dato. Esso è intersecato dai raggi OA, OB, OC, OD nei punti A', B', C', D' che sono vertici di un quadrilatero simile ad ABCD.

Pertanto il quadrilatero A'B'C'D' risolve il problema.

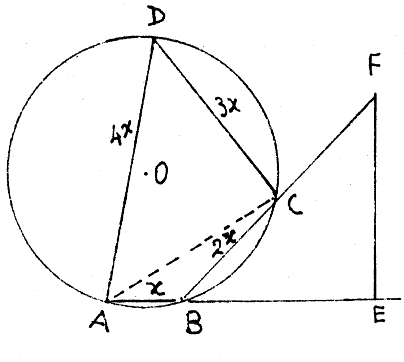
RISOLUZIONE del Prof. Alfonso La Paglia, proponente.

Perchè un quadrilatero ABCD di lati $AB = x$, $BC = 2x$, $CD = 3x$, $DA = 4x$ sia inscrittibile in un cerchio deve essere
$$\hat{B} + \hat{D} = \pi, \quad \text{da cui} \quad \cos\hat{B} = -\cos\hat{D}.$$

Ricavando $\overline{AC}^2$ con il teorema di Carnot, dai due triangoli ABC, CDA e uguagliando i valori si ha:
$$5x^2 - 4x^2\cos\hat{B} = 25x^2 + 24x^2\cos\hat{B}$$
da cui $\cos\hat{B} = -\frac{5}{7}$ e $\cos\hat{D} = \frac{5}{7}$.

Ecco quindi la semplice costruzione:

Costruito un triangolo rettangolo BEF, retto in E, con $BE = \frac{5}{7}BF$ (e quindi $\cos E\hat{B}F = \frac{5}{7}$), si porti sul prolungamento di EB un segmento arbitrario BA (cioè x); poi su BF si porti $BC = 2 \cdot BA$ e si completi il triangolo CDA (opposto a CAB) con i lati $CD = 3 \cdot BA$, $DA = 4 \cdot BA$.



Essendo $\cos A\hat{B}C = -\frac{5}{7}$, sarà anche $\cos C\hat{D}A = \frac{5}{7}$ e perciò $\hat{B} + \hat{D} = \pi$, condizione perchè ABCD sia circoscrittibile in un cerchio di centro O.

Una costruzione di similitudine determinerà il quadrilatero A'B'C'D', simile ad ABCD, inscritto nel cerchio di centro O e di raggio dato.

CALCOLO NUMERICO DI x. È noto che se a e b sono due corde consecutive di un cerchio di raggio r, la corda dell'arco somma è:

$$\frac{1}{2}\left(a\sqrt{4r^2-b^2} + b\sqrt{4r^2-a^2}\right).$$

Ponendo $a=x$, $b=2x$, $2r=1$ si ha:

$$AC = x\sqrt{1-4x^2} + 2x\sqrt{1-x^2};$$

d'altra parte si è trovato

$$AC=\sqrt{5x^2-4x^2\cos\hat{B}} = x\sqrt{5+4\frac{5}{7}} = x\sqrt{\frac{55}{7}}.$$

Uguagliando i due valori di AC, dividendo per $x \neq 0$ e risolvendo si ha $x=\sqrt{24:385} \simeq \frac{1}{4}$. Quindi:

Se i lati di un quadrilatero inscritto in un cerchio sono proporzionali ai numeri 1, 2, 3, 4, il minore di essi è $\sqrt{24:385} \simeq 1/4$ del diametro.

Più semplicemente si può calcolare x osservando che il diametro $2r$ del cerchio circoscritto al triangolo ABC è:

$$2r = \frac{AC}{\operatorname{sen}\hat{B}} = x\sqrt{\frac{55}{7}} : \sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2} = x\sqrt{\frac{385}{24}},$$

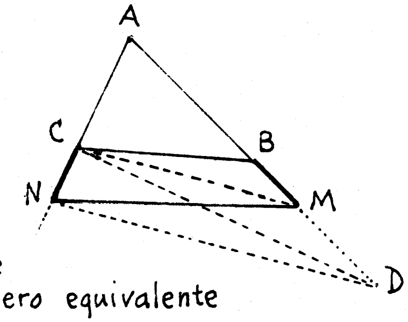
da cui appunto

$$x = 2r\sqrt{24:385} \simeq \frac{r}{2}.$$

QUESTIONE 121

Dato il triangolo ABC, prolungare i lati AB e AC di due segmenti BM e CN uguali, in modo che il triangolo AMN risulti doppio del triangolo dato ABC.

Alfonso La Paglia



RISOLUZIONE
di Roberto Imperato
del "III" Lic. Scient. di Bari

Si prolunghi il lato AB di un segmento $BD=AB=c$. Il triangolo BCD è equivalente al triangolo ABC. Ora si tratta di trasformare il triangolo BCD in un quadrilatero equivalente

avente un lato coincidente con BC e gli altri due vertici M, N rispettivamente sulle semirette AB, AC in modo che $BM = CN = x$.
La diagonale CM di questo quadrilatero sarà necessariamente parallela alla retta DN.
Si verificherà pertanto, $AM : AC = MD : CN$ ossia posto $AC = b$ e $MD = BD - BM = c - x$

$$(c+x) : b = (c-x) : x$$

da cui risulta:

$$x^2 + (b+c)x - bc = 0$$

e infine

$$x = -\frac{b+c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + bc}\,.$$

Si ha una sola soluzione : la radice positiva facilmente costruibile con riga e compasso.

RISOLUZIONE di Giuseppe Guarato di Valdagno.

Posto $AB = c$, $AC = b$,

$$BM = CN = x$$

deve risultare

$$2 \cdot A\hat{B}C = A\hat{M}N$$

ovvero

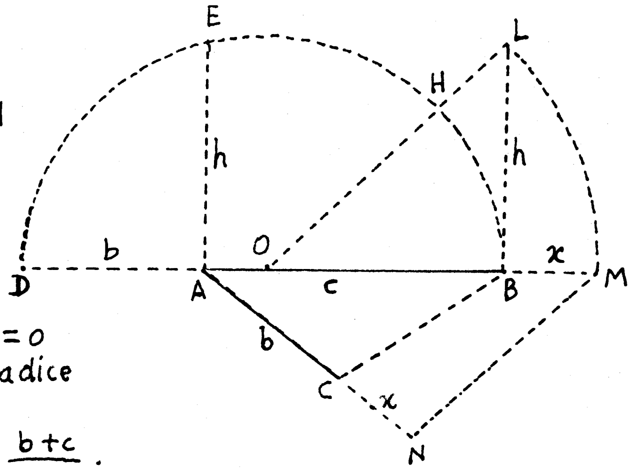
$$2 \cdot \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} B\hat{A}C = \frac{1}{2}(b+x)(c+x) \operatorname{sen} B\hat{A}C$$

da cui

$$x^2 + (b+c)x - bc = 0$$

che fornisce l'unica radice positiva

$$x = \sqrt{\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + bc} - \frac{b+c}{2}\,.$$



COSTRUZIONE di x. Basta riportare sul prolungamento di BA, $AD = AC = b$, costruire la semicirconferenza di centro O, punto medio di BD $(= b+c)$ e di raggio OB $\left(= \frac{b+c}{2}\right)$. Questa semicirconferenza interseca in E la perpendicolare ad AB per A.
Essendo $\overline{AE}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AD} = bc$, si prenda sulla perpendicolare

per B ad AB . BL = AE.

Risulta: $OL = \sqrt{\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + bc}$

Inoltre, detta H l'intersezione della semicirconferenza con OL si ha $OH = OB = \frac{b+c}{2}$.

Ne segue infine $x = LH = OL - OH = \sqrt{\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + bc} - \frac{b+c}{2}$.

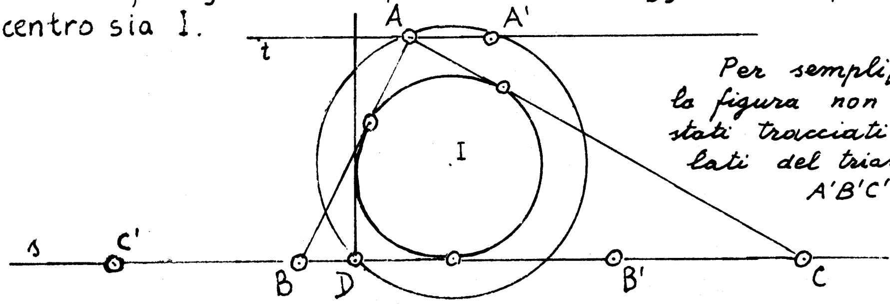
QUESTIONE 122

Costruire un triangolo rettangolo noti il raggio del cerchio inscritto e l'altezza relativa all'ipotenusa.

RISOLUZIONE

di Gaetano D'Ambrosio del Lic. Scient. di Bisceglie e di Roberto Imperato del "III" Lic. Scient. di Bari.

Si descrivano le rette s, t parallele e tali che la loro distanza sia uguale all'altezza h assegnata e, internamente alla striscia, tangente ad s, il cerchio di raggio dato r, il cui centro sia I.



Per semplificare la figura non sono stati tracciati i lati del triangolo A'B'C'.

Si conduca poi una tangente al cerchio normale ad s e intersecante questa in D. Con centro in I e raggio $ID = r\sqrt{2}$ si descriva la circonferenza che interseca t in A e A'.
Le tangenti per A (e per A') al cerchio intersecano s in B e C (e in B' e C'). I triangoli ABC e A'B'C', rettangoli in A e A' e uguali, risolvono il problema.

Si ha: una soluzione doppia se $h = (1+\sqrt{2})r$;
due soluzioni distinte se $2r < h < (1+\sqrt{2})r$;
nessuna soluzione se $h \leq 2r$ o se $h > (1+\sqrt{2})r$.

RISOLUZIONE di Alfonso La Paglia di BIELLA e di Giuseppe Guarato di VALDAGNO.

La questione non cambia aspetto se il triangolo NON è rettangolo. Siano allora BC la base, h l'altezza, OE il raggio perpendicolare ad AB. Risulta $AE = r \cdot \mathrm{cotag}\,\frac{\alpha}{2}$.
Dimostriamo che

La base BC è quarta proporzionale dopo $h-2r$; $2r$; $r\,\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2}$.

Infatti il perimetro è $2\cdot BC + 2\cdot AE$ e la doppia area è $(2\cdot BC + 2\cdot AE)\,r$. Ma la doppia area è anche $BC\cdot h$, per cui si ha

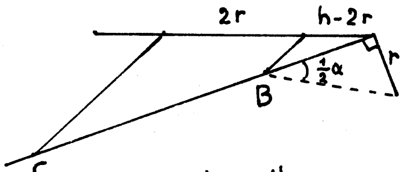
$$\left(2\,BC + 2\,r\cdot\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2}\right) r = BC\cdot h$$

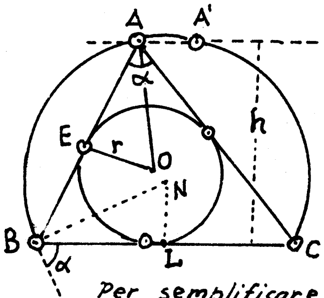
e quindi

$$h : 2r = \left(BC + r\cdot\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2}\right) : BC \qquad (1)$$

ovvero

$$(h-2r) : 2r = r\cdot\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2} : BC. \qquad \text{c.v.d.}$$





Per semplificare la figura non è stato tracciato il triangolo A'BC.

È poi ovvio che A e l'associato A' si trovano nelle intersezioni della parallela a BC a distanza h e dell'arco di corda BC capace dell'angolo α.

<u>Condizione di possibilità</u>:

$$2r < h \leq r\left(1+\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Infatti è evidente che $2r<h$. Detti poi L il punto medio di BC, N il centro della circonferenza il cui arco BAC è capace di α, risulta

$$h \leq LN + BN =$$

$$= BL\,\mathrm{cotg}\,\alpha + \frac{BL}{\mathrm{sen}\,\alpha} = BL\,\frac{\cos\alpha + 1}{\mathrm{sen}\,\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}\,BC\cdot\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

Ma dalla proporzione (1) si ricava:

$$BC = \frac{2r^2\,\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2}}{h-2r},$$

per cui sostituendo

$$h \leq \frac{r^2\,\mathrm{cotg}^2\frac{\alpha}{2}}{h-2r}$$

ossia $h^2 - 2rh - r^2\,\mathrm{cotg}^2\frac{\alpha}{2} \leq 0$ la cui limitazione superiore è appunto $h \leq r\left(1+\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2\frac{\alpha}{2}}\right)$ / <u>NOTA</u>. Per ricondurci al quesito proposto (triangolo ABC, rettanin A ; $\hat{A} = \alpha = 90°$) l'arco BAC coincide con la semicirconferenza di diametro BC e di centro $L \equiv N$; la condizione di possibilità si riduce a $2r < h \leq r(1+\sqrt{2})$.

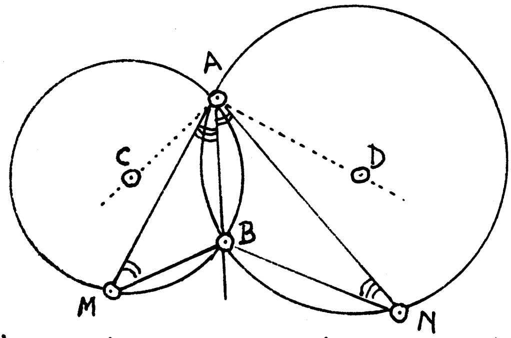
QUESTIONE 123

Due circonferenze complanari hanno il centro rispettivamente nei punti C e D e si secano nei punti A e B. Condotte per uno di questi punti (per esempio per A) le tangenti alle due circonferenze si ottengono le corde AM e AN ($AM \perp AD$ e $AN \perp AC$).

Dimostrare che i triangoli ABM e NBA sono simili.

RISOLUZIONE

di Gaetano D'Ambrosio del Lic. Scient. di BISCEGLIE, di Enrico Jannelli del Lic. Scient. "Fermi" di BARI e di Roberto Imperato del III Lic. Scient. di BARI.



Si ha:

$A\hat{M}B = B\hat{A}N$ - perchè angoli alla circonferenza, di centro C, che insistono sullo stesso arco AB ;

$B\hat{A}M = B\hat{N}A$ - perchè angoli alla circonferenza, di centro D, che insistono sullo stesso arco AB.

Ne segue $M\hat{B}A = A\hat{B}N$ e quindi i triangoli ABM e NBA sono simili.

QUESTIONE 124

UN RISULTATO SORPRENDENTE

Data una circonferenza di raggio R (ad esempio R = 1 cm , oppure R = 1 Km), di quanto deve aumentare il suo raggio R affinchè la lunghezza della circonferenza aumenti di 1 metro?

RISOLUZIONE

di Furio Honsell del Lic. Sc. "Galilei" di Trieste e di Maria Olga Zaccarini del Lic. Sc. "Spallanzani" di Reggio Emilia.

Sia x l'incremento del raggio R [espressi in metri]; dovrà essere: $$2\pi(R+x) = 2\pi R + 1 ,$$ ovvero

$$\boxed{2\pi R} + 2\pi x = \boxed{2\pi R} + 1 \qquad \text{cioè} \qquad 2\pi x = 1 \qquad (\star)$$

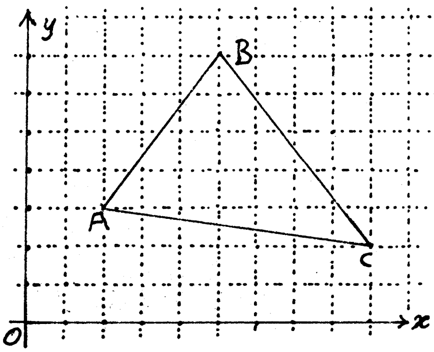
da cui $x = \frac{1}{2\pi} = 0{,}15915\ m \qquad \simeq 16\ cm$.

Per la ($\star$) l'incremento x cercato è uguale al raggio di una circonferenza lunga un metro.

Il risultato sorprendente consiste nel fatto che tale incremento rimane costante qualunque sia la lunghezza di R (1 cm, 1 Km, 100 Km, ...). In particolare, se si volesse aumentare di <u>un</u> metro l'equatore terrestre di raggio R= 6369 Km, basterebbe aumentare tale raggio di cm 16.

QUESTIONE 125

Dato in un piano un reticolato a *maglie quadrate*, si considerino tutti i triangoli aventi i vertici nei <u>nodi</u>.



I) In tale insieme T esistono triangoli EQUILATERI?

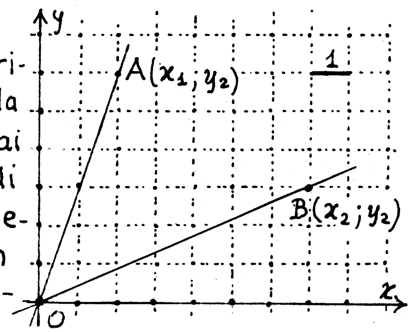
II) Esistono, in T, triangoli ISOSCELI aventi gli estremi della base in due nodi assegnati?

III) Esistono, in T, coppie di triangoli INCOMMENSURABILI?

Alfonso La Paglia

RISOLUZIONE di Gaetano D'Ambrosio del Liceo Scientifico "L. da Vinci" di BISCEGLIE (Bari)

RISOLUZIONE ANALITICA



Considero nel piano reticolato un riferimento cartesiano $O(x;y)$, avente la origine in un nodo e gli assi paralleli ai lati delle maglie. Presa come unità di misura la distanza fra due nodi consecutivi (lato di una maglia), ciascun nodo è determinata da due coordinate x_i e y_i intere.

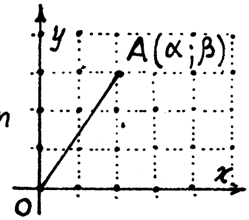
Indico con T l'insieme dei triangoli aventi i vertici nei nodi.

I). Per dimostrare che in T non esistono triangoli equilateri dimostro

che l'angolo individuato da tre nodi non può essere di 60°.
Per semplicità faccio coincidere uno dei tre nodi con l'origine O degli assi; inoltre pongo $A \equiv (x_1; y_1)$, $B \equiv (x_2; y_2)$. (fig. a pag. 12)
L'equazione della retta OA è $y = \frac{y_1}{x_1} x$; l'equazione della retta OB è $y = \frac{y_2}{x_2} x$.
L'angolo $A\hat{O}B$ è dato da $\tan A\hat{O}B = \tan(A\hat{O}x - B\hat{O}x) = \dfrac{\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2}}{1 + \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2}}$.
Essendo $\{x_1, y_1, x_2, y_2\} \subset Z$, sarà $\tan A\hat{O}B \in Q$.
Ma $\tan 60° = \sqrt{3} \notin Q$, quindi all'insieme T non appartiene alcun triangolo equilatero.

* * *

II). Per semplicità faccio coincidere uno dei due nodi (estremi della base assegnata) con l'origine; l'altro sia $A \equiv (\alpha; \beta)$.



La retta OA ha per equazione $y = \frac{\beta}{\alpha} x$, e l'asse del segmento OA

$$2\alpha x + 2\beta y = \alpha^2 + \beta^2 \qquad (1)$$

Il problema si riduce a studiare SE E PER QUALI VALORI DI α e β, l'equazione (1) ammette radici intere.
Per la formula di Waring la (1) diventa:

$$2\alpha x + 2\beta y = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta, \text{ ovvero } \alpha x + \beta y = \frac{(\alpha - \beta)^2}{2} + \alpha\beta,$$

Poiché $\{\alpha, \beta, x, y\} \subset Z$, deve essere anche
$\frac{(\alpha-\beta)^2}{2} \in Z$ cioè $(\alpha - \beta)$ deve essere un numero pari.
Quindi possiamo concludere che se la differenza fra le coordinate di A è un numero intero dispari, non è possibile costruire alcun triangolo isoscele di base OA. Se invece la differenza fra α e β è un numero pari, è facile dimostrare che la (1) è soddisfatta da tutte le soluzioni del tipo

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} + m\beta \quad ; \quad y = \frac{\alpha - \beta}{2} - m\alpha \qquad \text{con } m \in Z$$

In particolare, se α e β sono ambedue interi pari, la (1) è soddisfatta per

$$\begin{cases} x = \dfrac{\alpha+\beta}{2} + \dfrac{m}{2^h}\beta \\ y = \dfrac{\alpha-\beta}{2} - \dfrac{m}{2^h}\alpha \end{cases}$$

dove h è l'esponente del fattore 2 del m.c.m. di α e β.

III) Siano $M \equiv (x_1; y_1)$, $N \equiv (x_2; y_2)$, $P \equiv (x_3; y_3)$ tre nodi qualsiasi del piano reticolato. Indicata con A l'area del triangolo MNP si ha:

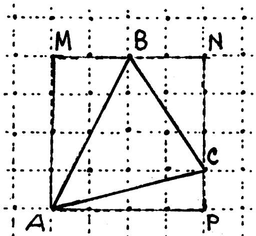
$$2A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

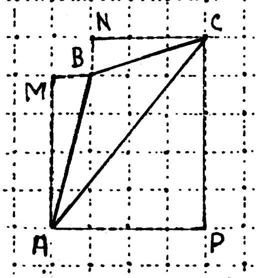
E' chiaro che poichè $\{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\} \subset Z$ sarà anche

$$2A \subset Z.$$

Ciò significa che tutti i triangoli di T sono COMMENSURABILI. Si deduce anche che tutti i poligoni (concavi o convessi, ma non intrecciati) aventi i vertici nei nodi di un piano reticolato sono commensurabili, essendo scomponibili in triangoli dell'insieme T.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA.





Prendo in esame dapprima il III quesito, del quale il I può essere considerato un corollario.

Dato un triangolo ABC i cui vertici coincidano con i nodi, si costruiscano sui suoi lati i triangoli rettangoli ABM, BCN, APC i cui cateti siano paralleli ai lati delle maglie del piano. Si ottiene così il poligono AMBNCP la cui area (facilmente calcolabile) è espressa da un numero intero. [Si prende come unità di lunghezza il lato di una maglia e come unità di superficie l'area di una maglia]. Allo stesso modo, l'area dei triangoli rettangoli ABM, BCN, APC, è esprimibile mediante numeri interi o frazioni di denominatore 2: in ogni caso numeri razionali. Quindi, per sottrazione, anche l'area di $\widehat{ABC}$ è esprimibile mediante numeri razionali. Poichè ABC è un triangolo qualsiasi (vedi figure), possiamo concludere che tutti i triangoli dell'insieme T (avente i vertici nei nodi) sono COMMENSURABILI.

In base a ciò è facile dimostrare che NON E' POSSIBILE DISEGNARE NEL PIANO RETICOLATO DEI TRIANGOLI EQUILATERI (I quesito). Infatti l'area di un triangolo equilatero è espressa da

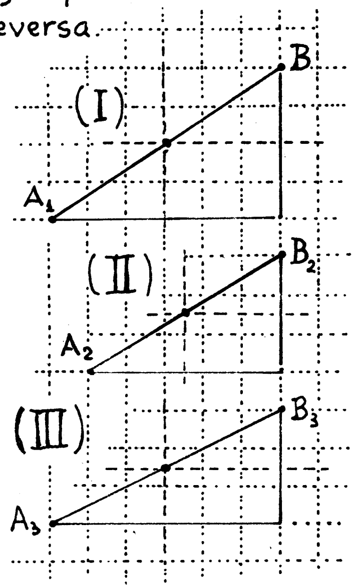
$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2$, dove ℓ è la misura del lato. Il numero ℓ può essere anche un numero irrazionale, e precisamente un radicale quadratico di un numero intero, per cui il valore A contiene in ogni caso il fattore $\sqrt{3}$ che lo rende irrazionale.

Pertanto il triangolo equilatero è INCOMMENSURABILE con i triangoli dell'insieme T e non può essere disegnato sul piano reticolato.

Per quanto riguarda il II quesito, premetto le seguenti osservazioni facilmente verificabili:

(★) Una rotazione di 90° del piano reticolato intorno ad un nodo o al centro di una maglia, riporta il piano in se stesso (i nodi a coincidere con i nodi, ecc);

(★★) *Al contrario*: Una rotazione di 90° del piano reticolato intorno al punto medio del lato di una maglia porta i nodi a coincidere con i centri delle maglie e viceversa.



Inoltre è facile dimostrare che dati due nodi, il punto medio del segmento che li congiunge può essere UN NODO oppure IL CENTRO DI UNA MAGLIA oppure IL PUNTO MEDIO DI UN LATO DI UNA MAGLIA.

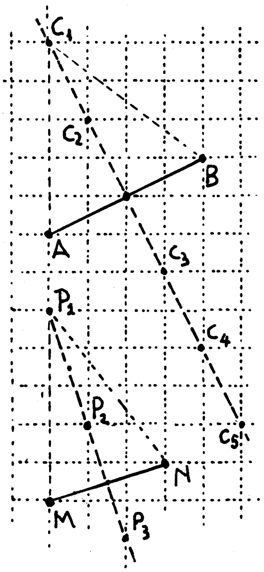
Costruito il triangolo rettangolo avente per ipotenusa il segmento dato ed i cateti paralleli ai lati delle maglie, il punto medio dell'ipotenusa è individuato dalla intersezione degli assi dei cateti.

Se i cateti sono costituiti da un numero pari di lati (I), il punto medio della ipotenusa è UN NODO.

Se i cateti sono costituiti da un numero dispari di lati (II), il punto medio dell'ipotenusa è IL CENTRO DI UNA MAGLIA.

Se invece un cateto è costituito da un numero pari di lati e l'altro cateto da un numero dispari (III), il punto medio dell'ipotenusa è IL PUNTO MEDIO DI UN LATO DI UNA MAGLIA.

Nei primi due casi è facile costruire un numero qualsiasi di triangoli isosceli aventi per base il segmento dato (vedi figure a pagina 16). Basta infatti ruotare di 90°, intorno al punto medio del segmento dato, la retta che contiene quel segmento, perchè tutti i nodi incontrati dalla retta vengano a coincidere con altrettanti nodi (OSSERVAZIONE ★). Tali nodi sono i vertici dei triangoli isosceli cercati. Infatti la retta, ruotata, su cui essi si trovano non è altro che l'asse del segmento dato



Nel terzo caso, invece, è impossibile costruire triangoli isosceli aventi per base il segmento dato. Infatti dopo aver ruotato di 90° intorno al punto medio del segmento, la retta che contiene il segmento stesso, i nodi che essa dovrebbe incontrare, perchè si possano costruire i triangoli isosceli, corrisponderebbero a centri di maglie incontrati dalla retta originaria (osservazione ★★).

Invece si può dimostrare che, se una retta passa per un nodo e per il punto medio del lato di una maglia, essa non può passare anche per il centro di una maglia.

Infatti, supponiamo che la retta r passi per A (NODO), B (PUNTO MEDIO DI UN LATO) e C (CENTRO DI UNA MAGLIA) e costruiamo i triangoli rettangoli ADB e AEC aventi i cateti paralleli ai lati delle maglie. Per la similitudine tra i triangoli ADB e AEC, si dovrebbe avere

$$\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}.$$

Il rapporto $\frac{BD}{AD}$ è espresso da

$$\frac{K}{\frac{2p+1}{2}} = \boxed{\frac{2k}{2p+1}}$$

dove $2K$ è un numero pari e $(2p+1)$ è un numero dispari.

Il rapporto $\frac{CE}{AE}$ è espresso da

$$\frac{\frac{2m+1}{2}}{\frac{2n+1}{2}} = \boxed{\frac{2m+1}{2n+1}}$$

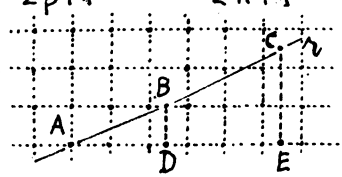
dove $(2m+1)$ e $(2n+1)$ sono numeri dispari.

Ma l'uguaglianza che se ne deduce

$$\frac{2K}{2p+1} = \frac{2m+1}{2n+1}$$

è *assurda* in quanto solo il primo membro contiene il fattore 2.

L'assurdo consiste nell'avere supposto A, B, C allineati.

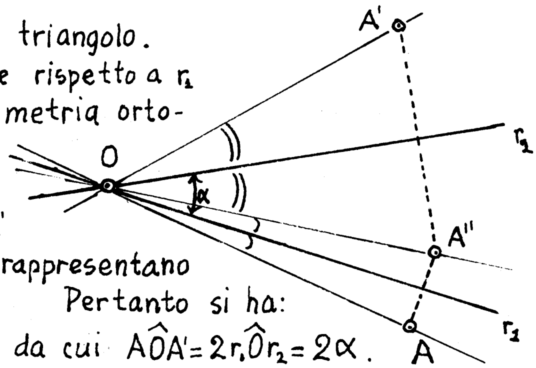


Per quanto detto precedentemente, ciò significa che l'asse del segmento dato, nel caso (III), non passa per alcun nodo, quindi è impossibile costruire alcun triangolo isoscele.
Le conclusioni a cui si perviene, sia per via geometrica, sia per via analitica sono equivalenti: infatti, nei casi (I) e (II) le misure dei cateti dei triangoli rettangoli costruiti sul segmento dato differiscono per un numero pari di unità, nel caso (III) differiscono per un numero dispari di unità.

QUESTIONE 126 GARA MATEMATICA - MATHESIS - MESSINA - 1972

In un piano siano date due rette r_1 e r_2 che incontrandosi in O formano un angolo $\widehat{r_1 r_2} = \alpha$. Dato un triangolo ABC si operi su ABC la simmetria ortogonale rispetto alla retta r_1, e successivamente sul triangolo ottenuto la simmetria ortogonale rispetto ad r_2, ottenendo così il triangolo A'B'C'.
Come si potrebbe operare per ottenere il triangolo A'B'C' direttamente dal triangolo ABC? E se le rette incidenti in O fossero tre r_1, r_2 e r_3 tali che $\widehat{r_1 r_2} = \widehat{r_2 r_3} = \alpha$?
E' possibile che componendo n di tali simmetrie si abbia che il triangolo ABC venga a coincidere con il suo corrispondente A'B'C'?

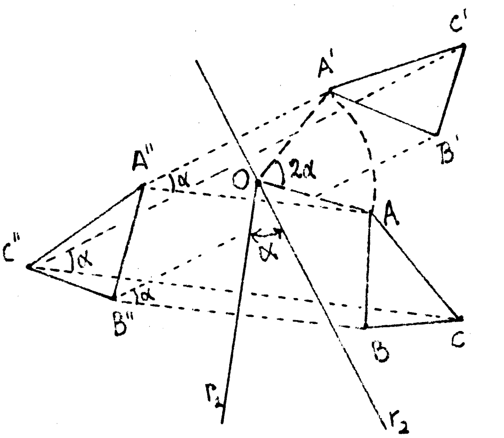
RISOLUZIONE di Gaetano D'Ambrosio - Lic. Sc. "L. da Vinci", BISCEGLIE.



Considero un solo punto A del triangolo.
Operando la simmetria ortogonale rispetto a r_1 si ottiene A'', operando su A'' la simmetria ortogonale rispetto r_2, si ottiene A'.
Congiungendo A, A'', A' con O si ottengono i triangoli isosceli AOA'' e A''OA', di cui le rette r_1 e r_2 rappresentano i rispettivi assi di simmetria. Pertanto si ha:

$$A\hat{O}r_1 = r_1\hat{O}A'' \; ; \; A''\hat{O}r_2 = r_2\hat{O}A', \text{ da cui } A\hat{O}A' = 2r_1\hat{O}r_2 = 2\alpha .$$

Quindi essendo $OA = OA'' = OA'$, il punto A' può essere considerato come ottenuto da A mediante una rotazione di ampiezza 2α, intorno ad O. Ciò vale per tutti i punti del $\widehat{ABC}$, per cui il $\widehat{A'B'C'}$ può essere considerato come ottenuto mediante una rotazione di ampiezza 2α di $\widehat{ABC}$, intorno ad O.

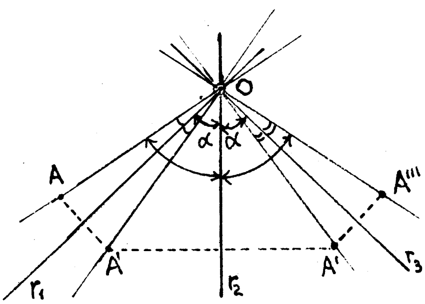


Se dopo aver ottenuto $A'B'C'$, si opera ancora una simmetria ortogonale rispetto alla retta r_3 (con $r_3\hat{O}r_2 = \alpha$), si ottiene il triangolo $A'''B'''C'''$ simmetrico di $A'\hat{B}'C'$. Considerando al solito il solito punto A, si ha:

$$A'''\hat{O}r_3 = r_3\hat{O}A' = A''\hat{O}r_1 = r_1\hat{O}A,$$

da cui si deduce che:

$$A'''Or_2 = r_2\hat{O}A.$$



Inoltre, essendo $A'''O = AO$, il punto A''' può essere considerato come ottenuto da A mediante una simmetria ortogonale rispetto a r_2. Lo stesso vale per gli altri punti di $A\hat{B}C$ e per $A\hat{B}C$ stesso. In conclusione possiamo dire che, dato un fascio di rette di origine O tali che due rette successive formino un angolo di ampiezza α, operando, su una figura F, n simmetrie rispetto a n rette successive ($n \in N_0$) si ottiene una ROTAZIONE se n è PARI e una SIMMETRIA se n è DISPARI.

In particolare, mediante $2n$ simmetrie si ottiene una rotazione di ampiezza $2n\alpha$, mediante $2n+1$ simmetrie si ottiene una simmetria rispetto alla $(n+1)$esima retta.

Quindi perchè componendo n simmetrie ABC venga a coincidere con $A'B'C'$, n deve essere pari e si deve avere:

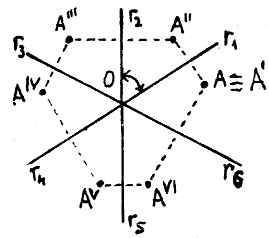
$n\alpha = 2K\pi$ (con $K \in N_0$),

da cui $$\alpha = \frac{2K\pi}{n}.$$

Ecco due esempi di simmetrie che riportano A in se stesso, entrambi con $n = 6$, il primo con $\alpha = \pi/3$, il secondo con $\alpha = 2\pi/3$.

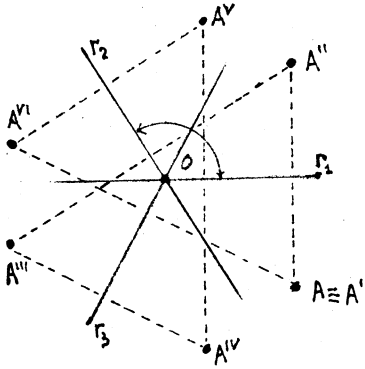
I) $\alpha = \pi/3$;

le rette r_1 e r_4, r_2 e r_5, r_3 e r_6 vengono a coincidere.



II) $\alpha = 2\pi/3$;

È necessario operare due volte la simmetria rispetto ad ogni retta.

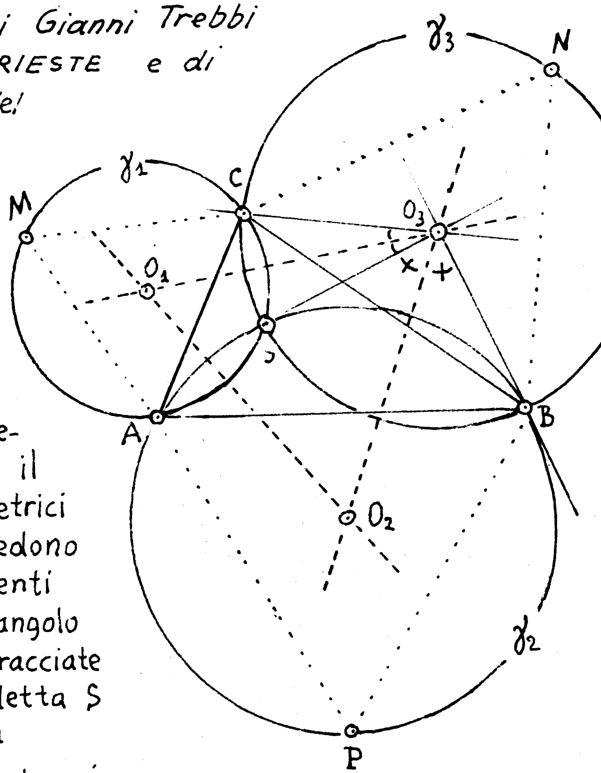


QUESTIONE 127

UN TEOREMA DI NAPOLEONE

I centri dei cerchi circoscritti ai tre triangoli equilateri costruiti sui lati di un triangolo ABC qualunque, ed esternamente al triangolo, sono vertici di un triangolo equilatero.
E' richiesta una dimostrazione geometrica.

RISOLUZIONE di Gianni Trebbi del L. Sc. "Galilei" di TRIESTE e di Gaetano D'Ambrosio del L. Sc. di BISCEGLIE



Dimostriamo anzitutto che le tre circonferenze γ_1, γ_2 e γ_3 di centro O_1, O_2, O_3 passano per uno stesso punto S.
Infatti, gli archi AB, BC e CA di tali circonferenze che attraversano il $\hat{ABC}$ sono i luoghi geometrici dei punti dai quali si vedono rispettivamente i segmenti AB, BC e CA sotto un angolo di 120°. Pertanto, tracciate ad esempio γ_1 e γ_2 e detta S la loro intersezione, si ha

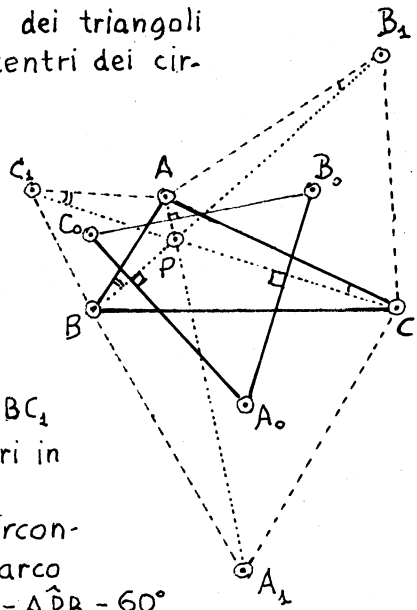
$$C\hat{S}A = A\hat{S}B = 180° \text{ da cui}$$

$C\hat{S}B = 180°$, quindi anche la γ_3 deve passare per S.
Ciò detto, è facile dimostrare che il punto S risulta simmetrico di A, B, C rispetto alle rette O_1O_2, O_2O_3 e O_3O_1. [Infatti, per esempio, si ha: $CO_3 = SO_3$, $CO_1 = SO_1$, quindi (per il 3° crit. di uguaglianza) $O_1\hat{O_3}C = O_1\hat{S}O_3$]. Ne segue che $C\hat{O_3}O_1 = O_1\hat{O_3}S$ e $S\hat{O_3}O_2 = O_2\hat{O_3}B$ da cui

$$O_1\hat{O_3}O_2 = \frac{1}{2} C\hat{O_3}B = 60°$$

Con ragionamento analogo si può dimostrare che anche gli altri angoli di $O_1\hat{O_2}O_3$ misurano 60° e che esso è un triangolo equilatero.

RISOLUZIONE di Giuseppe Guarato di VALDAGNO (VI)



Detti A_1, B_1, C_1 gli ulteriori vertici dei triangoli equilateri e A_0, B_0, C_0 i rispettivi centri dei circoli circoscritti, sia

$$P = BB_1 \cap CC_1$$

Dai triangoli congruenti ABB_1 e ACC_1 ($\overline{AB_1} = \overline{AC}$; $\overline{AC_1} = \overline{AB}$ e $B\widehat{A}B_1 = C\widehat{A}C_1$) si ha $\overline{BB_1} = \overline{CC_1}$; si ha inoltre

$$A\widehat{B}B_1 = A\widehat{C_1}C \quad \text{e} \quad A\widehat{B_1}B = A\widehat{C}C_1$$

e pertanto i quadrilateri $APCB_1$ e $APBC_1$ risultano inscrittibili con circocentri in B_0 e C_0.

Per l'uguaglianza degli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco o su archi uguali segue che $C_1\widehat{P}A = A\widehat{P}B_1 = 60°$ e che $B\widehat{P}C = C_1\widehat{P}B_1 = A\widehat{P}B = A\widehat{P}C = 120°$ e che anche il quadrilatero $BPCA_1$ è inscrittibile.

Si può notare di passaggio che i punti A, P, A_1 sono allineati e quindi che AA_1, BB_1 e CC_1 sono tra loro uguali e che passano per lo stesso punto P.

Ma a noi interessa sapere che

$\overline{C_0A} = \overline{C_0P} = \overline{C_0B}$ perchè raggi della circonf. circoscritta ad $APBC_1$,

$B_0A = B_0P = B_0C$ " " " " " ad $APCB_1$,

$A_0B = A_0P = A_0C$ " " " " " a $BPCA_1$.

Allora i lati B_0C_0, C_0A_0 A_0B_0 del triangolo $A_0B_0C_0$ appartengono rispettivamente agli assi dei segmenti AP, BP, CP che, come abbiamo visto sono inclinati di $120°$. Ne segue che il triangolo $A_0B_0C_0$ ha gli angoli di $60°$ ed è EQUILATERO.

SEGNALAZIONI — Abbonati 1974.

LICEO SCIENTIFICO "Spallanzani" di REGGIO EMILIA : 10 PROFESSORI e 124 ALUNNI
LICEO SCIENTIFICO "Einstein" di TORINO : 2 PROFESSORI e 24 ALUNNI
LICEI CLASSICI E SCIENTIFICI di TRIESTE : 2 PROFESSORI e 16 ALUNNI
LA CASSA SCOLASTICA del LIC. SCIENT. STAT. di MARTINA FRANCA (Ta) ha sottoscritto 33 abbonamenti -premio- per alunni meritevoli.

La data della Pasqua

Papa Gregorio XIII, nella riforma del calendario avvenuta nel 1582, fissò come ricorrenza della Pasqua, la prima Domenica successiva all'equinozio di primavera (21 Marzo).

Se il plenilunio ricorre il 21 Marzo e il 22 Marzo è Domenica, la Pasqua viene celebrata in questo giorno (22 Marzo). Se invece il plenilunio avviene un giorno prima dell'equinozio, occorre riferirsi al plenilunio successivo, che avviene il 18 Aprile; e se il 18 Aprile è Domenica, la Pasqua sarà celebrata la Domenica seguente, cioè il 25 Aprile.

Il giorno di Pasqua, quindi, non potrà mai cadere prima del
22 MARZO (PASQUA BASSISSIMA), nè dopo il
25 APRILE (PASQUA ALTISSIMA).

E' interessante ricordare che le ricorrenze pasquali alle date "estreme" sono molto rare:
Quella BASSISSIMA del 22 Marzo si è avuta l'ultima volta nel 1818 e quella ALTISSIMA del 25 Aprile si è verificata l'ultima volta nel 1943.

Come si calcola in che giorno cade la Pasqua in un anno assegnato?

Ecco la semplicissima regola indicata dal grande matematico CARLO FEDERICO GAUSS (1777-1855)

Si divide il numero dell'anno prescelto	ESEMPIO: ANNO 1974
per 19 e sia A il resto,	$A = 17$
per 4 e sia B il resto,	$B = 2$
per 7 e sia C il resto.	$C = 0$
Si divide poi il numero $19A + m$	$m = 24$ (*)
per 30 e sia D il resto.	$D = 23$
Si divide infine il numero $2B+4C+6D+n$	$n = 5$ (*)
per 7 e sia E il resto.	$E = 0$
La Pasqua nell'anno considerato sarà	
al $22+D+E$ di Marzo	$[22+23+0=45 > 31]$
oppure	
al $D+E-9$ di Aprile.	$23+0-9=$ <u>14 (APRILE)</u>

(*) vedi: NOTA a pagina 22.

Questa regola ha però due eccezioni:

1) Se $D = 29$ ed $E = 6$ la Pasqua risulta il 26 Aprile ma deve riportarsi al 19 Aprile.
2) Se $D = 28$, $E = 6$ ed $A > 10$ la Pasqua risulta il 25 Aprile ma deve riportarsi al 18 Aprile.

Con questa regola anche gli Alunni della prima classe della Scuola Media possono calcolare in che giorno cadrà la Pasqua nel 1975 (30 Marzo), nel 1976 (18 Aprile)... nel 2000 (23 Aprile) e controllare che la Pasqua ALTISSIMA si avrà nel 2038, nel 2258, ecc, e che la Pasqua BASSISSIMA si avrà nel 2285, nel 2353, nel 2437, ecc.

(*) NOTA: Occorre tener presente che i valori di m ed n variano secondo i periodi di anni indicati nella seguente tabella:

PERIODI	1582-1699	1700-1799	1800-1899	1900-2099	2100-2199	2200-2299	2300-2399	2400-2499
m	22	23	23	24	24	25	26	25
n	2	3	4	5	6	0	1	1

LE DATE PASQUALI dal 1970 al 2009.

- Le date poste in un cerchietto si riferiscono al mese di Marzo, le rimanenti al mese di Aprile.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1970	29	11	2	22	14	30	18	10	26	15
1980	6	19	11	3	22	7	30	19	3	26
1990	15	31	19	11	3	16	1	30	12	4
2000	23	15	31	20	11	27	16	8	23	12

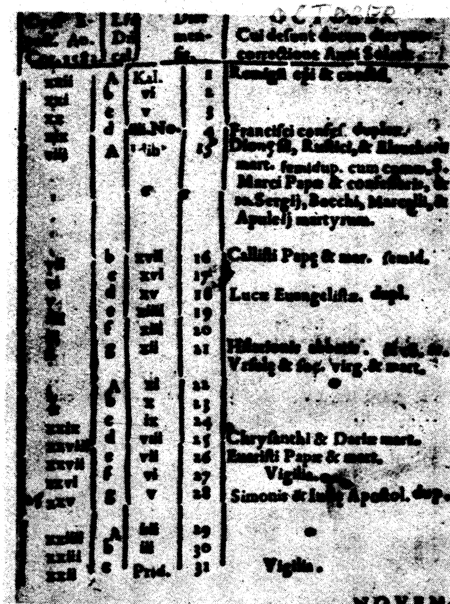
UNA DOMANDINA CAPZIOSA. Che cosa avvenne dalle ore ZERO del 5 ottobre alle ore 24 del 14 ottobre del 1582?

- ?!?!..
- Nulla! proprio nulla! assolutamente nulla!
- ?!?! Perchè?

- La risposta è a pagina 23 -

RISPOSTA

Nella « SALA del CALENDARIO » posta nella "Torre dei Venti" in Vaticano, il cosmografo perugino Ignazio Danti (1536-1586) che fu anche valente matematico, topografo, geografo e metereologo, costruì verso il 1580 una meridiana storica per dimostrare al Papa Gregorio XIII che l'equinozio di primavera non veniva più a cadere alla data del 21 marzo ma che, spostatosi di 10 giorni, cadeva allora verso l'11 marzo.



Pagina del Calendario relativa al mese di ottobre 1582. (Notare nella quarta colonna l'ordine dei giorni: dopo il 4 si passa immediatamente al 15.) [Dal " Kalendarium Gregorianum perpetuum ", Romae, 1582.]

Il 24 febbraio del 1582 Gregorio XIII firmava la Bolla INTER GRAVISSIMAS con la quale ordinava che si dovessero togliere 10 giorni all'anno in corso; ciò fu fatto in ottobre sopprimendo i 10 giorni dal 5 al 14 (vedi fig.)

10 in Matematica!

Il bravo Angolista Enrico Iannelli, nato a Bari l'11-12-1957, nel giugno 1973 è stato promosso alla 4ª classe del Lic. Scientifico "E. Fermi" di Bari, con i seguenti voti: 10 in Matem., 9 in Fisica e 8 in Italiano, Latino, Inglese, Storia, Filosofia e Scienze. *Congratulazioni* e *auguri*.

AMICI di Angolo acuto

BENEMERITI : Prof. PIETRO CASTALDO, CITTÀ di CASTELLO - Prof. ALFONSO LA PAGLIA, BIELLA - Prof. GIOVANNI LA FATA, TRAPANI - Prof. VINCENZO MARSEGUERRA, ROMA - Ing. GIOVANNI PALLAI, ROMA.-

SOSTENITORI : Prof. VINCENZO ASPRELLA, MATERA - Stud. Univ. ALBERTO BIANCHINI, FIRENZE - Prof. PIA FORTE, BRESCIA - Ins. GIUSEPPE GUARATO, VALDAGNO - Prof. BRUNO GIORDANO, REGGIO CAL. - Prof. ALESSANDRO MAGGI, FIRENZE - Ing. DINO MASINI, PAVIA - Sig. GINO MOSCA, CAVARZERE - Prof. ANNUNZIATA PALUMBO, NAPOLI - Prof. LUIGI NICOLA PILLA, PESCO SANNITA - Prof. NICOLINO RADO, TRIESTE. - Prof. LUIGIA SPILIMBERGO, ODERZO.

(continua).

LA POSTA degli ANGOLISTI

LE QUATERNE di RAMANUJAN

Il sig. Bruno Giordano di Reggio Cal. ci invia una sua ricerca originale per la determinazione di quaterne di numeri naturali diversi da zero che soddisfino la relazione

(1) $$A^3+B^3=C^3+D^3$$

con $A,B,C,D \in N_0$ oppure $A,B,C,D \in Q_0$.

Posto:

(2) $$\begin{cases} A+B=\alpha; \\ A-B=\beta; \end{cases} \qquad \begin{cases} C+D=\gamma; \\ C-D=\delta; \end{cases}$$

si ricava:

(3) $$\begin{cases} A=\dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ B=\dfrac{\alpha-\beta}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} C=\dfrac{\gamma+\delta}{2} \\ D=\dfrac{\gamma-\delta}{2} \end{cases}$$

che sostituite nella (1) danno:

(4) $$\beta^2=\frac{\gamma^3-\alpha^3+3\gamma\delta^2}{3\alpha}$$

(5) Posto $$\gamma=K+\alpha$$

la (4) diventa:

(6) $$\beta^2=\frac{K^3+3K\delta^2+3\alpha^2K}{3\alpha}+K^2+\delta^2$$

(7) Posto $$\Delta=\frac{K^3+3K\delta^2+3\alpha^2K}{3\alpha}$$

(8) cioè: $$3K\alpha^2-3\Delta\alpha+K^3+3K\delta^2=0$$

si ricava:

(9) $$\alpha=\frac{3\Delta\pm\sqrt{9\Delta^2-12K^2(K^2+3\delta^2)}}{6K},$$

mentre la (6) diventa:

(10) $$\beta^2=\Delta+K^2+\delta^2.$$

Posto:

(11) $$9\Delta^2-12K^2(K^2+3\delta^2)=p^2$$

si ricava:

$$\Delta=\frac{1}{3}\sqrt{12K^2(K^2+3\delta^2)+p^2}. \qquad (12)$$

Posto:

$$12K^2(K^2+3\delta^2)+p^2=q^2 \qquad (13)$$

la (12) diventa:

$$\Delta=\frac{1}{3}q \qquad (14)$$

Posto

$$12(K^2+3\delta^2)=M \qquad (15)$$

la (13) diventa:

$$MK^2+p^2=q^2 \qquad (16)$$

Posto: $$K=xy \qquad (17)$$

la (16) diventa:

$$Mx^2y^2=q^2-p^2=(q+p)(q-p) \qquad (18)$$

Posto: $$\begin{cases} q+p=Mx^2 \\ q-p=y^2 \end{cases} \quad \text{cioè} \qquad (19)$$

$$\begin{cases} q=\dfrac{Mx^2+y^2}{2} \\ p=\dfrac{Mx^2-y^2}{2} \end{cases} \qquad (20)$$

la (18) si esprime con

$$M(xy)^2=\left(\frac{Mx^2+y^2}{2}\right)^2-\left(\frac{Mx^2-y^2}{2}\right)^2. \qquad (21)$$

Per la (20.1) e la (15) la (14) diventa:

$$\Delta=\frac{1}{3}q=2(K^2+3\delta^2)x^2+\frac{y^2}{6}. \qquad (22)$$

Posto $$y=6z \qquad (23)$$

la (22) diventa

$$\Delta=2(K^2+3\delta^2)x^2+6z^2. \qquad (24)$$

Per la (11) e la (24), la (20.2) e la (15), la (9) diventa:

$$\alpha=\frac{3\Delta\pm p}{6K}= \qquad (25)$$

$$=\begin{cases} \alpha_1=\dfrac{2(K^2+3\delta^2)x^2}{K} \\ \alpha_2=\dfrac{6z^2}{K} \end{cases} \qquad (26)$$

Posto $$K=6xz \qquad (27)$$

e tenuto conto della (24), la (10) diventa:

(28) $\beta^2 = 6(12x^4+6x^2+1)z^2 + (6x^2+1)\delta^2$.

Per la (27), le (26) diventano:

(29) $\alpha_2 = \frac{6z^2}{K} = \frac{z}{x}$

da cui

(30) $z = x \cdot \alpha_2$ e

$\alpha_1 = \frac{2(K^2+3\delta^2)x^2}{K} = 12x^3z + \frac{x}{z}\delta^2 =$

(31) $\alpha_1 = 12x^4\alpha_2 + \frac{\delta^2}{\alpha_2}$

(32) Posto $\delta = h\alpha_2$

la (31) diventa:

(33) $\alpha_1 = (12x^4+h^2)\alpha_2$

Per la (30) e la (32), la (28) diventa:

(34) $\beta^2 = [6(12x^4+6x^2+1)x^2+(6x^2+1)h^2]\alpha_2^2$.

Tenute presenti la (27), la (30) e la (33), la (5) fornisce i due valori:

(35) $\begin{cases} \gamma_1 = K+\alpha_1 = (6x^2+12x^4+h^2)\alpha_2 \\ \gamma_2 = K+\alpha_2 = (6x^2+1)\cdot\alpha_2 \end{cases}$

(36) Posto: $\alpha_2 = w$

che, comparendo come MODULO in tutte le espressioni di α_1, β^2, γ_1, γ_2 e δ, assume il significato di COEFFICIENTE DI PROPORZIONALITA' valido per la determinazione delle soluzioni "multiple", note che siano quelle "primitive".

Posto, infine

(37) $6x^2 = 3y$

la (34), la (33), le (35) e la (32) diventano:

$$\beta^2 = [3y(3y^2+3y+1) + (3y+1)h^2]\cdot w^2 \quad (38)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = [3y^2+h^2]\cdot w \\ \alpha_2 = w \end{cases} \quad (39)$$

$$\begin{cases} \gamma_1 = [3y^2+3y+h^2]\cdot w \\ \gamma_2 = [3y+1]\cdot w \end{cases} \quad (40)$$

$$\delta = [h]\cdot w \quad (41)$$

che sono le ESPRESSIONI RISOLVENTI del problema propostoci.

La (38) non è suscettibile di ulteriore semplificazione, per cui la determinazione di β si effettua mediante la ricerca di terne di numeri naturali $[N_0]$ di β, y ed h, partendo da $y=1$, dando ad h, successivamente i valori 1, 2, 3,... e rilevando se la espressione

$3y(3y^2+3y+1) + (3y+1)h^2$

è un quadrato perfetto; nel qual caso il valore di β è immediatamente determinato e quindi anche quelli di α_1, γ_1, γ_2 e δ (α_2, nelle soluzioni primitive, è sempre uguale a 1), che, sostituiti nelle (3), danno direttamente i valori A, B, C, D della (1).

E' evidente che alcuni valori di B e di D sono negativi (entrambi o uno solo di essi) ed alcuni valori di A, B, C, D (tutti o solo due) sono frazionari con denominatore 2.

In ogni caso le soluzioni sono valide perchè soddisfano sempre la (1). È solo la meccanica di sviluppo dei calcoli numerici, condotta nell'ambito dei piccoli numeri, che ci induce a confermare che il numero $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ è il «PRIMO MINIMO» e che il numero $4104 = 2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3$ è il «SECONDO MINIMO» che si possa esprimere come somma di due cubi.

Inoltre i numeri 216 e 729 sono i più piccoli cubi che si possono esprimere come somma di tre cubi: $A^3 = B^3 + C^3 + D^3$;

$$216 = 6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3 \; ; \qquad 729 = 9^3 = 1^3 + 6^3 + 8^3 .$$

L'indagine fatta è stata limitata ai valori di y ed h indicati nel "Quadro 1", dove, nella 3ª colonna, sono indicati i valori di h che soddisfano la formula (38).

Nel "Quadro 2" sono riportati tutti i valori numerici relativi.

QUADRO 1

y	INDAGINE FATTA PER h DA ..... A	VALORI di h per cui l'espressione $3y(3y^2+3y+1)+(3y+1)h^2$ È UN QUADRATO PERFETTO
1	QUALUNQUE $(3y+1) = 2^2$	DUE SOLI VALORI: 1, 5.
2	DA 1 A 100	1, 5, 11, 25, 41, 91.
3	QUALUNQUE $(3y+1) = 10$	NESSUN VALORE, in quanto la cifra delle unità di β^2 dovrebbe essere 3.
4	DA 1 A 50	2, 7, 17, 31.
5	QUALUNQUE $(3y+1) = 4^2$	OTTO VALORI FRAZIONARI $\frac{1}{2}, \frac{11}{2}, \frac{19}{2}, \frac{23}{2}, \frac{47}{2}, \frac{67}{2}, \frac{113}{2}, \frac{341}{2}$.
6	DA 1 A 15	15
7	DA 1 A 30	NESSUN VALORE
8	DA 1 A 5	NESSUN VALORE
9	DA 1 A 5	3
10, 11, 12	DA 1 A 5	NESSUN VALORE

QUADRO 2

y	h	β	α_1 / α_2	γ_1 / γ_2	δ	A	B	C	D	RISULTATI
1	1	5	4	7	1	$\frac{9}{2}$	$-\frac{1}{2}$	4	3	$9^3 = 1^3+6^3+8^3 = 729$
			1	4		6	-4	5	3	$6^3 = 3^3+4^3+5^3 = 216$
	5	11	28	31	5	$\frac{39}{2}$	$\frac{17}{2}$	18	13	$39^3+17^3 = 36^3+26^3 = 64232$
			1	4		12	-10	9	-1	$1^3+12^3 = 9^3+10^3 = 1729$
2	1	11	13	19	1	12	1	10	9	$1^3+12^3 = 9^3+10^3 = 1729$
			1	7		6	-5	4	3	$6^3 = 3^3+4^3+5^3 = 216$
	5	17	37	43	5	27	10	24	19	$27^3+10^3 = 24^3+19^3 = 20683$
			1	7		9	-8	6	1	$9^3 = 1^3+6^3+8^3 = 729$
	11	31	133	139	11	82	51	75	64	$82^3+51^3 = 75^3+64^3 = 684019$
			1	7		16	-15	9	-2	$16^3+2^3 = 15^3+9^3 = 4104$
	25	67	637	643	25	352	285	334	309	$352^3+285^3 = 334^3+309^3 = 66763333$
			1	7		34	-16	33	-9	$34^3+9^3 = 33^3+16^3 = 40033$
	41	109	1693	1699	41	901	792	870	829	$901^3+792^2 = 870^3+829^3 = 1\,228\,225\,789$
			1	7		55	-54	24	-17	$54^3+17^3 = 24^3+54^3 = 171288$
	91	241	8293	8299	91	4267	4026	4195	4104	$4267^3+4026^3 = 4195^3+4104^3 = 142\,946\,631\,739$
			1	7		121	-120	49	-42	$121^3+42^2 = 49^3+120^3 = 1845649$

QUADRO 2 *continuazione*

y	h	β	α_1 / α_2	γ_1 / γ_2	δ	A	B	C	D	RISULTATI
4	2	28	52	64	2	40	12	33	31	$40^3+12^3=33^3+31^3=65728$
			1	13		$\frac{29}{2}$	$-\frac{27}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{11}{2}$	$29^3=27^3+15^3+11^3=24389$
	7	37	97	109	7	67	30	58	51	$67^3+30^3=58^3+51^3=327763$
			1	13		19	-18	10	3	$19^3=18^3+10^3+3^3=6859$
	17	67	337	349	17	202	135	183	166	$202^3+135^3=183^3+166^3=10702783$
			1	13		34	-33	15	-2	$34^3+2^3=33^3+15^3=39312$
	31	115	1009	1021	31	562	447	526	495	$563^3+447^3=526^3+495^3=266818951$
			1	13		58	-57	22	-9	$58^3+9^3=57^3+22^3=195841$
5	$\frac{1}{2}$	37	$\frac{301}{4}$	$\frac{361}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{449}{8}$	$\frac{153}{8}$	$\frac{363}{8}$	$\frac{358}{8}$	$449^3+153^3=363^3+359^3=96100426$
			1	16		19	-18	$\frac{33}{4}$	$\frac{31}{4}$	$76^3=72^3+33^3+31^3=438976$
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	....
6	15	81	333	351	15	207	126	183	168	$207^3+126^3=183^3+168^3=10870119$
			1	19		41	-40	17	2	$41^3=40^3+17^3+2^3=68921$
9	3	87	252	279	3	$\frac{339}{2}$	$\frac{165}{2}$	141	138	$339^3+165^3=282^3+276^3=43450344$
			1	28		44	-43	$\frac{31}{2}$	$\frac{25}{2}$	$88^3=86^3+31^3+25^3=681472$

NOTA DELLA REDAZIONE Abbiamo riportato la ricerca dell'Angolista *Bruno Giordano* secondo il manoscritto originale pervenutoci. Poniamo tuttavia per gli Angolisti una osservazione e tre interrogativi:

▲ Esistono soluzioni anche per valori frazionari di h e di β, di α, γ e δ.

I ESEMPIO: Per $y=1$ e $h=\frac{5}{3}$ si ha $\beta=\frac{17}{3}$ e $\delta=h=\frac{5}{3}$;

- $\alpha_1=\frac{52}{9}$, $\gamma_1=\frac{79}{9}$, da cui $103^3+1^3=94^3+64^3=1\,092\,728$;
- $\alpha_2=1$, $\gamma_2=4$, da cui $20^3=14^3+17^3+7^3=8\,000$.

II ESEMPIO: Per $y=1$ e $h=\frac{5}{8}$ si ha $\beta=\frac{19}{4}$ e $\delta=h=\frac{5}{8}$;

- $\alpha_1=\frac{217}{64}$, $\gamma_1=\frac{409}{64}$, da cui $521^3=87^3+449^3+369^3=141420761$.
- $\alpha_2=1$, $\gamma_2=4$, da cui $46^3=30^3+37^3+27^3=97\,336$

Ed ecco i tre interrogativi:

* *E'* possibile semplificare il procedimento che conduce alle espressioni risolventi (38), (39), (40) e (41)?
* *E'* poi vero che l'espressione risolvente (38) NON sia suscettibile di semplificazione?
* Per $y, h \in N_0$, le suddette espressioni (38), (39), (40) e (41) forniscono tutte le quaterne intere esistenti?

Ripubblichiamo l'enunciato della QUESTIONE 146 - I QUESITO DEL TEMA DI MATEMATICA DI MATURITA' SCIENTIFICA - 3 *Luglio 1973* - *perchè siamo incorsi nella involontaria omissione di tre parole determinanti* (quelle sottolineate).

« Si scrivano le equazioni delle due circonferenze C' e C'' tangenti alla para-
« bola di equazione $y=5-x^2$ e alla retta di equazione $y=1$ e si
« indichino con r' e r'' (r'>r'') i rispettivi raggi. [N.d.R.: *occorre precisare che* C' e C'' debbono essere BITANGENTI alla parabola, cioè debbono avere i centri sull'asse della parabola, cioè sull'asse della y].

« Dopo aver determinato r' e r'' si scriva l'equazione di un'altra circonferen-
« za C''' <u>tangente alla C''</u>, avente il centro sulla retta degli altri due centri e rag-
« gio uguale a r'. Inoltre si trovi l'equazione della parabola tangente a C'' ed
« a C''' e si calcoli l'area della regione del piano limitata dalle due parabole».

RISOLUTORI delle QUESTIONI	120	121	122	123	124	125	126	127
AGROSI ANIELLO - DISO	●	●	●	●	●	●	●	●
BUSO CLAUDIO - L.Sc."NIEVO" PADOVA	·	·	●	●	●	·	·	·
BURZACCHINI FABRIZIO - L.CL. ANCONA	·	·	·	·	●	·	·	·
BATIC A MARIA - L.Sc. Sloveno - TRIESTE	●	●	·	●	·	·	·	·
CAGNOLATI FRANCESCO - L.Sc."SPALLANZANI - REGGIO EM.	·	·	·	·	●	·	·	·
CIVITELLI PAOLO - L.Sc."SCORZA" COSENZA	●	●	●	●	·	·	·	·
CONTI RICCARDO - L.Sc."SPALLANZANI" REGGIO EMILIA	●	●	●	●	·	·	·	·
D'AMBROSIO GAETANO - L.Sc."L. da VINCI" BISCEGLIE	●	●	●	●	●	●	●	●
D'AMBROSIO LUCIA - Sc. Media - BISCEGLIE	●	●	●	●	·	·	·	·
DA DALT M. GRAZIA - L.CL. ANCONA	·	●	●	·	·	·	·	·
DEL BELLO SANDRO - L.Sc."PACINOTTI" LA SPEZIA	·	·	·	·	●	·	·	·
FELICIAN LEONARDO - L.CL."DANTE" TRIESTE	●	●	●	●	●	●	●	●
FELICIAN LORENZO - Sc. MEDIA - TRIESTE	·	·	·	●	·	·	·	·
FOGLIOTTI FRANCESCO - GENOVA	●	●	●	●	●	●	●	●
GUARATO GIUSEPPE - VALDAGNO	●	●	●	●	●	●	●	●
GIORDANO ANGELA VANIA - Sc. Media - REGGIO CALABRIA	·	·	·	·	●	·	·	·
GRECO PANTALEO - L.Sc."COPERNICO" PRATO	●	●	●	●	·	·	·	·
HONSELL FURIO - L.Sc."GALILEI" - TRIESTE	·	●	●	●	●	·	·	·
IMPERATO ROBERTO - "III" L.Sc. BARI	●	●	●	●	·	·	·	·
JANNELLI ENRICO - L.Sc."FERMI" BARI	·	●	●	●	●	·	●	●
LUCARDESI PAOLO - L.Sc."LUSSANA" BERGAMO	·	●	·	·	·	·	·	·
LA PAGLIA ALFONSO - BIELLA	·	·	●	·	·	·	·	·
PASCIUTO SANDRO - "XIV" L.Sc. ROMA	·	●	●	●	●	·	·	·
ROSELLI WALTER - L.Sc."PALEOCAPA" - ROVIGO	·	●	·	●	·	·	·	·
STECCONI PIERO - L.CL."AUGUSTO" ROMA	·	·	·	·	●	·	·	·
TREBBI GIANNI - L.Sc."GALILEI" TRIESTE	·	·	●	●	●	·	·	●
VIOLA PAOLO - L.CL."DANTE" TRIESTE	·	·	●	●	·	·	·	·
ZILIO SONIA - L.CL."T. LIVIO" PADOVA	·	·	·	●	·	·	·	·
ZACCAGNINI MARIA OLGA - L.Sc."SPALLANZANI" REGGIO EM.	·	·	·	·	●	·	·	·

ANGOLISTI, se volete che ANGOLO ACUTO continui la sua fatica migliorandosi, dovete aiutarci a diffonderlo sempre più.

I GENITORI sottoscrivano un abbonamento a favore dei propri figli appassionati di Matematica.

LE CASSE SCOLASTICHE degli Istituti Tecnici e Professionali, dei Licei Classici, Scientifici e Magistrali e delle Scuole Medie assegnino un abbonamento premio agli Alunni che hanno conseguito 8 o 7 in Matematica.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 gennaio 1970
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso*
Stampato dalla Kappaesse - Firenze

Associato all'USPI
Unione Stampa Periodica Italiana