ANNO V - 1974 MARZO GIUGNO 2-3

L'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

Periodico bimestrale
a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

spedizione in abb. postale - gruppo IV
conto corrente postale. 5/27919

Abbonamenti per il 1974

Studenti	L.	1600
Professori e Scuole	L.	2000
Sostenitori	L.	3000

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio.

LA PALESTRA DELLE GARE

QUESTIONI PROPOSTE

AVVERTENZE per i RISOLUTORI a pag. 2.

QUESTIONE 159

CRIPTARITMETICA

Ricostruire la moltiplicazione seguente:

```
  T R E  X
    N O
  -----
  B O E
N O E
-------
M A R E
```

QUESTIONE 160

In una sfera di raggio 25a sono inscritti due cilindri coassiali. Si sa che i diametri di base dei due cilindri sono rispettivamente 40a e 48a.

Descrivere il solido *RIUNIONE* e il solido *INTERSEZIONE* dei due cilindri calcolando, di ciascuno, l'area della superficie e il volume.

LA PALESTRA DELLE GARE

AVVERTENZE IMPORTANTI PER I RISOLUTORI *Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte. Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale. Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età. Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad*

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE

entro il 20 luglio 1974

Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori. Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.

QUESTIONE 161

In un triangolo ABC si unisca ciascun vertice con il punto di tangenza D, E, F della circonferenza inscritta con il lato opposto. Siano D', E', F' le ulteriori intersezioni della suddetta circonferenza con le rette AD, BE, CF rispettivamente.

Esprimere, in funzione delle misure dei lati a, b, c del triangolo ABC, la somma S dei prodotti:

$$S = \overline{AD}\cdot\overline{AD'} + \overline{BE}\cdot\overline{BE'} + \overline{CF}\cdot\overline{CF'}.$$

A.A.

QUESTIONE 162

Una piscina è alimentata da alcuni condotti, di uguale portata, che la riempiono in 60 minuti.

Se dopo 10 minuti si chiudono 10 condotti, la piscina si riempie in 70 minuti

Quanti sono i condotti?

Giovanni Longo

QUESTIONE 163

Un automobilista percorre a velocità costante un'autostrada lungo la quale sono indicate con cartelli, le distanze, in Km, dall'inizio della stessa autostrada.

Alle ore 15 precise, l'automobilista legge su uno di tali cartelli un numero di due cifre (A B). Alle ore 15 30 passa davanti ad un altro cartello che porta le medesime cifre, ma scritte in ordine inverso (B A). L'automobilista continua il suo viaggio sempre con la stessa velocità costante e alle ore 16 legge su un successivo cartello, le due stesse cifre nell'ordine del primo cartello ma separate da uno zero (A O B).
Calcolare la velocità dell'automobilista.

QUESTIONE 164

Da uno stesso punto, si lanciano verticalmente verso l'alto, nel vuoto, due corpi puntiformi, con velocità v_1 e v_2, il secondo dopo un certo tempo T dal primo.
A quale altezza e dopo quanto tempo dal lancio del primo avviene il loro incontro?
Detto incontro avverrà durante l'ascesa o durante la discesa del primo corpo?

A. Portalupi.

QUESTIONE 165

MATURITA' SCIENTIFICA 1973 - Sessione suppletiva - III QUESITO

Si studi la variazione della funzione

$$y = \operatorname{sen} 2x - \operatorname{tang} x$$

nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$.

QUESTIONE 166

MATURITA' SCIENTIFICA 1973 - Sessione suppletiva - IV QUESITO

Si disegnino i grafici delle due funzioni:

$$y = \frac{x(1-2x)}{1+2x}, \qquad y = \frac{1}{1+2x}$$

e si scrivano le equazioni dei rispettivi asintoti.
Si calcoli poi la differenza fra l'area della regione piana delimitata dal secondo grafico e dall'asintoto obliquo del primo, e l'area della regione formata dal primo grafico con l'asse delle ascisse.

QUESTIONE 167 — TEOREMA DI EULERO

In ogni triangolo ABC la distanza $d = \overline{HI}$ fra l'ortocentro H e l'incentro I è data dalla relazione:

$$d = R(R-2r),$$

in cui R è il raggio del cerchio circoscritto ed r il raggio del cerchio inscritto.

RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 128 — CRIPTARITMETICA

Ricostruire la moltiplicazione :

$$\text{UNO} \times \text{DUE} = \text{CINQUE}.$$

(Nessuna lettera ha il valore ZERO).

RISOLUZIONE dedotta dalle risposte di *Gianni Trebbi e Furio Honsell del L.Sc."Galilei" di TS, Leonardo Felician del L.Cl. "Dante Alighieri" di Trieste e Giuseppe Guarato di Valdagno.*

Notiamo che la lettera E rappresenta l'ultima cifra sia del secondo fattore, sia del prodotto; cioe

$$O \times E = \ast E$$

Per O=1 si ha E = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
per O=3 si ha E = 5;
per O=6 si ha E = 2, 4, 8;
per O=7 si ha E = 5;
per O=9 si ha E = 5.

O non può assumere uno dei valori 2, 4, 5, 8.

Notiamo poi che la lettera U rappresenta la penultima cifra sia del secondo fattore sia del prodotto; cioè si ha :

$$\text{NO} \times \text{UE} = \blacktriangle \bullet \text{UE}.$$

Le possibilità sono 75; ne riportiamo alcune:
Per O=9, E=5 si hanno 7 possibilità:

NO =	29	49	49	69	69	89	89
UE =	75	25	75	25	75	25	75

per $O = 7$, $E = 5$ si hanno 3 possibilità $\begin{cases} NO = 17 \mid 37 \mid 97 \mid \\ UE = 25 \mid 25 \mid 25 \mid \end{cases}$

per $O = 3$, $E = 5$ si hanno 5 possibilità

$$\begin{cases} NO = 13 \mid 13 \mid 73 \mid 93 \mid 93 \mid \\ UE = 25 \mid 75 \mid 25 \mid 25 \mid 75 \mid \end{cases}$$ e così via.

Per ognuna di queste possibilità abbiamo dunque N, O, U ed E, ovvero il primo fattore, completo, e le ultime due cifre del secondo; occorre individuare ora il valore da attribuire alla lettera D in modo che siano soddisfatte le altre condizioni imposte dalla moltiplicazione criptaritmetica data. Al posto di D possiamo provare a mettere una delle rimanenti cinque cifre (*dieci meno le quattro* già utilizzate e lo **zero** escluso dall'enunciato).

Si tratta di analizzare 375 ($= 75 \times 5$) possibilità.

I vari casi da scartare si determinano facilmente e si perviene così all'unico caso possibile dato da $U = 7$, $N = 1$, $O = 3$, $D = 6$, $E = 5$ da cui $C = 4$, $I = 8$, $Q = 2$.

L'operazione ricostruita è quindi:

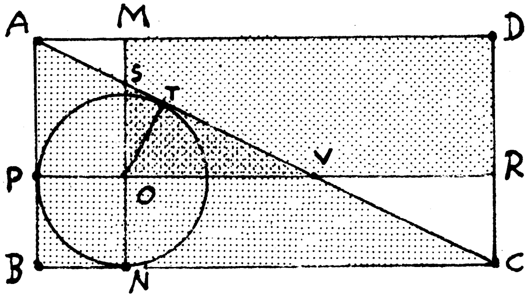
$$\begin{array}{l} UNO \times DUE = CINQUE \\ 713 \times 675 = 481275 \end{array}$$

Buone anche le risposte di *Francesco Fogliotti di Genova*, *di Gaetano D'Ambrosio del L. Sc. di Bisceglie* e di *Alessandro Pasciuto del "XIV" L. Sc. di Roma*.

QUESTIONE 129

Dato il rettangolo ABCD si consideri la diagonale AC e il centro O del cerchio inscritto nel triangolo ABC.

Si conduca per O la corda MN (M su AD), parallela ad AB e la corda PR (R su CD) parallela ad AD.



Dimostrare l'equivalenza fra il triangolo ABC e il rettangolo MORD.

Gaetano D'Ambrosio del L. Sc. di Bisceglie (Ba) ha inviata due dimostrazioni geometriche:

PRIMA DIMOSTRAZIONE

Sia γ la circonferenza inscritta nel triangolo ABC ed r il suo raggio ; $T = \gamma \cap AC$, $S = AC \cap MN$, $V = AC \cap PR$.
Essendo $\overline{AM} = \overline{OT} = \overline{RC} = r$, $A\hat{S}M = O\hat{S}T$, $S\hat{V}O = R\hat{V}C$,
si ha $\overset{\triangle}{AMS} = \overset{\triangle}{OTS}$ e $\overset{\triangle}{OTV} = \overset{\triangle}{VCR}$
Quindi il rettangolo MORD e il triangolo ACD, essendo equiscomposti, sono equivalenti.
E poichè $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{CDA}$, sono equivalenti anche il triangolo ABC e il rettangolo MORD.

SECONDA DIMOSTRAZIONE

Essendo $AP = AT$, $BP = BN$, $CN = CT$, l'area di $\overset{\triangle}{ABC}$ è data da

$$S(ABC) = (AP + BN + NC)\cdot r = AP\cdot r + BN\cdot r + NC\cdot r =$$
$$= S(POMA) + S(BNOP) + S(ONCR) = S(ABCROM).$$

E poichè $S(ABC) = \frac{1}{2} S(ABCD)$ si ha:

$$S(ABCROM) = S(ABC) = \frac{1}{2} S(ABCD) = S(MORD).$$

Ne segue anche: $S(ABCD) = S(MORD)$.

DIMOSTRAZIONE ALGEBRICA

di Giuliana Imbrogno dell'Ist. Magistrale "L. della Valle" di Cosenza.

Posto $\overline{AT} = \overline{AP} = \overline{OM} = x$, $\overline{CT} = \overline{CN} = \overline{OR} = y$, $\overline{BN} = \overline{BP} = \overline{ON} = \overline{OP} = \overline{OT} = r$ si ha $\overline{AC} = \overline{AT} + \overline{TC} = x + y$.

$$S(ABC) = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{(x+r)(y+r)}{2} = \frac{xy + r(x+y) + r^2}{2} \quad (*).$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABC si ha:
$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$, ovvero $(x+r)^2 + (y+r)^2 = (x+y)^2$;
da cui, sviluppando e semplificando, $r^2 + r(x+y) = xy$.
Sostituendo ora nella (*) si ha:

$$S(ABC) = \frac{xy + [r(x+y) + r^2]}{2} = \frac{xy + xy}{2} = xy.$$

D'altra parte si ha: $S(\overset{\square}{ORDM}) = OM \cdot OR = xy$.
E' quindi $\overset{\triangle}{ABC} \doteq \overset{\square}{ORDM}$.

QUESTIONE 130

Studiare la funzione $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 - 1}$ e tracciarne il grafico.

RISOLUZIONE di Claudio Perfetto del L. Sc. "DIAZ" di CASERTA e di Gaetano D'Ambrosio del L. Sc. di BISCEGLIE (Bari)

Si tratta di una funzione algebrica razionale fratta di 3° grado, definita in tutto il campo reale, eccetto che per $x = \pm 1$, valori che ne annullano il denominatore.

La curva incontra gli assi cartesiani soltanto nell'origine degli assi. Non presenta asintoti orizzontali. Essendo

$$\lim_{x \to -1^-} y = \lim_{x \to 1^-} y = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^+} y = \lim_{x \to 1^+} y = +\infty,$$

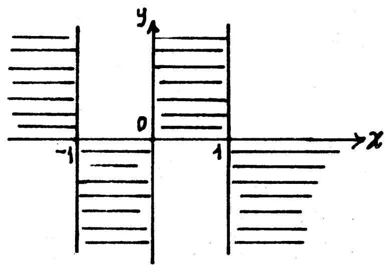
i punti di ascissa ∓ 1 sono punti di discontinuità di 2ª specie e le rette $x = -1$, $x = 1$ sono asintoti verticali.

Poichè la funzione data non cambia se si sostituisce $-x$ ad x e $-y$ ad y, il suo grafico risulta simmetrico rispetto all'origine degli assi.

Poichè si ha:

$y > 0$ per $-1 < x < 0$ e $1 < x$,
$y < 0$ per $x < -1$ e $0 < x < 1$
$y = 0$ per $x = 0$

la curva non ha punti nelle zone tratteggiate nello schema qui indicato.



ASINTOTO OBLIQUO

Poichè
$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x}{x(x^2 - 1)} = 1,$$

$$q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3 + 2x}{x^2 - 1} - x\right] = \dots = \lim_{x \to \infty} \frac{3x}{x^2 - 1} = 0,$$

ove m e q sono rispettivamente, il coefficiente angolare e il termine noto di una retta di equazione generica $y = mx + q$, la funzione data ammette per asintoto obliquo la retta di

equazione $y = x$, cioè la bisettrice del I e III quadrante.
Per determinare l'equazione dell'asintoto obliquo si può, più semplicemente, procedere nel modo seguente:
Poichè la funzione data si può scrivere nella forma:
$\boxed{y = x} + \frac{3x}{x^2-1}$ e si ha $\lim_{x \to \infty} \frac{3x}{x^2-1} = 0$,
la retta di equazione $y = x$ è l'asintoto obliquo del grafico.

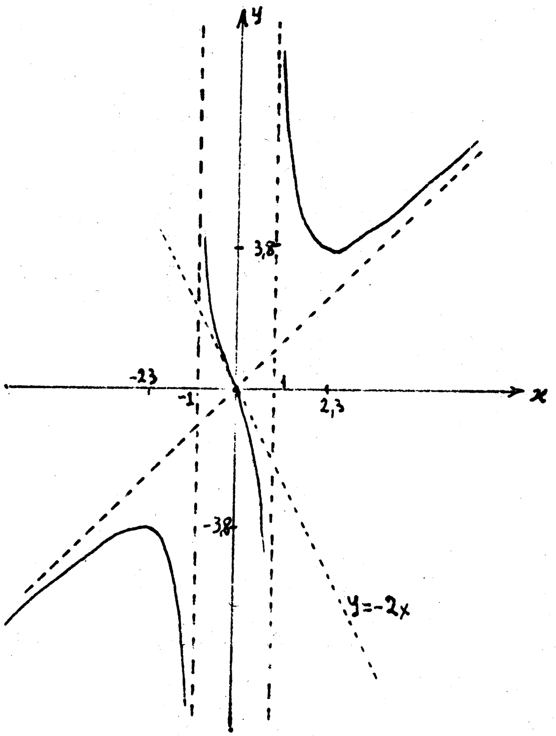
***

Si ha: $y' = \frac{x^4 - 5x^2 - 2}{(x^2-1)^2}$; $y' = 0$ per $x = \pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{33}}{2}} \simeq \pm 2{,}3$,

$y' > 0$ per $x < -\sqrt{\frac{5+\sqrt{33}}{2}}$ e $x > \sqrt{\frac{5+\sqrt{33}}{2}}$,

$y\left(\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{33}}{2}}\right) = \pm \frac{\sqrt{33}+1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{33}}{2}} \simeq \pm 3{,}8$.

Si ha quindi un massimo relativo in $(-2{,}3\,;-3{,}8)$, un minimo relativo $(2{,}3\,;\,3{,}8)$.



Si ha inoltre
$$y'' = \frac{6x(x^2+3)}{(x^2-1)^3},$$
È $y'' > 0$ per
$-1 < x < 0$ e $x > 1$
(concavità verso l'alto);
È $y'' < 0$ per
$x < -1$ e $0 < x < 1$
(concavità verso il basso);
È $y'' = 0$ per $x = 0$;
quindi il grafico presenta, nell'origine degli assi, un punto di *flesso* a tangente obliqua di equazione
$y = -2x$.

QUESTIONE 131 MATURITÀ MAGISTRALE

SESSIONE SUPPLETIVA 18-LUGLIO 1972

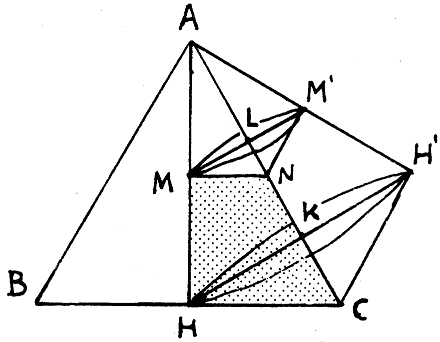
Il triangolo ABC è equilatero ed ha il lato di lunghezza a. Indicando con M il punto medio dell'altezza AH e con N il punto medio del lato AC, si esprimano per mezzo di a il volume e l'area della superficie del solido generato dal trapezio MNCH in una rotazione completa attorno al lato AC.

Si determini poi a in modo che l'area predetta sia uguale a quella di una sfera avente il raggio di un centimetro.

RISOLUZIONE di Francesco Fogliotti di GE-SAMPIERDARENA e di Gaetano D'Ambrosio del L. Scient. di BISCEGLIE (BARI).

Si ha $AB = BC = AC = a$,

$AN = NC = HC = \frac{a}{2}$.



Condotta da M e da H le perpendicolari ML e HK ad AC, siano M' e H' i punti simmetrici di M e di H rispetto alla retta AC.

Si ha $AH = AH' = HH' = \frac{a}{2}\sqrt{3}$,

$AM = MH = AM' = MM' = HK = \frac{a}{4}\sqrt{3}$,

$MN = \frac{a}{4}$, $LN = \frac{a}{8}$, $ML = \frac{a}{8}\sqrt{3}$.

CALCOLO DEL VOLUME DEL SOLIDO RICHIESTO : V(MNCH)

Poichè i triangoli AMN e AHC sono simili, sono simili anche i solidi da essi generati nella rotazione attorno ad AC.

Poichè $AC : AN = 2 : 1$, detti V_1 il volume del solido generato dal triang. AMN. e V_2 il volume del solido generato dal triangolo AHC si ha:

$$V_2 : V_1 = 2^3 : 1^3 \quad \text{da cui} \quad V_2 = 8V_1 .$$

Detto infine V_3 il volume generato dal trapezio MNCH, si ha

$$V_3 = V_2 - V_1 = 8V_1 - V_1 = 7V_1 = \frac{7}{8}V_2 ;$$

cioè $V_3 = \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot\overline{HK}^2\cdot\overline{AC} = \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi\left(\frac{a}{4}\sqrt{3}\right)^2 a = \ldots = \frac{7}{128}\pi a^3$.

CALCOLO DELL'AREA DELLA SUPERFICIE DEL SOLIDO RICHIESTO

Indicando genericamente con S_{XY} l'area della superficie descritta dal segmento XY (nella rotazione attorno ad AC) e con S l'area della superficie del solido richiesto si ha:

$$S = S_{CH} + S_{HM} + S_{MN} =$$
$$= \pi\cdot\overline{HK}\cdot\overline{HC} + \pi\cdot(\overline{HK}+\overline{ML})\cdot\overline{MH} + \pi\cdot\overline{ML}\cdot\overline{MN} =$$
$$= \pi\left[2\cdot\overline{ML}\cdot 2\cdot\overline{MN} + (2\cdot\overline{ML}+\overline{ML})\overline{MH} + \overline{ML}\cdot\overline{MN}\right] =$$
$$= \pi\left[4\cdot\overline{ML}\cdot\overline{MN} + 3\cdot\overline{ML}\cdot\overline{MH} + \overline{ML}\cdot\overline{MN}\right] =$$
$$= \pi\cdot\overline{ML}\left[5\cdot\overline{MN} + 3\cdot\overline{MH}\right] = \pi\frac{a}{8}\sqrt{3}\left[5\cdot\frac{a}{4} + 3\cdot\frac{a}{4}\sqrt{3}\right] =$$
$$= \pi\frac{a^2}{32}\left[9+5\sqrt{3}\right]$$

Infine se questa area deve essere uguale a quella di una sfera avente il raggio di 1 cm, deve aversi

$$\frac{\pi a^2}{32}(9+5\sqrt{3}) = 4\pi\ \text{cm}^2, \qquad \text{da cui}$$

$$a^2 = \text{cm}^2\ \frac{128}{9+5\sqrt{3}} = \text{cm}^2\ \frac{64}{3}(9-5\sqrt{3}), \quad \text{e quindi:}$$

$$a = \text{cm}\ \frac{8}{3}\sqrt{27-15\sqrt{3}} = \text{cm}\ \frac{8}{3}\sqrt{27-25{,}98075} = \ldots \simeq \text{cm}\ 2{,}69.$$

QUESTIONE 132

Calcolare la somma dei coefficienti del polinomio-sviluppo del seguente prodotto:

$$(5x+3y-4z)^2\cdot(3x+2y+5z)^3\cdot(4x-y+2z)^4.$$

D. Palermo

RISOLUZIONE di Annachiara Geroldi del L.Sc. "Aselli" di CREMONA e di Furio Honsell del L.Sc. "Galilei" di TRIESTE.

I coefficienti del polinomio-sviluppo non variano se si pone $x = y = z = 1$. Pertanto è lecito operare subito tale sostitu-

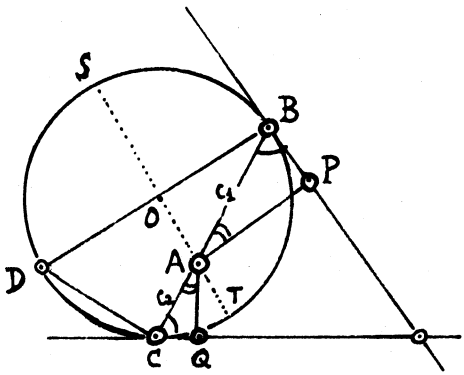
zione. Si ha: $(5+3-4)^2 \cdot (3+2+5)^3 (4-1+2)^4 =$
$$= 4^2 \cdot 10^3 \cdot 5^4 = 2^4 \cdot 5^4 \cdot 10^3 = (2 \cdot 5)^4 \cdot 10^3 = 10^4 \cdot 10^3 =$$
$$= 10^7 = 10\,000\,000.$$

QUESTIONE 133

Per un punto P dato internamente ad un cerchio si tracci una corda AB e le tangenti al cerchio nei punti A e B. Determinare la posizione della corda per cui risulti *minimo* (oppure *massimo*) il prodotto delle distanze del punto P dalle due tangenti.

Fernando Rossi.

Sono pervenute 10 risoluzioni esaurienti. Ma pubblichiamo quella inviataci dal proponente, del L. Cl. "Dante" di FIRENZE, perchè molto semplice.



Detto O il centro del cerchio si ponga: $\overline{OA} = d$; $\overline{BD} = 2R$; $\overline{AB} = c_1$; $\overline{AC} = c_2$; $\overline{BC} = c_1 + c_2 = c$.

Dalla similitudine fra i triangoli CBD e QAC si ha:

$$BD : CB = AC : QA \text{, ovvero: }$$
$$2R : c = c_2 : \overline{QA}$$

da cui $\overline{QA} = \dfrac{c \cdot c_2}{2R.}$ (1)

Analogamente dalla similitudine tra i triangoli CBD e PAB si ha BD : BC = AB : AP, ovvero $2R : c = c_1 : \overline{AP}$, da cui $\overline{AP} = \dfrac{c \cdot c_1}{2R}$. (2) Dalla (1) e dalla (2) si ricava il prodotto $\mathcal{P} = \overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \dfrac{c_1 \cdot c_2 \cdot c^2}{4R^2}$.

Unica variabile di quest'ultima espressione è la lunghezza c della corda (infatti per il teorema delle corde il prodotto $c_1 c_2 = R^2 - d^2$ è costante) e quindi:
$\mathcal{P}$ è minimo quando c è minima (ossia quando la corda è perpendicolare al diametro passante per A)

$\mathcal{P}$ è massimo quando c è massima (cioè quando la corda passa per A e per O e coincide quindi con il diametro ST)

QUESTIONE 134

Dimostrare che moltiplicando due numeri *pari consecutivi* (oppure due numeri dispari consecutivi) ed aggiungendo 1 si ottiene sempre un quadrato perfetto.

RISOLUZIONE

di Mauro Bigi della Scuola Media "Carducci" di FIRENZE.

Se n è un numero intero qualunque, i due numeri $n-1$ e $n+1$ indicano sempre due numeri pari (o due numeri dispari) consecutivi.

Si ha: $$(n-1)(n+1)+1 = n^2-1+1 = n^2.$$

Quindi la proposizione proposta è dimostrata.

RISOLUZIONE

di Aniello Agrosi di Diso (LECCE)

Sia $2n$ un numero pari qualsiasi e $2n+2$ il numero pari consecutivo; si ha

$$2n(2n+2)+1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2.$$

Sia $2n+1$ un numero dispari qualsiasi e $2n+3$ il numero dispari consecutivo; si ha:

$$(2n+1)(2n+3)+1 = \dots = 4n^2+8n+4 = (2n+2)^2$$

Praticamente si ha:

$0\cdot 2+1 = 1^2$	$0\cdot 2+1 = 1^2$	$1\cdot 3+1 = 2^2$
$1\cdot 3+1 = 2^2$	$2\cdot 4+1 = 3^2$	$3\cdot 5+1 = 4^2$
$2\cdot 4+1 = 3^2$	$4\cdot 6+1 = 5^2$	$5\cdot 7+1 = 6^2$
$3\cdot 5+1 = 4^2$	....	....
$4\cdot 6+1 = 5^2$	$2n(2n+2)+1=(2n+1)^2$	$(2n+1)(2n+3)+1=(2n+2)^2$.

RISOLUZIONE

di Enrico Jannelli del L. Sc. "E. Fermi" di BARI

Due numeri pari (o dispari) consecutivi hanno sempre differenza uguale a 2.

Indicando perciò con n il numero minore e con $n+2$ il numero maggiore, si ottiene

$$n(n+2)+1 = n^2+2n+1 = (n+1)^2 = \left[\frac{n+(n+2)}{2}\right]^2$$

Si dimostra così che il prodotto di due numeri pari (o dispari) consecutivi, aumentato di 1, è uguale al quadrato della media aritmetica dei due numeri.

—

In generale, il prodotto di due numeri n e $n+k$, $(n, k \in \mathcal{R})$, aumentato di $\frac{k^2}{4}$ è uguale al quadrato della media aritmetica dei due numeri. Infatti:

$$n(n+k) + \frac{k^2}{4} = n^2 + kn + \frac{k^2}{4} = \left(n + \frac{k}{2}\right)^2 = \left[\frac{n+(n+k)}{2}\right]^2.$$

Però, affinchè l'espressione $\left[\frac{n+(n+k)}{2}\right]^2$ sia quadrato di un numero intero occorre che n sia intero e che k sia un numero pari; occorre cioè che i numeri siano entrambi pari o entrambi dispari: «n ed $n+2k$».

RISOLUZIONE di Giuseppe Guarato di Valdagno (Vi)

La questione proposta è un caso particolare della seguente: « *Moltiplicando fra loro due numeri congrui a r, modulo 2s, (r < 2s), consecutivi e aggiungendo al prodotto s^2, si ottiene sempre un quadrato perfetto*».

Si ha infatti: $(2sm + r)[2s(m+1)+r] + s^2 =$

$$= 4s^2m(m+1) + 2srm + 2sr(m+1) + r^2 + s^2 =$$
$$= 4s^2m^2 + 4s^2m + 2srm + 2srm + 2sr + r^2 + s^2 =$$
$$= 4s^2m^2 + 4sm(s+r) + (s+r)^2 = (2sm + s + r)^2 .$$

Cioè si ottiene il quadrato della semisomma dei numeri considerati.

Ponendo nella precedente catena di uguaglianze

$$s = 1 \quad e \quad r = 0 \quad \text{oppure} \quad s = 1 \ e \ r = 1$$

si hanno i due casi proposti dalla questione.

RISPONDERE, PRIMA con rapidità. **EFFETTUARE POI** i calcoli e controllare le risposte date:

$$\sqrt{0{,}111\ldots} \stackrel{?}{=} 0{,}333\ldots$$

SI | NO

$$3\sqrt{2} + \sqrt{17} \stackrel{?}{=} \frac{1}{3\sqrt{2} - \sqrt{17}}$$

SI | NO

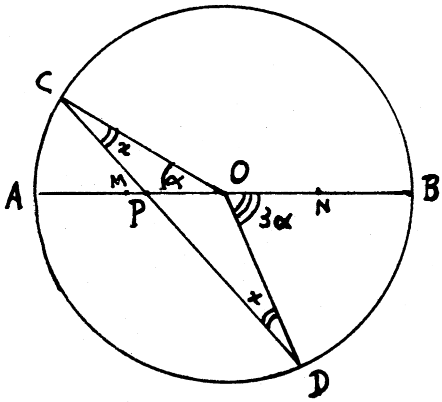
QUESTIONE 135

Condurre per un punto P assegnato sul diametro AB di una circonferenza, una corda CD in modo che l'arco BD sia triplo dell'arco AC.

Gianni Sena

RISOLUZIONE di Francesco Fogliotti di Genova-Samp. e di Furio Honsell del L. Sc. "GALILEI" di Trieste.

Sia P un punto assegnato su AB; si voglia $\overset{\frown}{BD} = 3\overset{\frown}{AC}$, cioè $B\hat{O}D = 3 \cdot A\hat{O}C$.



Posto $A\hat{O}C = \alpha$, $B\hat{O}D = 3\alpha$ siano $O\hat{C}D = O\hat{D}C = x$

Per il teorema dell'angolo esterno si ha:

dal triang. CPO $O\hat{P}D = (x+\alpha)$,

dal triang. DOP

$$B\hat{O}D = O\hat{P}D + O\hat{D}P,$$
$$3\alpha = x + \alpha + x$$

da cui $x = \alpha$.

Pertanto il triangolo OPC deve essere isoscele cioè deve essere $\overline{OP} = \overline{PC}$; e poichè $\overline{OP} + \overline{PC} > \overline{OC} = \overline{OA}$ dovrà essere anche $\overline{OP} > \frac{\overline{OA}}{2}$. Cioè, detti M ed N i punti medi dei raggi OA e OB, si deduce che P non può essere interno al segmento MN.

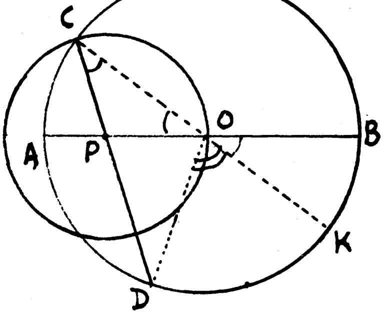
COSTRUZIONE. Il punto C si deduce come intersezione della circonferenza data con un arco di circonferenza di centro P e raggio PO.

Si hanno due soluzioni simmetriche, purchè sia

$$\frac{1}{2} AO < PO < AO.$$

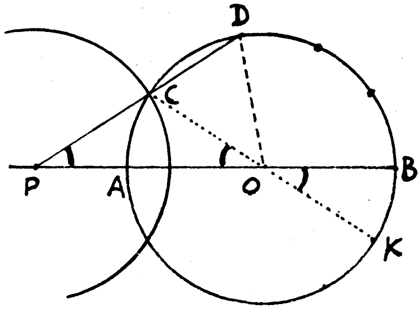
RISOLUZIONE del Proponente

Supposto il problema risolto, si consideri il diametro CK e distinguiamo il caso di P interno al diametro e di P sui prolungamenti del diametro.



Si ha: $P\hat{O}C = B\hat{O}K = \frac{1}{3} B\hat{O}D$.

$P\hat{O}C = \frac{1}{2} D\hat{O}K = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} B\hat{O}D = \frac{1}{3} B\hat{O}D$.



Si ha: $C\hat{O}P = B\hat{O}K = \frac{1}{4} K\hat{O}D$

$K\hat{C}D = \frac{1}{2} K\hat{O}D$

da cui

$O\hat{P}C = K\hat{C}D - C\hat{O}P = \frac{1}{4} K\hat{O}D$.

Risulta perciò isoscele il triangolo POC e il punto C, che unito con P determina la corda che risolve il problema, si ottiene come intersezione della circonferenza data con quella

la di centro P e raggio PO | la di centro P e raggio OC.

Il problema avrà due, una o nessuna soluzione se

$PO \gtreqless \frac{1}{2} AO$ | $PO \lesseqgtr 2\,AO$.

QUESTIONE 136

Nel quadrilatero ABCD, circoscritto ad una circonferenza di raggio **2r**, l'angolo in A e' retto, i lati **AB** e **AD** sono uguali e la diagonale **AC** e' lunga $12a\sqrt{2}$.

Determinare la misura del perimetro e l'area del quadrilatero ABCD.

Elisabetta Poli

RISOLUZIONE

di Giuseppe Guarato di Valdagno

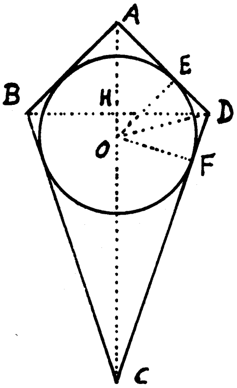
Si può anzitutto osservare che essendo AB = AD ed essendo AOC la bisettrice di $B\hat{A}D$, risulta **CB = CD** e quindi che AC e' l'asse di **BD**.

Dai dati risulta:

$\overline{AC} = 12r\sqrt{2}$; $\overline{OE} = \overline{AE} = 2r$;

$\overline{AO} = 2r\sqrt{2}$; $\overline{OC} = \overline{AC} - \overline{AO} = 10r\sqrt{2}$;

$\overline{CF} = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{OF}^2} = \sqrt{(10r\sqrt{2})^2 - 4r^2} = 14r.$ [*]



Posto $DE = DF = x$, dal triangolo ADC, per il teorema della bisettrice, si ha:

$\overline{AD} : \overline{DC} = \overline{AO} : \overline{OC}$ ossia

$(2r+x):(14r+x) = 2r\sqrt{2} : 10r\sqrt{2} = 1:5$

da cui $5(2r+x) = 14r + x$; $\rightarrow$ $\boxed{x = r}$

Ne segue $\overline{AB} = \overline{AD} = 3r$; $\overline{CB} = \overline{CD} = 15r$;

$BD = 2r\sqrt{2}$ ed infine Perimetro $ABCD = 2(AD+CD) = \ldots = 36r$.

Area $ABCD = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2}(3r\sqrt{2} \cdot 12r\sqrt{2}) = 36r^2$.

RISOLUZIONE di Alessandro Pasciuto del "XIV" Lic. Sc. di ROMA .... Come la precedente fino al segno [*].

Posto $\overline{DE} = \overline{DF} = x$ e detta H la proiezione di D su AC, si ha $\overline{AH} = \frac{\overline{AD}}{\sqrt{2}} = \frac{2r+x}{\sqrt{2}}$. Inoltre, dal triangolo ADC per il teorema di Pitagora "generalizzato" si ha $\overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AH}$,

e sostituendo si ha l'equazione:

$$(14r + x)^2 = (12r\sqrt{2})^2 + (2r+x)^2 - 2 \cdot 12r\sqrt{2} \cdot \frac{2r+x}{\sqrt{2}};$$

da cui $\boxed{x = r}$ ... *continua come sopra.*

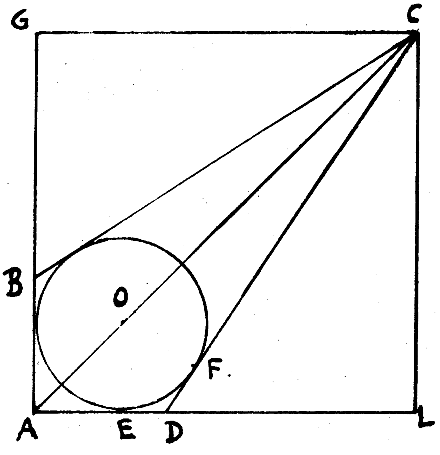
RISOLUZIONE della Proponente, dell'Ist. Magistr. "Pascoli" di FIRENZE

...Come la prima risoluzione fino al segno [*]. Posto $\overline{DE} = \overline{DF} = x$ e costruito il quadrato AGCL avente la diagonale $\overline{AC} = 12r\sqrt{2}$, si ha

$\overline{AL} = \overline{CL} = 12r$; $\overline{DL} = (10r - x)$

Inoltre, dal triangolo CDL, per il teorema di Pitagora, si ha:

[CONTINUA A PAG. 25]



PROPRIETA' NOTEVOLI dei POLINOMI INTERI (*)

di Pietro Castaldo

1. In questa nota ci proponiamo di richiamare l'attenzione dei Giovani su alcune proprietà che riguardano i polinomi interi ad una indeterminata, cioè i polinomi della forma

$$a = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \ ,$$

dove $n \in N_{-0}$ e $a_i \in R$, essendo N_{-0} l'insieme dei numeri naturali, ZERO ESCLUSO, R il corpo dei numeri reali e

$$a_i \in \{ a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \} .$$

Premettiamo alcune nozioni generali che ci saranno utili nel seguito. Dato un polinomio

$$a = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$$

di grado n in x, si dice *valore numerico* di a per $x = \alpha$ e si indica con $a(\alpha)$, il valore che si ottiene sostituendo nel polinomio α ad x. Così, se

$$a = (1, -2, 3, -4, 1) \qquad \text{e} \qquad x = 2$$

si ha

$$a(2) = 1 - 2(2) + 3(2)^2 - 4(2)^3 + (2)^4 = -7 .$$

E' chiaro che facendo variare il valore di x varia il valore numerico del polinomio; per tale motivo si dice che il polinomio a è una ***funzione*** di x e si scrive $a = f(x)$, o più semplicemente $a = a(x)$.

Dato il polinomio a di grado n in x, se

$$\forall a \ : \ a(x) = 0$$

si dice che il polinomio è *identicamente nullo* e si scrive $a \equiv 0$.

Due polinomi a, b, nell'indeterminata x, si dicono *identici* se

(*) Lo studioso tenga presente la precedente nota « STRUTTURA DELL' INSIEME DEI POLINOMI AD UNA INDETERMINATA » pubblicata su ANGOLO ACUTO - IV, 3 - Maggio-Giugno - 1973.

acquistano uguale valore numerico qualunque sia il valore attribuito ad x. Cioè, se

$$\forall a \quad : \quad a(x) = b(x)$$

diremo che i due polinomi sono identici e scriveremo $a \equiv b$.

2\. P_1. « *Se un polinomio intero è identicamente nullo, tutti i suoi coefficienti debbono essere identicamenti nulli* ».

Dimostriamo la proprietà enunciata ricorrendo al *principio di induzione*, cioè al seguente principio : « Una proprietà è vera per ogni numero naturale n, se sono verificate due condizioni; a) la proprietà è vera per $n=1$;
b) supposto che la proprietà è vera per $n=K$, si dimostra che essa è vera pure per $n = K+1$ ».

Consideriamo un polinomio di primo grado e supponiamo che sia identicamente nullo, cioè che si abbia

$$(1) \qquad \forall a \quad : \quad a_0 + a_1 x \equiv 0 .$$

La (1) è vera qualunque sia x, in particolare sarà vera per $x = \alpha$ e per $x = \beta$, con $\alpha \neq \beta$, onde si ha:

$$a_0 + a_1\alpha = 0 \quad ; \quad a_0 + a_1\beta = 0$$

da cui per sottrazione si ricava

$$a_1(\alpha - \beta) = 0$$

e siccome $\alpha \neq \beta \implies \alpha - \beta \neq 0$, risulta $a_1 = 0$ Ma

$$(a_1 = 0 \quad e \quad a_0 + a_1\alpha = 0) \implies a_0 = 0 ,$$

dunque se il polinomio (1) è identicamente nullo, sono nulli i suoi coefficienti . La proprietà è vera per $n = 1$.

Supponiamo che la proprietà sia vera per $n = K$ e dimostriamola per $n = K+1$. Ammettiamo che si abbia

$$(2) \qquad \forall x \ : \ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{K-1} x^{K-1} + a_K x^K + a_{K+1} x^{K+1} \equiv 0,$$

allora il polinomio si annulla qualunque sia il valore di x e per conseguenza si annulla pure per $x = hx$, dove h è un numero naturale non inferiore a 2. Effettuando la sostituzione si ha:

$$(3) \quad a_0 + h a_1 x + h^2 a_2 x^2 + \cdots + h^{K-1} a_{K-1} x^{K-1} + h^K a_K x^K + h^{K+1} a_{K+1} x^{K+1} \equiv 0;$$

d'altra parte moltiplicando tutti i termini di (2) per h^{K+1} , si ottiene

(4) $h^{k+1}a_0 + h^{k+1}a_1 x + h^{k+1}a_2 x^2 + \dots + h^{k+1}a_{k-1}x^{k-1} + h^{k+1}a_k x^k + h^{k+1}a_{k+1}x^{k+1} \equiv 0.$

Sottraendo membro a membro la (3) dalla (4), si ha:

(5) $a_0(h^{k+1}-1) + a_1(h^{k+1}-h)x + a_2(h^{k+1}-h^2)x^2 + \dots + a_{k-1}(h^{k+1}-h^{k-1})x^{k-1} + a_k(h^{k+1}-h^k)x^k \equiv 0,$

cioè, si trova un polinomio intero di grado K in x identicamente nullo. Ma abbiamo supposto che la proprietà è vera per $n=K$, onde i coefficienti del polinomio (5) sono tutti nulli, ossia si ha

$a_0(h^{k+1}-1)=0$; $a_1(h^{k+1}-h)=0$; .... ; $a_{k-1}(h^{k+1}-h^{k-1})=0$; $a_k(h^{k+1}-h^k)=0$.

Ora, le differenze in parentesi sono tutte diverse da zero, quindi

$a_0=0$; $a_1=0$; $a_2=0$; ..... ; $a_{k-1}=0$; $a_k=0$

e la (2) si riduce a

$$\forall x \quad : \quad a_{k+1}x^{k+1} \equiv 0$$

la quale essendo vera per qualunque x, è vera pure per $x=1$ e quindi dà $a_{k+1}=0$.

Dunque, ammesso che il polinomio (2) sia identicamente nullo, risultano nulli tutti i suoi coefficienti. La proprietà è vera pure per $n=K+1$, e cioè la proprietà è vera in generale, perchè sono verificate le condizioni dell'induzione.

3. P_2 - « *Condizione necessaria e sufficiente affinchè due polinomi interi di grado n in x siano identici, è che i coefficienti dei termini simili nei due polinomi siano identici* ». (PRINCIPIO DI IDENTITA' DEI POLINOMI)

Siano dati i polinomi interi di grado n in x

$$a = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$$
$$b = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n)$$

e supponiamo che siano identici, cioè che si abbia $a \equiv b$.

Sottraendo b da a si ottiene:

$a-b = (a_0-b_0, a_1-b_1, a_2-b_2, \dots, a_{n-1}-b_{n-1}, a_n-b_n) \equiv 0$.

Ma per la prima proprietà se un polinomio è identicamente nullo, sono nulli tutti i suoi coefficienti, onde si ha:

$a_0-b_0=0$; $a_1-b_1=0$; $a_2-b_2=0$; ... ; $a_{n-1}-b_{n-1}=0$; $a_n-b_n=0$

e per conseguenza:

$$a_0 = b_0 \ ; \quad a_1 = b_1 \ ; \quad a_2 = b_2 \ ; \ \dots ; \ a_{n-1} = b_{n-1} \ ; \quad a_n = b_n \ ;$$

e la condizione è necessaria.

Supponiamo ora che per i due polinomi a, b si abbia

$$\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \ : \ a_i = b_i \ ;$$

allora i termini simili nei due polinomi sono tutti uguali e si ha $a \equiv b$, cioè i due polinomi sono identici. E la condizione è sufficiente.

***

Vediamo un'applicazione delle cose dette, risolvendo il problema:

« *Dati i due polinomi*

$$a = n + mx^2 + x^4 \ ; \quad b = 5 + 2x + x^2$$

determinare m *ed* n *in modo che il primo sia divisibile per il secondo* ».

Osserviamo che si ha:

$$a = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4), \text{ con } a_0 = n; a_1 = 0; a_2 = m; a_3 = 0; a_4 = 1;$$
$$b = (b_0, b_1, b_2) \qquad \text{con } b_0 = 5 \ ; \ b_1 = 2 \ ; \ b_2 = 1 \ .$$

Inoltre se $b \mid a$ allora $\exists!\, q \ : \ a \equiv bq$ (*)

dove q è il polinomio quoziente della divisione euclidea di a per b.

Essendo a di 4° grado e b di 2° grado, q sarà di 2° grado e avrà il coefficiente del termine di 2° grado uguale a 1, in quanto $a_4 = b_2 = 1$. Quindi possiamo porre

$$q = (q_0, q_1, q_2) = (q_0, q_1, 1) = q_0 + q_1 x + x^2$$

Moltiplicando b per q, si ha

$$bq = (5 + 2x + x^2)(q_0 + q_1 x + x^2),$$

ossia

$$bq = 5q_0 + (2q_0 + 5q_1)x + (q_0 + 2q_1 + 5)x^2 + (q_1 + 2)x^3 + x^4,$$

(*) Ricordiamo che il *quantificatore esistenziale* $\exists!$ è simbolo di ESISTENZA E UNICITÀ.

cioè $\quad bq = c = (c_0, c_1, c_2, c_3, c_4)$,

con $\quad c_0 = 5q_0$; $c_1 = 2q_0 + 5q_1$; $c_2 = q_0 + 2q_1 + 5$; $c_3 = q_1 + 2$; $c_4 = 1$.

Ma c deve essere identico ad a e ciò avviene se e solo se i coefficienti dei termini simili sono uguali, onde si deve avere

$$(6)\begin{cases} 5q_0 = a_0 = n ; \\ 2q_0 + 5q_1 = a_1 = 0 ; \\ q_0 + 2q_1 + 5 = a_2 = m ; \\ q_1 + 2 = a_3 = 0 \end{cases}$$

Dalla quarta delle (6) si ricava $q_1 = -2$ che sostituito nella seconda dà $q_0 = 5$; e allora dalla prima si ricava $n = 25$ e dalla terza $m = 6$.

Dunque, affinchè a sia divisibile per b si deve avere $n = 25$; $m = 6$. In quanto al quoziente q si ha:

$$q = (5, -2, 1) = 5 - 2x + x^2 .$$

4. Dato il polinomio di grado n in x

$$a(x) = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n),$$

molto importanti sono i valori $a(0)$, $a(1)$, $a(-1)$ che a acquista ponendo rispettivamente $x=0$; $x=1$; $x=-1$. Effettuando le sostituzioni, si ha

1) $x = 0 \Rightarrow a(0) = a_0$, perchè si annullano tutti i termini con la x ; onde:

P_3 - *« In un polinomio intero a di grado n in x, il valore $a(0)$ è dato dal termine noto».*

2) $x = 1 \Rightarrow a(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$; onde:

P_4 - *« In un polinomio intero di grado n in x il valore $a(1)$ è dato dalla somma dei suoi coefficienti».*

3) $x = -1 \Rightarrow a(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n$(▲); onde:

P_5 - *« In un polinomio intero di grado n in x il valo-*

(▲) La notazione $(-1)^n a_n$ sta ad indicare che il termine a_n è preceduto dal segno (+) se n è pari, dal segno (−) se n è dispari.

re $a(-1)$ è dato dalla differenza tra la somma dei coefficienti dei termini di grado pari e la somma dei coefficienti dei termini di grado dispari».

Così, dato il polinomio

$$\alpha = (-6, 4, -3, -7, 2, 5) = -6 + 4x - 3x^2 - 7x^3 + 2x^4 + 5x^5$$

si ha rispettivamente:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad a(0) = -6;$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad a(1) = -6 + 4 - 3 - 7 + 2 + 5 = -5;$$

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad a(-1) = (-6 - 3 + 2) - (4 - 7 + 5) = -9.$$

5- E' noto che dividendo un polinomio intero a di grado n in x per un binomio del tipo $x-h$, si ottiene un polinomio quoziente di grado $n-1$ in x e un resto r, cioè si ha:

$$(7) \qquad a(x) = (x-h) \cdot q(x) + r.$$

Ponendo in (7) $x = h$, si ottiene $\alpha(h) = r$, onde:

P_6 - *« Il resto della divisione di un polinomio intero a di grado n in x per il binomio $x-h$, è dato da $a(h)$, cioè dal valore che assume a quando in esso si pone $x = h$ ».*

ESEMPI - 1) Se $a(x) = (-4, 7, 2, -3, 1)$; $x-h = (-3, 1)$, si ha $r = \text{rest}(a, x-h) = a(3) = 35$.

2) Se $a = (10, 0, -7, 0, -4, 0, 4)$; $x-h = (2, 1)$, avendosi $x-h = 2 + x = x - (-2)$, si ha

$$r = \text{rest}(a, x+2) = \alpha(-2) = 10 - 7(-2)^2 - 4(-2)^4 + 4(-2)^6 = 174.$$

6- Da quanto sopra, segue:

P_7 - *« Se in un polinomio manca il termine noto, cioè $a_0 = 0$, il polinomio è divisibile per x ».*

Così, il polinomio $a = (0, 1, -3, 0, 1) = x - 3x^2 + x^4$ è divisibile per x, perchè $\text{rest}(a, x) = a(0) = 0$.

P_8 - *« Se la somma dei coefficienti di un polinomio è nulla, il polinomio è divisibile per $x-1$ ».*

Così, nel polinomio

$$a = (3, -2, 4, -1, -4) = 3 - 2x + 4x^2 - x^3 - 4x^4$$

si ha

$$a(1) = \text{rest}(a,\ x-1) = 3 - 2 + 4 - 1 - 4 = 0$$

onde

$$(x-1) \mid a .$$

P_9 - *« Se in un polinomio la differenza fra la somma dei coefficienti dei termini di grado pari e la somma dei coefficienti dei termini di grado dispari è nulla, il polinomio è divisibile per $x+1$ ».*

Così, nel polinomio

$$a = (5, 4, 2, -3, -3, 3) = 5 + 4x + 2x^2 - 3x^3 - 3x^4 + 3x^5$$

si ha

$$a(-1) = (5 + 2 - 3) - (4 - 3 + 3) = 0$$

cioè

$$\text{rest}(a,\ x+1) = 0 \qquad \text{onde} \qquad (x+1) \mid a .$$

RISPOSTA a "Per FINIRE"

A pag. 30 del fascicolo 4-5 anno IV - 1973 abbiamo scritto:

«Una persona scrivendo a macchina usava il nastro a due colori. Scriveva tutto in nero, tranne la parola FINE, in rosso, al termine di ogni capitolo. Una volta notò che tale parola si vedeva scritta in nero sul nastro rosso (perchè i caratteri erano sporchi di nero). Però guardando il nastro alla fine del lavoro, vide che a volte era scritto FINE e altre volte ENIF».

(dal "Saper vedere in Matematica" di B. De Finetti).

RISPOSTA di Giuseppe Guarato:

-Tutto dipende dal senso di scorrimento del nastro che, come è noto, può muoversi da destra verso sinistra o viceversa. Si vedrà scritto "FINE" quando il nastro scorre da destra verso sinistra ed "ENIF" quando il nastro scorre da sinistra verso destra.

ERRATA - CORRIGE

Fasc. V - 1 pag. 21

ESEMPIO: ANNO 1974

$\boxed{}$ correzioni da riportare

$A = 17$

$B = 2$

$C = 0$

$m = 24$ (*)

$D = \boxed{17}$

$n = 5$ (*)

$E = \boxed{6}$

$[22 + \boxed{17 + 6} = 45 > 31]$

$\boxed{17 + 6} - 9 = 14$ (APRILE)

La posta degli Angolisti

Il Sig. Guido Gatti di Cremona ci ha inviato la seguente interessante questione con la relativa risoluzione:

Con riferimento all'articolo della prof. Lucia Bernardi di Siena, apparso nel fasc. 4/5 - IV - 1973 di ANGOLO ACUTO, nel quale si parla dell'*Ultimo teorema di FERMAT*, che afferma la « non esistenza» di terne di numeri interi A, B, C, tali che sia

$$A^n + B^n = C^n \quad \text{con} \quad n = (3, 4, 5, \dots),$$

è forse interessante notare che, per $n = 3$, esistono quaterne di numeri interi A, B, C, D tali che sia

$$A^3 + B^3 + C^3 = D^3.$$

Mi auguro che questa questione possa costituire motivo di ricerca e di interesse per gli Angolisti. Comunque invio intanto una sintesi della mia risoluzione:

« Posto $M = a^3 - 3p^2b + 3pb^2 + b^3$ (I) e $p - b = x$ (II)

si ha $M - (p-b)^3 = \dots = a^3 + b^3$ da cui

$M = a^3 + b^3 + x^3$ (III). Posto anche:

$M = \left(a + \dfrac{b^2}{a^2}p\right)^3$ (IV)

e tenendo conto della (I) e della (II) si ricava:

$$p = \dots = \frac{3a^3b}{a^3 - b^3} \quad (V) \quad ; \quad x = \dots = \frac{b(2a^3 + b^3)}{a^3 - b^3} \quad (VI);$$

e per la (IV)

$$M = \frac{a(a^3 + 2b^3)}{a^3 - b^3} \quad (VII)$$

La (III) quindi diventa:

$$a^3 + b^3 + \frac{b^3(2a^3+b^3)^3}{(a^3-b^3)^3} = \frac{a^3(a^3+2b^3)^3}{(a^3-b^3)^3}, \quad (VIII)$$

ovvero $a^3(a^3-b^3)^3 + b^3(a^3-b^3)^3 + b^3(2a^3+b^3)^3 = a^3(a^3+2b^3)^3$; (IX)

da cui $A = a(a^3-b^3)$; $B = b(a^3-b^3)$; $C = b(2a^3+b^3)$; $D = a(a^3+2b^3)$. (X)

Posto, ad esempio, $a = 2$, $b = 1$ la (IX) fornisce:

$$14^3 + 7^3 + 17^3 = 20^3.$$
$$2744 + 343 + 4913 = 8000.$$

La soluzione di questo problema permette di risolvere il problema più generale di individuare un numero dispari di cubi la cui somma sia ancora un cubo. Infatti se

$A^3 + B^3 + C^3 = D^3$ e $D^3 + E^3 + F^3 = G^3$, si ha anche

$$A^3 + B^3 + C^3 + E^3 + F^3 = G^3$$

Cosicchè dalla somma di 3 cubi, si passa alla somma di 5 cubi; da 5 a 7, e così via ».

NOTA. E' opportuno osservare che il Sig. Bruno GIORDANO di Reggio Calabria nella ricerca delle quaterne di RAMANUJAN del tipo $A^3 + B^3 = C^3 + D^3$ [vedi ANGOLO ACUTO, fasc. 1-V, 1974 pag. 24-29] ha trovato anche delle quaterne del tipo

$$A^3 + B^3 + C^3 = D^3$$

Ha trovato infatti

$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3 = 216$; $1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3 = 729$;

$3^3 + 10^3 + 18^3 = 19^3 = 6859$; $13^3 + 15^3 + 27^3 = 29^3 = 24389$;

$2^3 + 17^3 + 40^3 = 41^3 = 68921$; $31^3 + 33^3 + 72^3 = 74^3 = 438976$.

$25^3 + 31^3 + 86^3 = 88^3 = 681472$; ....

A questo punto formuliamo una domanda:

« *Quali valori bisogna dare ad a e b perchè le* (X) *forniscano, ad esempio, la prima delle quaterne sopraindicate cioè* $A = 3$, $B = 4$, $C = 5$, $D = 6$? »

Se si prova a porre $a = 2 : \sqrt[4]{3}$ e $b = -1 : \sqrt[4]{3}$ si ha:

$A = a(a^3 - b^3) = \dots = 6$, $B = b(a^3 - b^3) = \dots = -3$,

$C = b(2a^3 + b^3) = \dots = -5$, $D = a(a^3 + 2b^3) = \dots = 4$,

da cui $A^3 + B^3 + C^3 = D^4$,

cioè $6^3 - 5^3 + 3^3 = 4^3$,

ed anche $6^3 = 5^3 + 3^3 + 4^3$.

Ed ora la parola agli Angolisti.

CONTINUAZIONE da pag. 16 - QUESTIONE 136.

$\overline{CD}^2 = \overline{DL}^2 + \overline{CL}^2$ ossia sostituendo:

$(14r + x)^2 = (10r - x)^2 + (12r)^2$, da cui, sviluppando e riducendo, $\boxed{x = r}$ .... (continua come nella prima risoluzione).

RUBRICA: «INTERMEDIARIO» DOMANDA 2.

Si chiede di dimostrare se la seguente affermazione è VERA o FALSA: Se due numeri interi sono "primi con 7", la som- dei loro cubi oppure la differenza dei loro cubi è multipla di 7.

RISPOSTA di Francesco Fogliotti di Genova-Sampierdarena.

L'affermazione è VERA e si può dimostrare con le proprietà delle congruenze:

Poiché i due numeri interi sono primi con 7, la classe dei resti (mod. 7) è

	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$

e i loro cubi sono rispettivamente

spettivamente	1	8	27	64	125	216
cioè	+1	+1	−1	+1	−1	−1 (mod. 7).

Pertanto o la somma o la differenza di ognuno per ciascuno degli altri è 0 (zero). Cioè

$$\text{o} \quad (a^3+b^3) \equiv 0 \pmod{7} \quad \text{o} \quad (a^3-b^3) \equiv 0 \pmod{7},$$

con a e b primi con 7.

RISPOSTA di Alfonso La Paglia di Biella.

L'affermazione è VERA. Infatti se a, b sono primi con 7, deve essere

$$a = 7q + r \;;\; b = 7q' + r' \qquad [1 \leq r, r' \leq 6]$$

1) Se i resti sono uguali,

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) = 7(q-q')(a^2+ab+b^2)$$

è multiplo di 7.

2) Se $r \neq r'$ si ha

$$a^3 = 343q^3 + 147q^2r + 21qr^2 + r^3 = 7m + r^3;$$
$$b^3 = 343q'^3 + 147q'^2r' + 21q'r'^2 + r'^3 = 7m' + r'^3.$$

Sommando e sottraendo si ha

$$a^3 + b^3 = 7(m+m') + (r^3 + r'^3) \;;$$
$$a^3 - b^3 = 7(m-m') + (r^3 - r'^3).$$

Ora i resti possono essere soltanto

	1	2	3	4	5	6
e i loro cubi	1	8	27	64	125	216

Indagando sulle 15 combinazioni di tali cubi a due a due, si constata che in ogni caso
o la loro somma è multipla di 7 (e quindi anche a^3+b^3)
o la loro differenza è multipla di 7. (e quindi anche a^3-b^3)
Precisando:
Se le coppie di resti disuguali sono

1,3 ; 1,5 ; 1,6 ; 2,3 ; 2,5 ; 2,6 ; 3,4 ; 4,5 ; 4,6;

risulta a^3+b^3 multiplo di 7;
se le coppie di resti disuguali sono

1,2; 1,4 ; 2,4 ; 3,5 ; 3,6 ; 5,6

risulta a^3-b^3 multiplo di 7.

NOTA. Per evitare la duplicità del testo (la somma o la differenza) si può unificare così:

Se due numeri interi qualunque a, b sono primi con 7, la differenza a^6-b^6 è divisibile per 7.

ESTENSIONE. In modo analogo si può dimostrare che «*Se due numeri interi a, b sono primi con 11, la differenza $a^{10}-b^{10}$ è divisibile per 11*».

DOMANDA: Esistono altre estensioni?
Per esempio:
«*Se n è un numero primo, e se a, b, sono primi con n, la differenza $a^{n-1}-b^{n-1}$ è divisibile per n?*»
-VERA O FALSA?- Nei due casi sopra considerati, cioè per $n=7$ e per $n=11$ è VERA. E per altri casi, per esempio $n=13$; $n=17$? e in generale?

CURIOSITÀ NUMERICHE

I seguenti prodotti hanno le stesse cifre dei fattori:

21 × 87 = 1827 ; 15 × 93 = 1395 ; 27 × 81 = 2187;
35 × 41 = 1435 . Ne esistono altri?

RISOLUTORI delle QUESTIONI	129	130	131	132	133	134	135	136
AGROSI ANIELLO - DISO (LE)	●	●	●	-	●	●	-	●
BATIC A. MARIA - L. Sc. Sloveno - TRIESTE	-	-	-	-	-	●	-	-
BINI ROBERTO - L. Sc. "Copernico" PRATO	-	-	-	-	-	-	-	●
BIGI MAURO - Sc. Med. "Carducci" FIRENZE	●	-	●	-	-	●	-	●
BRANCACCIO ANNA - L. Sc. "Diaz" CASERTA	-	●	-	-	-	-	-	-
BUSO CLAUDIO - L. Sc. "I. Nievo" PADOVA	●	●	●	-	-	●	●	-
CAGNOLATI FRANCESCO - L. Sc. - REGGIO EM.	●	-	-	-	●	●	-	-
CATERINO ALESSANDRO - L. Sc - MANFREDONIA (Fg)	●	●	-	-	-	-	-	-
D'AMBROSIO GAETANO - L. Sc. BISCEGLIE (Ba)	●	●	●	●	●	●	●	●
DE FERRA ENRICO - L. Cl. "Dante" TRIESTE	-	-	-	-	-	●	-	-
FELICIAN LEONARDO - L. Cl. "Dante" TRIESTE	●	●	●	●	●	●	●	●
FELICIAN LORENZO - Sc. Med. "De Tommasini" TS	-	-	-	●	-	●	-	-
FOGLIOTTI FRANCESCO - GENOVA - SAMPIERDARENA	●	●	●	●	●	●	●	●
GEROLDI ANNA CHIARA - L. Sc. CREMONA	-	-	-	●	-	●	-	-
GUARATO GIUSEPPE - VALDAGNO	●	●	●	●	●	●	●	●
GUERRA LUCIO - L. Sc. - MANFREDONIA - (Fg)	-	-	●	-	●	●	●	-
HONSELL FURIO - L. Sc. "Galilei" TRIESTE	●	-	●	●	-	●	●	●
IMBROGNO GIULIANA - Ist. Magistr. COSENZA	●	-	-	-	-	-	-	-
JANNELLI ENRICO - L. Sc. "Fermi" BARI	●	●	●	-	●	●	●	●
LUCARDESI PAOLO - L. Sc. "Lussana" BERGAMO	●	●	-	-	●	●	-	-
MESSIDORO M. TERESA - L. Sc. "Einstein" TORINO	-	-	-	-	-	-	-	●
MORBIDELLI LORENZO - L. Sc. AREZZO	-	-	-	-	-	-	-	●
PASCIUTO SANDRO - "XIV" L. Sc. ROMA	●	●	●	-	-	-	-	-
PERFETTO CLAUDIO - L. Sc. "Diaz" COSENZA	●	●	-	-	-	-	-	-
ROSELLI WALTER - L. Sc. ROVIGO	●	●	-	-	-	-	-	●
TERRANOVA DIEGO - L. Sc. "Oberdan" TRIESTE	-	-	-	-	-	-	-	●
TORRE ACHILLE - L. Sc. "Diaz" OTTAVIANO (Na)	-	-	-	-	-	●	-	-
TREBBI GIANNI - L. Sc. "Galilei" TRIESTE	●	-	-	-	●	-	-	-
VIDALI CRISTINA - L. Cl. "Dante" TRIESTE	-	-	-	-	-	-	-	●
VIOLA MADDALENA - L. Cl. "Dante" TRIESTE	-	-	-	-	-	●	-	-
VIOLA PAOLO - L. Cl. "Dante" TRIESTE	●	●	●	●	-	-	●	●
ZACCARINI M. OLGA - L. Sc. REGGIO EMILIA	●	-	-	-	-	-	-	-
DEL BELLO SANDRO - L. Sc. "Pacinotti" LA SPEZIA	●	●	●	●	-	-	-	-

Amici sostenitori di Angolo acuto -

Prof. ALBANESE MARIA - FIRENZE
Prof. BERNARDI MARCO - BRESCIA
Prof. BIANCHI NEREO - PAVIA
Prof. CHIEPPA LUIGI - MINERVINO MURGE
Prof. CONTIGGIANI ANNUNZIATA - CIVITANOVA MARCHE
Prof. FERRANDINA TOMMASO - MATERA
Prof. GINATEMPO NICOLA - MESSINA
Prof. LIVERANI TEBALDO - FIRENZE
Prof. LANZA PASQUALE - CAMPOBASSO
Prof. OTTAVIANI CARLOFELICE - FIRENZE
Dott. PRAMPOLINI COSTANTE - REGGIO E.
Prof. PROCISSI ANGELO - FIRENZE
Prof. RICCI SERGIO - FIRENZE
Ing. ROSSETTI DUCCIO - ROMA
Prof. SIGNORINI MARIA - FIRENZE
Prof. SESTINI GIORGIO - FIRENZE
Prof. SERRA MARIO - TORINO
Prof. TIBERI GAETANINA - ROMA
Prof. VITI CINTI PAOLA - FIRENZE
Prof. VINCELLI ANTONIO - CASACALENDA (CB)

PALESTRA delle GARE

RISULTATI della IV GARA - Anno scolastico 1972-73.

QUESTIONI 119 - 143.

Ecco l'elenco dei Giovani che si sono distinti per il numero e per l'originalità delle risoluzioni inviate:

FELICIAN Lorenzo - L. Cl. "Alighieri" TRIESTE
Risoluzioni inviate 25. Premio L. 5000.

D'AMBROSIO Gaetano - L. Sc. "L. da Vinci" BISCEGLIE (BA)
Risoluzioni inviate 22. Premio L. 3000.

JANNELLI Enrico - L. Sc. "E. Fermi" BARI
Risoluzioni inviate 20 - Premio L. 2000

VIOLA Paolo - L. Cl. "Alighieri" TRIESTE	(Risol. 19)
PASCIUTO Alessandro - "XIV" L. Sc. ROMA	(Risol. 15)
HONSELL Furio - L. Sc. "Galilei" TRIESTE	(Risol. 14)
BUSO Claudio - L. Sc. "Nievo" PADOVA	(Risol. 10)
TREBBI Gianni - L. Sc. "Galilei" TRIESTE	(Risol. 9)
DEL BELLO Sandro - L. Sc. "Pacinotti" LA SPEZIA	(Risol. 9)
ROSELLI Walter - L. Sc. "Paleocapa" ROVIGO	(Risol. 8)
TERRANOVA Diego - L. Sc. "Oberdan" TRIESTE	(Risol. 8)
BIGI Mauro - Sc. Med. "Carducci" FIRENZE	(Risol. 6)
CAGNOLATI Francesco - L. Sc. "Spallanzani" REGGIO E.	(Risol. 6)
D'AMBROSIO Lucia - Sc. Media - BISCEGLIE (BA)	(Risol 6)
LUCARDESI Paolo - L. Sc. "Lussana" BERGAMO	(Risol. 6)

Un particolare elogio ai bravissimi Angolisti:

Dott. Aniello AGROSI - DISO; Prof. Francesco FOGLIOTTI - GENOVA; M°. Giuseppe GUARATO - VALDAGNO; Prof. Alfonso LA PAGLIA - BIELLA e Sig. Giulio MOSCA di TERAMO che ci hanno inviato le risoluzioni di tutte (o quasi tutte) le questioni proposte, con interessanti generalizzazioni.

SPEDIZIONE IN ABBONAMENTO POSTALE GRUPPO IV

Coloro che trattengono ANGOLO ACUTO
sono pregati di inviare con sollecitudine
la loro quota di abbonamento

PER FAVORE NON CESTINATE

Se questo periodico non vi interessa, vi preghiamo
di rispedire al mittente le copie ricevute,
in busta affrancata come stampe.
ANGOLO ACUTO - Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

ANGOLISTI, se volete che ANGOLO ACUTO continui la sua fatica migliorandosi, dovete aiutarci a diffonderlo sempre più.

I GENITORI sottoscrivano un abbonamento a favore dei propri figli appassionati di Matematica.

LE CASSE SCOLASTICHE degli Istituti Tecnici e Professionali, dei Licei Classici, Scientifici e Magistrali e delle Scuole Medie assegnino un abbonamento premio agli Alunni che hanno conseguito 8 o 7 in Matematica.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 gennaio 1970
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso*
Stampato dalla Kappaesse - Firenze

Associato all'USPI
Unione Stampa Periodica Italiana