ANNO V - 1974

4

Luglio - agosto

L'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

Periodico bimestrale
a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

spedizione in abb. postale - gruppo IV
conto corrente postale. 5/27919

Abbonamenti per il 1974

Studenti	L.	1600
Professori e Scuole	L.	2000
Sostenitori	L.	3000

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio.

LA PALESTRA DELLE GARE

AVVERTENZE IMPORTANTI PER I RISOLUTORI *Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte. Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale. Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età. Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad*

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE

entro il 10 - XI - 1974

Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori. Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.

QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 167

TEOREMA DI EULERO

In ogni triangolo ABC, la distanza $d = OI$ fra il circocentro O e l'incentro I è data dalla relazione:

$$d^2 = R(R-2r),$$

in cui R è il raggio del cerchio circoscritto ed r il raggio del cerchio inscritto.

(già proposta a pag. 4 del fascicolo precedente, con due errori di stampa).

QUESTIONE 168

Senza effettuare la scomposizione in fattori, servendosi di una tavola dei quadrati dei numeri naturali, determinare i fattori primi del numero 29999.

QUESTIONE 169

Maturità scientifica 1974

I QUESITO.

Assegnata la funzione

$$y = \operatorname{sen} x + a \cos x + b$$
$$(-\pi \leq x \leq \pi)$$

si determinino i valori di a e di b in modo che ammetta un massimo relativo $y = 0$ nel punto $x = \frac{\pi}{6}$, e si disegni la curva rappresentativa della funzione ottenuta.

Condotta la retta tangente alla curva nel punto A di ascissa $x = 0$, e tracciata la retta $x = \frac{\pi}{2}$, si calcoli l'area della regione piana limitata da tale retta, dalla tangente in A e dalla curva.

QUESTIONE 170

Maturità scientifica 1974

II QUESITO

Sono assegnate due circonferenze C e C' esterne fra loro e rispettivamente di centri O e O' e raggi r ed $\frac{r}{2}$.

Sul segmento $\overline{OO'} = a$ si prenda un generico punto P non interno alle due circonferenze e si conducano da esso le rette tangenti a C e C'. Gli archi aventi per estremi i punti di contatto ed intersecanti il segmento OO' generano, in una rotazione di 180° attorno ad OO', due calotte sferiche.

Posto $\overline{OP} = x$, si determini la posizione di P in corrispondenza della quale risulta massima la somma delle aree delle due calotte.

QUESTIONE 171

Maturità scientifica 1974

III QUESITO

Si studi la funzione

$$y = \frac{x^3}{2x^2-1}$$

e se ne disegni il grafico.

Presi sulla curva i punti A e B rispettivamente di ascissa

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad e \quad \frac{\sqrt{3}}{3},$$

si determinino i punti dell'arco AB nei quali la tangente alla curva è parallela alla retta AB.

Si espongano brevemente gli elementi della teoria per il calcolo degli asintoti di una curva di equazione $y = f(x)$.

QUESTIONE 172

Maturità magistrale SESSIONE SUPPLETIVA 1969

Tre punti A, B, C sono allineati e si ha: $AB = 2a$, $BC = a$, $AC = 3a$. In uno dei semipiani aventi per origine la semiretta AC, si costruiscano i triangoli equilateri ABD, BCE.

1) Si dimostri che il triangolo BDE è rettangolo.

2) Si calcoli il perimetro e l'area del quadrilatero ACED.

3) Sulla perpendicolare per E al piano del quadrilatero si prenda il segmento EV di lunghezza a e si calcoli l'area della superficie totale della piramide di vertice V e di base ACED.

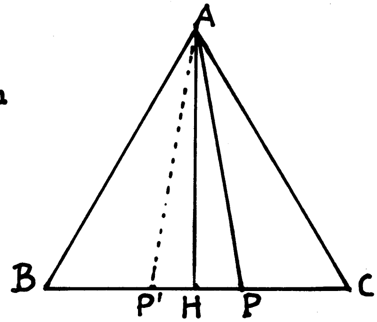
QUESTIONE 173

In ogni triangolo ABC la bisettrice di un angolo, per esempio di $B\hat{A}C$, è anche bisettrice dell'angolo formato dal diametro del cerchio circoscritto passante per A e dalla altezza uscente dal vertice considerato A.

MATURITÀ MAGISTRALE 1974

Dato il triangolo equilatero ABC di lato $2a$, si prenda internamente al lato BC il punto P in modo che la differenza fra il solido generato dal triangolo APB in una rotazione completa attorno alla retta BC e il solido generato dal triangolo APC nella stessa rotazione sia equivalente alla sfera di raggio uguale a quello della circonferenza inscritta nel triangolo ABC.

RISOLUZIONE



Si supponga il problema risolto e sia ABC il triangolo equilatero dato,

$AB = BC = CA = 2a$;

H il punto medio di BC e proiezione di A su BC;

P il punto richiesto internamente al segmento HC ($BP > PC$).

Sia P' il punto *simmetrico di P* rispetto ad H.

La differenza dei due volumi dei solidi descritti nell'enunciato è uguale al volume del solido generato dal triangolo APP' in una rotazione completa attorno alla retta BC.

D'altra parte il raggio della circonferenza inscritta nel triangolo ABC è uguale ad $AH : 3 = a\sqrt{3} : 3$. Si ha quindi l'equazione:

$$\frac{1}{3}\pi\,\overline{AH}^2\cdot\overline{PP'} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\overline{AH}}{3}\right)^3 ;$$

da cui semplificando $\overline{PP'} = \frac{4}{27}\overline{AH} = \frac{4}{27}a\sqrt{3}$;

Ne segue $\overline{HP} = \frac{\overline{PP'}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{27} = \frac{2}{27}\overline{AH}$.

Si determina così facilmente, per via grafica, la posizione richiesta del punto P.

Da questo fascicolo pubblichiamo alcune SCHEDE DI ESERCITAZIONI DIDATTICHE con le relative schede di CONTROLLO. I Giovani possono così verificare la loro preparazione sulle nozioni fondamentali della Matematica.

ANGOLO ACUTO ha in preparazione interessanti QUADERNI di SCHEDE di esercizi graduali di aritmetica, algebra e geometria per la scuola media e per il biennio superiore.

RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 137

Io ho il doppio dell'età che tu avevi quando io avevo l'età che tu hai adesso, e quando tu avrai l'età che io ho ora, insieme avremo 90 anni.

RISOLUZIONE

di Lorenzo Morbidelli del L. Scient. di AREZZO

Senza cercare di capire, tutto in una volta, l'intero enunciato, ho tradotto le argomentazioni, man mano che mi si presentavano, in linguaggio matematico e poi ho risolto il sistema così ottenuto.

Indicando con x la mia età (attuale) e con y l'età (attuale) di Maria (l'altra persona più giovane) si ha:

$$x = 2(\ldots\ldots). \qquad (*)$$

(io ho il doppio ....).

La differenza fra la mia età e l'età di Maria è $x-y$ anni; perciò quando io avevo y anni, Maria aveva $y-(x-y)$ anni, cioè $2y-x$. Completando la relazione $(*)$ si ha:

$$x = 2(2y-x) \qquad (\mathrm{I})$$

Inoltre quando Maria avrà x anni (cioè l'età che io ho oggi), io avrò $x+(x-y) = 2x-y$, e insieme avremo 90 anni. Perciò esiste la relazione:

$$x + (2x-y) = 90 \quad \text{ovvero}$$

$$3x - y = 90 \qquad (\mathrm{II})$$

Risolvendo il sistema costituito dalle (I) e (II) si ricava facilmente $x = 40$ e $y = 30$.

Dalla *RISOLUZIONE*

di *Roberto Bottiroli del L. Sc. "Galilei" di VOGHERA*

È necessario premettere che se consideriamo due persone A e B di età x ed y rispettivamente $(x > y)$, la differenza di età $(x-y)$ si mantiene costante nel tempo. [È una convincente VERIFICA della proprietà INVARIANTIVA della sottrazione].

I) « IO HO IL DOPPIO DELL'ETÀ CHE « TU AVEVI QUANDO IO AVEVO « L'ETÀ CHE TU HAI ADESSO ».

È chiaro che questo periodo di ben 4 proposizioni è basato su un fittizio gioco di parole. La difficoltà è, a mio avviso, solamente apparente. Infatti occorre poter rispondere chiaramente alla seguente domanda: « QUANTI ANNI AVEVI, QUANDO IO AVEVO LA TUA ETÀ ODIERNA ?»

E la risposta è semplice:

Tu avevi la tua età attuale (y) *meno* la differenza fra le nostre età $(x-y)$, cioè $y-(x-y)$.
La prima relazione è quindi:

$$x = 2\left[y-(x-y)\right].$$

II) « QUANDO TU AVRAI L'ETÀ CHE « IO HO ORA, INSIEME AVREMO « 90 ANNI ».
Si ha facilmente:

	la mia età	la tua età
OGGI è	x	y
fra $x-y$ anni sarà	$x+(x-y) = 2x-y$.	$y+(x-y) = x$.

Quindi $(2x-y)+x = 90$.

Dalla *RISOLUZIONE di Enrico Jannelli del L.Sc. "Fermi" di BARI e di Giuseppe Rondinelli di GROSSETO.*

Il problema è facilmente risolubile se si tiene presente che la frase - « QUANDO IO AVEVO L'ETA' CHE TU HAI ADESSO» puo' essere sostituita da « K ANNI FA» essendo K la differenza di età delle due persone, che si mantiene ovviamente costante nel tempo; e che la frase « quando tu avrai l'età che io ho ora» puo' essere sostituita da « FRA K ANNI».
Con queste semplici sostituzioni di frasi, indicando con x e y le due età $(x>y)$, si ha il seguente specchietto:

	IO	TU
K ANNI FA	$x-K$	$y-K$
OGGI	x	y
FRA K ANNI	$x+K$	$y+K$

che si traduce nel seguente sistema:

$$\begin{cases} x-y = K \\ x = 2(y-K) \\ (x+K)+(y+K) = 90 \end{cases}$$

da cui risolvendo:

$$x = 40,\ y = 30,\ K = 10.$$

Molto interessanti sono le risposte di *Gaetano D'Ambrosio* e di *Giuseppe Guarato*, delle quali riportiamo brevi stralci:
G. D'Ambrosio inizia: « Il problema mi ha subito interessato, soprattutto, per l'impegno richiesto di registrare le proprie riflessioni, e di esporre i principali passaggi mentali effettuati nel corso della risoluzione.
Avendo dinnanzi agli occhi il testo del problema (il che costituisce indubbiamente un vantaggio rispetto a chi è costretto a ragionare su dati semplicemente ascoltati), mi sono proposto di analizzare la traccia in modo da individuare in essa degli elementi facilmente collegabili algebricamente.....»

Dopo aver considerato il quesito per via algebrica e per via grafica conclude: « spesso per dipanare la matassa di una questione ci si serve di tanti mezzi ed espedienti, ma la forma conclusiva e sintetica del procedimento comunicato nella stesura della risoluzione è ben lontana dal testimoniare le varie tappe del processo mentale. ....La semplice rappresentazione grafica dei dati mi ha permesso di comprendere con chiarezza tutti i dati, celati nelle faticose espressioni della traccia e di tenerli presenti tutti contemporaneamente. .... La conseguente facilità con cui sono così giunto alla conclusione, mi ha indotto a credere che la difficoltà del problema è dovuta in gran parte, se non completamente, alla forma volutamente involuta dell'enunciato».

G. Guarato scrive fra l'altro:
« ... quando si legge o si ascolta un enunciato del genere, in cui la parola "età" e i pronomi che la richiamano sono ricorrenti e, a prima vista, non si riesce a collocarli nella loro posizione logica, si prova un diffuso senso di smarrimento.
È necessario un attento lavoro di suddivisione dell'enunciato così complesso in un insieme di proposizioni più semplici; ad esempio:
• La mia età è maggiore della tua.
• ALCUNI anni fa, io avevo l'età che tu hai ora. • Tu avevi una età minore dell'attuale • Io ho il doppio di quell'età.
• Fra ALCUNI anni, tu avrai l'età che io ho ora.
• Anch'io allora avrò una età maggiore.
• In quell'anno la somma delle nostre età sarà di 90 anni.

Il primo enunciato è linguisticamente più elegante, il secondo è più comprensibile.
Tuttavia l'insieme delle proposizioni semplici del nuovo enunciato contiene ancora termini indeterminati: ALCUNI anni fa; fra ALCUNI anni. Se indichiamo con x e y, $(x>y)$, le due età, una difficoltà, da non sottovalutare, è data dal dover determinare da questi presupposti: ALCUNI. ..... Molte volte noi seguiamo la nostra intuizione e non ci rendiamo conto del processo logico che ci ha guidati a fornire la risposta esatta. Per questo, penso che chi si dedica all'insegnamento deve saper condurre i giovani a scoprire il substrato che regola le nostre intui-

zioni.

In un problema, in altre parole, non è tanto importante rispondere "QUANTO"; più importante è invece saper rispondere "COME".

QUESTIONE 138

Costruire un triangolo ABC, avente il lato $\overline{BC} = K$ e $B\hat{A}C = \alpha$. Dimostrare che la circonferenza avente per diametro BC determina con i lati del triangolo, AB e AC, un arco MN di ampiezza costante. Per quale valore di α, l'ampiezza di questo arco MN è ancora α?

GENERALIZZAZIONE: Considerare una circonferenza qualunque avente per corda il segmento BC.

MATHESIS - SEZIONE di MESSINA 1973.

RISOLUZIONE

di Giuseppe Guarato di VALDAGNO

Esistono infiniti triangoli aventi il il lato fisso $BC = K$ e tali che $B\hat{A}C = \alpha$.

Il vertice A è uno qualunque dei punti dell'arco (a) di estremi B e C e capace dell'angolo α, dai punti del quale, cioè, il lato BC è visto sotto l'angolo α.

Per la costruzione dell'arco (a), basta individuarne il centro O. Condotta per B la semiretta BD, formante con BC l'angolo $CBD = \alpha$, il centro O è dato dall'intersezione dell'asse di BC con la perpendicolare per B a BD. L'arco (a) di estremi B e C è quello dei due che è situato, rispetto a BC, dalla parte opposta a quella in cui giace la semiretta BD. [fig.1]

CASO GENERALE: di una circonferenza qualunque O'(O'B) del fascio di circoli passanti per B e C, consideriamo l'arco BC=(b) maggiore di una semicirconferenza e quindi capace di un angolo acuto δ. Se $\delta = 90°$ si ha il caso particolare richiesto dalla questione per cui O' è il punto medio di BC.

Si possono presentare due casi:

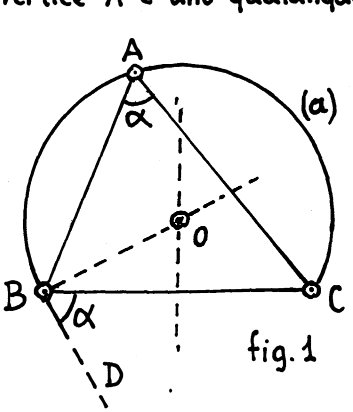


fig. 1

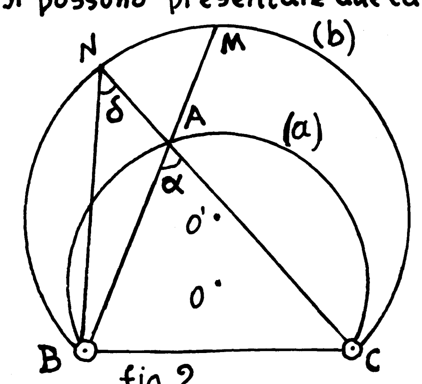


fig. 2

I) (a) e (b) sono dalla stessa banda rispetto a BC

Ci sono due sottocasi:

1) (a) è interno a (b) $\rightarrow \alpha > \delta$ per cui

$M\widehat{O'}N = 2 \cdot M\widehat{B}N =$
$= 2(\alpha - \delta) =$ costante [fig.2]

2) (a) è esterno a (b) $\rightarrow \alpha < \delta$ per cui

$M\widehat{O'}N = 2 \cdot M\widehat{B}N = 2(\delta - \alpha) =$ costante [fig. 3]

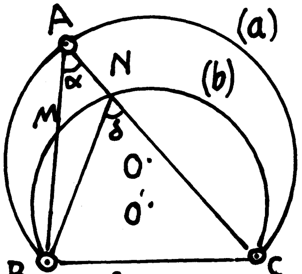


fig. 3

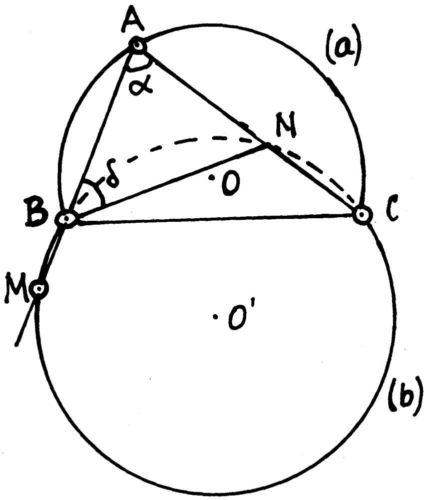
Non si è preso in considerazione il caso in cui $(a) \equiv (b)$ nel qual caso però $M \equiv N \equiv A$ e $M\widehat{O}N = \emptyset$.

II) (a) e (b) sono da parti opposte rispetto a BC. Ne segue [fig.4] $M\widehat{O'}N = 2 \cdot M\widehat{B}N =$
$= 2(\alpha + \delta) =$ costante.

La prima parte della questione è così dimostrata.

Per la seconda parte considerando separatamente i casi di cui sopra si ha:

$I_1 \quad 2(\alpha - \delta) = \alpha \rightarrow \alpha = 2\delta$
$\overline{AN} = \overline{AB}$ e $\overline{AM} = \overline{AC}$.



Non è possibile che sia $\delta = 90°$

$I_2 \quad 2(\delta - \alpha) = \alpha \rightarrow \alpha = \frac{2\delta}{3}$
e per $\delta = 90°$ risulta $\alpha = 60°$.

Nel caso II l'equazione
$$2(\alpha + \delta) = \alpha$$
è impossibile per valori positivi di α e δ; basta però considerare l'arco $M\widehat{O'}N$ esplementare: $360° - 2(\alpha + \delta) = \alpha$

da cui $\alpha = 120° - \frac{2\delta}{3}$

e per $\delta = 90°$ si ottiene $\alpha = 60°$

QUESTIONE 139

Un ragazzo e una ragazza sono seduti uno di fronte all'altra. «IO SONO UN RAGAZZO» dice la persona dai capelli neri. -« E IO SONO UNA RAGAZZA» dice la persona dai capelli biondi. Se almeno uno dei due mènte, chi è?

MATHESIS - Sez. di MESSINA - 1973.

RISOLUZIONE

di Mauro Bigi - L.Sc. "Castelnuovo" di FIRENZE e di Gaetano D'Ambrosio del L.Sc. di BISCEGLIE.

Le due persone (di sesso diverso) dichiarano di essere rispettivamente un ragazzo ed una ragazza.

Le informazioni possono essere entrambe VERE. Allora la persona dai capelli neri è un ragazzo e quella dai capelli biondi è una ragazza.

Ma se si ammette che una delle informazioni sia FALSA (per esempio: la ragazza dichiara di essere un ragazzo), risulta falsa anche l'altra informazione (cioè: il ragazzo dichiara di essere una ragazza).

Entrambi dunque mèntono: In questa alternativa la ragazza è bruna e il ragazzo è biondo

RISPOSTA

di Giuseppe Guarato di VALDAGNO

Poichè le due proposizioni sono coerenti e cioè non si contraddicono, esse o sono entrambe vere o entrambe false.

Nel caso che una sia falsa, deve essere falsa anche l'altra; in tal caso mèntono tutti e due.

QUESTIONE 140

Sono state distribuite 200 uova fra 100 persone comprendenti uomini, donne e alcune dozzine di bambini.

Ogni uomo ha ricevuto 6 uova, ogni donna 4 uova e ciascun bambino un uovo.

Quanti sono gli uomini, quante le donne e quanti sono i bambini?

RISOLUZIONE

di Pietro Terranova - L.Sc. "Oberdan" di TRIESTE e di Giuseppe Guarato di VALDAGNO

Indico con x, y e $12z$ rispettivamente il numero degli uomini, delle donne e dei bambini.

Si ha il sistema indeterminato:

$$\begin{cases} x + y + 12z = 100 \\ 6x + 4y + 12z = 200 \end{cases}$$

Successivamente si ha

$$\begin{cases} x + y = 100 - 12z \\ 3x + 2y = 100 - 6z \end{cases} \quad (\mathrm{I}) \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 18z - 100 & \text{con } z > \frac{50}{9} \\ y = 200 - 30z & \text{con } z < \frac{20}{3}, \end{cases}$$

cioè $\frac{50}{9} < z < \frac{20}{3}$

E poichè $z \in N$ deve essere $z = 6$; ne segue sostituendo nelle (I)

$$x = 8 \qquad y = 20.$$

Pertanto gli uomini sono 8, le donne sono 20 e i bambini sono 72 (=6x12).

RISOLUZIONE

di Gaetano D'Ambrosio di BISCEGLIE e di Francesco Fogliotti di GENOVA.

Indico con U, D, B, rispettivamente il numero degli uomini, delle donne e dei bambini interessati alla distribuzione. Si ricava facilmente il seguente sistema indeterminato:

$$(\mathrm{I})\begin{cases} U + D + B = 100 \\ 6U + 4D + B = 200 \end{cases}$$

Eliminando B si ha l'equaz. indet.

$$5U + 3D = 100 \quad \text{da cui}$$

$$(\alpha) \qquad U = 20 - \frac{3}{5}D.$$

E poichè $U, D, B \in N_0$ la (α) ammette le sole soluzioni

D	5	10	15	20	25	30
U	17	14	11	8	5	2.

e in base alla prima del sistema (I) si determinano i corrispondenti valori di B:

78 76 74 72 70 68

Di questi valori è accettabile solo $B = 72$ perchè multiplo di 12. Quindi l'unica solazione è

$$U = 8, \; D = 20, \; B = 72.$$

QUESTIONE 141

Dimostrare per via algebrica e per via geometrica che: « In ogni triangolo rettangolo, ciascun cateto è medio proporzionale fra il segmento "somma" e il segmento "differenza" dell'ipotenusa e dell'altro cateto »

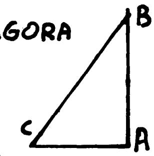
Aniello Agrosi

RISOLUZIONE

di Enrico JANNELLI del L. Sc. "Fermi" di BARI

DIMOSTRAZIONE ALGEBRICA

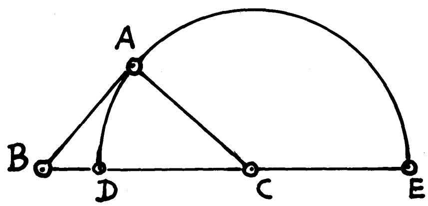
Per il teor. di PITAGORA si ha



$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 =$$
$$= (BC + AC)(BC - AC).$$

DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA

Tracciata la circonferenza $C(\overline{CA})$, essa incontra il segmento BC in D e il suo prolungamento in E.



Essendo la distanza di C dal lato AB uguale al raggio CA, tale lato risulta tangente alla circonferenza. Per il teor. della tangente e della secante si ha:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BE} \cdot \overline{BD} =$$
$$= (\overline{BC} + \overline{CE})(\overline{BC} - \overline{CD}) =$$
$$= (\overline{BC} + \overline{CA})(\overline{BC} - \overline{CA}).$$

L'ABBONAMENTO rappresenta un atto

di CONSENSO
di SIMPATIA
di INCORAGGIAMENTO
di SOLIDARIETA'

I SELEZIONE *dalle* "SCHEDE DIDATTICHE" *di Angolo acuto*

Eseguire le seguenti operazioni :

- $\frac{4}{3} + \frac{5}{3} \times \frac{2}{3} =$ ....

- $(0{,}2)^3 + (0{,}2)^2 \times (0{,}1) =$ ....

- $2{,}\bar{3} + 5{,}\bar{6} = 7{,}\bar{9} = 8$ ☐ VERO ?; ☐ FALSO ? .
- $2{,}\bar{3} + 5{,}\bar{6} = \frac{23-2}{9} + \frac{\quad}{\quad} =$ ....

- $(a^2 b^3 c^k)^2 \cdot (a^3 b^k c^2)^k =$
  $=$ ....
  $=$ ....

- $(a^3 b^2 c)^k : (a^k b c^3)^2 =$
  $=$ ....
  $=$ ....

- $a^{-2} =$ ....
- $(-b)^{-3} =$ ....
- $\left(\frac{c}{b}\right)^{-2} =$ ....

- $(-0{,}2)^{-2} =$ ....
- $(0{,}\bar{3})^{-3} =$ ....

- $(15a^8 + 5a^4 - 10a^{12}) : (5a^4) =$ ....
- $(a^{25} - a^{15} - 2a^5) : (-a^5) =$ ....
- $(a^7 + 2a^3 - 3a^5) : (-a^3) =$ ....
- $(x^5 - 2x^3 + x) : (x^4) =$ ....
- $(x^5 - 2x^4 + x) : (x^{-4}) =$ ....
- $(20x^{20} + 15x^{15} - 5x^5) : (5x^{-4}) =$ ....
- $(x^4 - 2x^{-3} + x^{-1} + 1) \cdot x^3 =$ ....

Scheda di controllo nel fascicolo 5, settembre 74

Scomporre in fattori i seguenti polinomi:

- $x^2 + x - 3x^3 =$ ....
- $x^8 - x^2 - 4x^4 =$ ....
- $am - bm - a + b =$ ....
  $=$ ....
- $a^3 - a^2 - a + 1 =$ ....
  $=$ .... $=$ ....
- $3x + 3 - ax - a + x^2 + x =$ ....
  $=$ ....
- $x^{3m+2} + x^{2m+3} + x^m =$ ....
- $x^{3m+4} + x^{m+8} - x^{2m+12} =$ ....
- $5a^5 - 10a^{10} + 15a^{15} - 25a^{25} =$ ....
- $4a^{n+2} - a^n =$ .... $=$ ....
- $25x^{a+5} - 49x^{a+1} =$ ....
- $a^4 - b^4 =$ ....
- $a^4 + b^4 =$ .... • $a^8 + b^8 =$ .... • $a^2 + b^2 =$ ....
- $a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3 =$ ....
- $a^6 - b^6 =$ ....
  $=$ ....

-SCHEDA DI CONTROLLO A PAG. 16-

Scomporre in fattori i seguenti polinomi:

- $(a-b)^2 - c^2 =$ ....
- $a^2 - (b-c)^2 =$ ....
- $1 - x^2 - y^2 + 2xy =$ ....
- $m^2 + n^2 - c^2 - 2mn =$ ....

Determinare il M.C.D e il m.c.m. dei seguenti gruppi di polinomi

$x^2-3x+2 =$	$6x-2 =$ ....
$x^2-5x+6 =$	$9x^2-1 =$ ....
$x^2+x-6 =$	$9x^2+1 =$ ....
M.C.D. = ...	M.C.D = ...
m.c.m = ...	m.c.m = ...

Semplificare la seguente frazione algebrica:

- $\dfrac{ab-a^2}{ab-b^2} =$ ....

Eseguire le operazioni indicate e semplificare:

- $\dfrac{a-b}{ab} - \dfrac{c-b}{bc} - \dfrac{a-c}{ac} =$ ....

Effettuare la divisione fra polinomi qui indicata:

- $3x^3 + 2x^2 - x - 1 \quad \underline{|\,2x^2 + 3x - 1}$

....

....

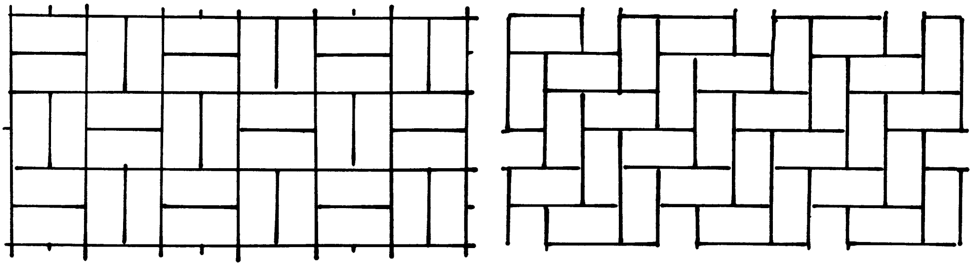
....

....

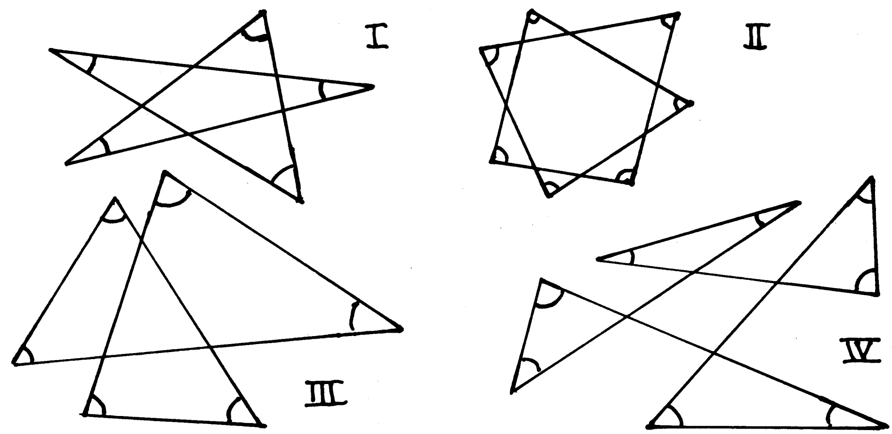
- SCHEDA DI CONTROLLO A PAG. 16 -

• Per ciascuno dei motivi qui disegnati (immaginati estesi per tutto il piano) indicare i centri di simmetria e gli assi di simmetria.

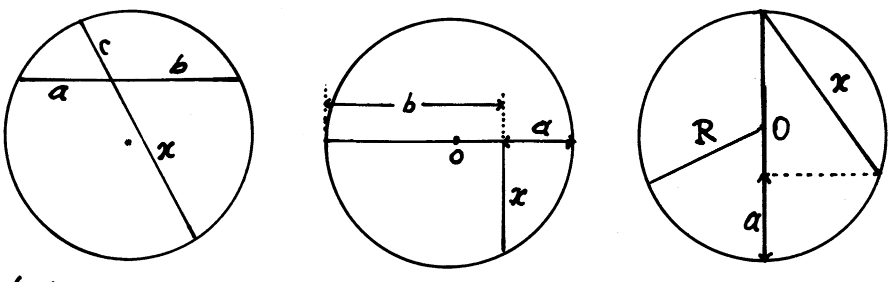
I II



• Per ciascuna delle seguenti figure determinare la somma degli angoli indicati con un archetto:



• Per ciascuna delle seguenti figure, esprimere la lunghezza del segmento indicato con x, in funzione della lunghezza dei segmenti indicati con a, b, c, R.



Scheda di CONTROLLO nel fascicolo 5 - settembre 74.

SCHEDE di CONTROLLO

II SELEZIONE dalle "SCHEDE DIDATTICHE

Scomporre in fattori i seguenti polinomi:

- $x^2 + x - 3x^3 = x(x + 1 - 3x^2)$.
- $x^8 - x^2 - 4x^4 = x^2(x^6 - 1 - 4x^2)$.
- $am - bm - a + b = m(a-b) - (a-b) = (a-b)(m-1)$.
- $a^3 - a^2 - a + 1 = a^2(a-1) - (a-1) = (a-1)(a^2-1) = (a-1)^2(a+1)$.
- $3x + 3 - ax - a + x^2 + x = 3(x+1) - a(x+1) + x(x+1) = (x+1)(3-a+x)$.
- $x^{3m+2} + x^{2m+3} + x^m = x^m(x^{2m+2} + x^{m+3} + 1)$.
- $x^{3m+4} + x^{m+8} - x^{2m+12} = x^{m+4}(x^{2m} + x^4 - x^{m+8})$.
- $5a^5 - 10a^{10} + 15a^{15} - 25a^{25} = 5a^5(1 - 2a^5 + 3a^{10} - 5a^{20})$.
- $4a^{n+2} - a^n = a^n(4a^2 - 1) = a^n(2a+1)(2a-1)$.
- $25x^{a+5} - 49x^{a+1} = x^{a+1}(25a^4 - 49) = x^{a+1}(5a^2+7)(5a^2-7)$.
- $a^4 - b^4 = (a^2+b^2)(a^2-b^2) = (a^2+b^2)(a+b)(a-b)$.
- $a^4 + b^4 =$ ★ • $a^8 + b^8 =$ ★ • $a^2 + b^2 =$ ★
- $a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3 = (a^2+b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$.

$a^6 - b^6 = (a^3+b^3)(a^3-b^3) = (a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

★ NON SI PUO' SCOMPORRE PER $a, b \in \mathcal{R}$.

III SELEZIONE dalle "SCHEDE DIDATTICHE"

Scomporre in fattori i seguenti polinomi:

- $(a-b)^2 - c^2 = (a-b+c)(a-b-c)$.
- $a^2 - (b-c)^2 = (a+b-c)(a-b+c)$.
- $1 - x^2 - y^2 + 2xy = 1 - (x-y)^2 = (1+x-y)(1-x+y)$.
- $m^2 + n^2 - c^2 - 2mn = (m-n)^2 - c^2 = (m-n+c)(m-n-c)$.

Determinare il M.C.D. e il m.c.m. dei seguenti gruppi di polinomi

$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$	$6x-2 = 2(3x-1)$
$x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$	$9x^2-1 = (3x+1)(3x-1)$
$x^2+x-6 = (x+3)(x-2)$	$9x^2+1 = 9x^2+1$
M.C.D. $= (x-2)$	M.C.D $= 1$
m.c.m $= (x-1)(x-2)(x-3)(x+3)$.	m.c.m $= 2(3x-1)(3x+1)(9x^2+1)$

Semplificare la seguente frazione algebrica:

- $$\frac{ab-a^2}{ab-b^2} = \frac{a(b-a)}{b(a-b)} = \frac{-a(-b+a)}{b(a-b)} = -\frac{a}{b}$$

Eseguire le operazioni indicate e semplificare:

- $$\frac{a-b}{ab} - \frac{c-b}{bc} - \frac{a-c}{ac} = \frac{ac-bc-ac+ab-ab+bc}{abc} = 0$$

Effettuare la divisione fra polinomi qui indicata:

$$\begin{array}{l|l}
3x^3 + 2x^2 - x - 1 & 2x^2 + 3x - 1 \\ \hline
-3x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{2}x & \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} \ (= \text{quoziente}) \\
\quad -\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1 & \\
\quad +\frac{5}{2}x^2 + \frac{15}{4}x - \frac{5}{4} & \\
\qquad +\frac{17}{4}x - \frac{9}{4} \ (= \text{resto}) &
\end{array}$$

Angolo acuto V. 4

RISOLUTORI DELLE QUESTIONI	137	138	139	140	141	142
AGROSI ANIELLO - DISO (LE)	●	–	●	●	●	–
BIGI MAURO, L. sc. "Castelnuovo" FIRENZE	●	–	●	–	●	●
BINI ROBERTO, L. sc. "Copernico" PRATO (Fi)	●	–	●	●	–	–
BOTTIROLI ROBERTO, L. sc. "Galilei" VOGHERA (Pv)	●	–	–	–	–	–
BURZACCHINI FABRIZIO - ANCONA	–	–	–	●	–	–
BUSO CLAUDIO, L. sc. "I. Nievo" PADOVA	●	–	–	●	●	●
CAGNOLATI FRANCESCO, L. sc. "Spallanzani" REGGIO EM.	●	–	●	–	●	●
D'AMBROSIO GAETANO, L. sc. BISCEGLIE (Ba)	●	●	●	●	●	●
D'AMBROSIO LUCIA, Sc. med. BISCEGLIE (Ba)	–	–	–	●	–	–
D'ANTONIO PASQUA, L. sc. "Einstein" TORINO	●	–	–	–	●	–
DEL BELLO SANDRO, L. sc. "Pacinotti" LA SPEZIA	●	●	●	●	●	●
DELLE FERRA RAFFAELE, Ist. tecn.geom. AVELLINO	●	–	–	–	–	–
DI TEMPORA FRANCESCO - ROMA	●	–	–	–	–	–
FELICIAN LEONARDO, L. cl. "Dante" TRIESTE	●	●	●	●	●	●
FELICIAN LORENZO, Sc. med. "De Tommasini" TRIESTE	–	–	●	●	–	●
FOGLIOTTI FRANCESCO - GENOVA - SAMPIERD.	●	●	●	●	●	●
GUARATO GIUSEPPE, VALDAGNO (Vi)	●	●	●	●	●	●
HONSELL FURIO, L. sc. "Galilei" TRIESTE	●	–	●	●	●	●
JANELLI ENRICO, L. sc. "Fermi" BARI	●	●	–	●	●	–
LONGO GIOVANNI - FRAGNETO L'ABATE (Be)	●	–	–	–	–	–
LUCARDESI PAOLO, L. sc. "Lussana" BERGAMO	●	–	–	●	–	●
LUSETTI RENZO, L. sc. "Spallanzani" REGGIO EM.	●	–	–	–	–	–
MESSIDORO M. TERESA, L. sc. "Einstein" TORINO	●	–	–	●	–	–
MORBIDELLI LORENZO, L. sc. AREZZO	●	–	–	●	●	●
PASCIUTO ALESSANDRO, L. sc. "XIV" ROMA	●	●	●	●	●	●
PROFETI SANDRA, L. sc. "U. Dini" PISA	●	–	–	●	●	●
ROSELLI WALTER, ROVIGO	●	–	–	●	–	●
RONDINELLI GIUSEPPE, GROSSETO	●	–	–	–	–	–
TERRANOVA DIEGO, L. sc. "Oberdan" TRIESTE	●	●	●	●	●	●
TREBBI GIANNI, L. sc. "Galilei" TRIESTE	●	–	–	–	–	–
VIDALI CRISTINA, L. sc. "Alighieri" TRIESTE	●	–	●	●	–	●
VIOLA PAOLO, L. cl. "Alighieri" TRIESTE	●	●	●	●	–	●

AMICI SOSTENITORI DI ANGOLO ACUTO

ISTITUTO MAGISTRALE "Carducci" FERRARA
PROF. LORENZO ARUS - IMOLA (Bo)
PROF. SALVATORE AMICO - ATRIPALDA (Av)
PROF. BRUNO BISON - Oderzo (Tv)
PROF. CARLO CAPACCIOLI - FIRENZE
PROF. FERNANDO CAVALIERE - FOGGIA
PROF. GABBRIELLA CORSI - FIRENZE
PROF. FLORA FIORENTINI - FIRENZE
PROF. LORENZO MICI - FIRENZE
PROF. SABINA PALMIERI - ERCOLANO (Na)
PROF. ROBERTO ROMAGNOLI - FIRENZE
PROF. FRANCESCO TONINELLI - TORINO
PROF. MARCO TULLIO TONINI - FORLI'

SPEDIZIONE IN ABBONAMENTO POSTALE GRUPPO IV

Coloro che trattengono ANGOLO ACUTO
sono pregati di inviare con sollecitudine
la loro quota di abbonamento

PER FAVORE NON CESTINATE

Se questo periodico non vi interessa, vi preghiamo di rispedire al mittente le copie ricevute, in busta affrancata come stampe.

ANGOLO ACUTO - Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

Le seguenti Scuole hanno sottoscritto l'abbonamento per il 1974:

SCUOLE MEDIE: - "Pascoli" AGRIGENTO - "Mattioli" SIENA - "Mameli" PADOVA.

LICEI CLASSICI: - "Foscolo" PAVIA - "A. Di Rudinì" NOTO (Sr) - "R. Corso" CORREGGIO (Re) - "Virgilio" MANTOVA - CASSANO JONICO (Cs).

LICEI SCIENTIFICI: - "Galilei" ALESSANDRIA - "U. Dini" PISA - "Galilei" CASTELNUOVO GARFAGNANA (Lu) - "Duca d'Aosta" PISTOIA - "Oberdan" TRIESTE - "P. Lioy" VICENZA - "Arcivescovile" TRADATE (Va) - "IV" BOLOGNA - "Leonardo Da Vinci" FIRENZE - "Spallanzani" REGGIO EMILIA - "Leonardo Da Vinci" FASANO (Br) - "G. Passerini" GUASTALLA (Re) - "Cremona" MILANO - SANREMO (Im) - SCHIO (Vi) - EMPOLI (Fi) - CASTELNUOVO NEI MONTI (Re).

ISTITUTI MAGISTRALI: - "G. Badini" ADRIA (Ro) - "Rosmini" TRENTO - "Carducci" FERRARA - "A. Gentili" SAN GINESIO (Mc). - "G. Milli" TERAMO - "R. Caggese" FOGGIA - "Fuà Fusinato" PADOVA - "S. Suardo" BERGAMO - "A. Negri" VEROLI (Fr) - SALUZZO (Cu) - RIMINI (Fo).

ISTITUTI TECNICI E PROFESSIONALI:

- Commerc. e per Geom. CITTADELLA (Pd)
- Profess. per l'Alimentazione ROMA
- Industr. CITTA' DI CASTELLO (Pg)
- Commerc. "L. Da Vinci" TRIESTE
- Geometri BERGAMO
- Industr. "Bernocchi" LEGNANO (Mi)
- Commerc. "De Amicis" ROVIGO
- Industr. MESSINA
- Industr. ROVIGO
- Geometri PADOVA
- Commerc. e per Geometri MATERA
- Agrario FIRENZE
- Industr. VITERBO
- Geometri NAPOLI
- Industr. LIVORNO.

(continua)

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 gennaio 1970
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso*

Stampato dalla Tip. "G. Capponi" - Firenze

Associato all'USPI
Unione Stampa Periodica Italiana