ANNO V - 1974

5

SETTEMBRE - OTTOBRE

L'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

Periodico bimestrale a cura di Giuseppe Spinoso Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE spedizione in abb. postale - gruppo IV conto corrente postale 5/27919	**Abbonamenti per il 1975** Studenti L. 1800 Professori e Scuole L. 2200 Sostenitori L. 3000 Annate arretrate L. 1800 L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio.

Per costituzione di un fondo-premi per i più bravi Giovani risolutori delle questioni proposte nella Palestra delle Gare, inviare quote multiple di L. 1.000.

PER RINNOVARE L'ABBONAMENTO per il 1975

gli Angolisti potranno utilizzare il modulo di conto corrente postale inserito nei fascicoli precedenti; OPPURE inviare con LETTERA RACCOMANDATA l'importo in francobolli da L. 25 o da L. 50.

Consigliamo infine agli Angolisti di diventare CORRENTISTI POSTALI (Sono sufficienti L. 500 per i relativi moduli). Potranno così rinnovare anche l'abbonamento ad ANGOLO ACUTO usando il POSTAGIRO esente da qualsiasi tassa ed evitando perdite di tempo agli sportelli degli uffici postali.

Questo fascicolo contiene il testo del TEMA di MATEMATICA della MATURITA' MAGISTRALE - Sessione suppletiva 1974 - QUESTIONE 174, pagina 2.

LA PALESTRA DELLE GARE

AVVERTENZE IMPORTANTI PER I RISOLUTORI *Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte. Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale. Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età. Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad*

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE

entro il 30 - XII - 1974

Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori. Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.

QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 174

MATURITA' MAGISTRALE 1974
SESSIONE SUPPLETIVA

Un trapezio ABCD, di cui AB è la base maggiore e CD la base minore, è diviso dalla diagonale BD in due triangoli rettangoli.

Sapendo che la base minore, la base maggiore e l'altezza sono ordinatamente proporzionali ai numeri 5, 9, 12 e che il perimetro è $42a$, si determinino l'altezza e i lati del trapezio.

Si calcoli il rapporto fra le superfici dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio attorno alla retta della base maggiore e successivamente attorno alla retta della base minore.

(Il testo ci è stato gentilmente comunicato dal Prof. Pietro Castaldo di Città di Castello)

Poichè non siamo riusciti a venire a conoscenza del testo del TEMA di MATEMATICA della SESSIONE SUPPLETIVA della MATURITA' SCIENTIFICA 1974 preghiamo vivamente gli eventuali Angolisti che ne siano a conoscenza di volercelo comunicare con cortese urgenza.
Grazie. *Angolo acuto*

QUESTIONE 175

Gemellaggio criptaritmetico fra CAPRI e PESARO.

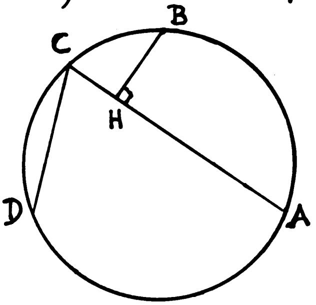
CAPRI è il *quadrato* di CEL,
PESARO è il *cubo* di IO.

Determinare i due numeri.
(Soluzione unica).

Diffondete *Angolo Acuto*

QUESTIONE 176

In una circonferenza, si considerino le corde AC e CD (AC > CD) e sia B il punto



medio dell'arco ACD.
Si conduca BH perpendicolare alla corda AC e si dimostri che

$$AH = HC + CD.$$

G. Loria

QUESTIONE 177

I quattro numeri 3, 7, 11 e 15 sono in progressione aritmetica ed è facile verificare che essi verificano le seguenti proprietà

a) la somma del doppio del primo con il secondo supera di 2 il terzo numero;

b) il prodotto dei primi due numeri aumentato di 5 eguaglia la somma del terzo e del quarto.

Determinare un'altra quaterna di numeri razionali in progressione aritmetica per i quali sussistono le relazioni a) e b).

G. S.

QUESTIONE 178

Dati cinque segmenti

a, b, c, d, e

determinare graficamente il segmento $x = \dfrac{a^2 bc}{d^2 e}$.

RISOLUZIONI delle QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 142

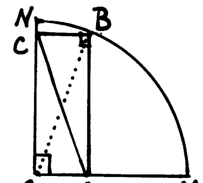
Un triangolo ABC, rettangolo in B, è inscritto in un quadrante di cerchio MON (A su OM, C su ON e B su $\widehat{MN}$).
Si sa anche

$AB \parallel ON$, $BC \parallel OM$

e che $\overline{AM} = 2\sqrt{2}a$, $\overline{BC} = \sqrt{2}a$.
Determinare, *possibilmente in meno di 30 secondi*, la lunghezza dell'ipotenusa AC.

RISOLUZIONE

di Lorenzo Felician - Scuola Media "M. De Tommasini" di Trieste e di Sandra Profeti del Lic. Scient. "U. Dini" di Pisa.



Dalle condizioni indicate nell'enunciato si riconosce subito che ABCD è un rettangolo.
Ne segue subito:

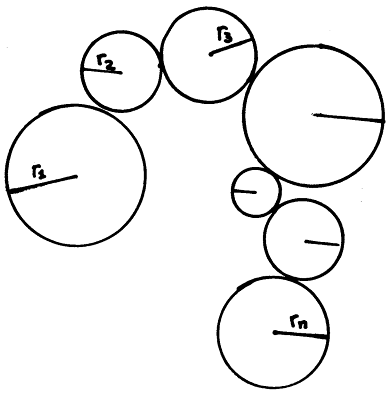
$$\overline{AC} = \overline{OB} = \overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{CB} + \overline{AM} = \sqrt{2}a + 2\sqrt{2}a = 3\sqrt{2}a.$$

QUESTIONE 143

Sono date, nell'ordine, n ruote poggiate su un piano e girevoli attorno ad assi perpendicolari al piano e passanti per i loro centri. Ciascuna ruota è tangente alla precedente (tranne la prima) e alla seguente (tranne l'ultima); hanno gli orli zigrinati e formano un ruotismo aperto, cioè l'ultima ruota non tocca la prima. Gli orli zigrinati hanno lo scopo di evitare slittamenti durante la rotazione del sistema, determinata da un impulso rotatorio impresso ad una ruota qualunque del sistema.

Inoltre i raggi $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sono commensurabili con un dato segmento q. Si chiede:

I) La relazione esistente fra le velocità angolari $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ delle ruote in ciascun istante durante la rotazione del sistema.



II) Che cosa succede se l'ultima ruota si pone tangente alla prima?

III) Se i moti rotatori sono uniformi, ogni quanto tempo si riproducono le posizioni iniziali di tutto il sistema?

IV) Rispondere a questa ultima domanda anche nel caso in cui due raggi qualunque siano tra loro incommensurabili.

RISOLUZIONE del proponente prof. Alfonso La Paglia di Biella, che ci è sembrata più chiara e più esauriente delle risposte pervenute.

I) Non essendovi slittamenti sugli orli, tutti i punti delle n circonferenze si muovono nello stesso istante con la stessa velocità periferica $v(t)$. Dividendo $v(t)$ per i rispettivi raggi, si hanno le velocità angolari:

$$\omega_1 = \frac{v(t)}{r_1}; \; \omega_2 = \frac{v(t)}{r_2}; \ldots; \; \omega_n = \frac{v(t)}{r_n};$$

da cui si trae:

$$\frac{\omega_h}{\omega_k} = \frac{r_k}{r_h},$$

cioè: *le velocità angolari sono in qualunque istante inversamente proporzionali ai rispettivi raggi*

II) Due ruote consecutive hanno le rotazioni di *senso contrario*. Quindi, se n è dispari, la prima ruota e la ultima hanno rotazioni concordi e poste a contatto darebbero sfregamento e il sistema non può girare. Se n è dispari, poichè la prima e l'ultima ruota hanno rotazioni discordi e velocità periferiche uguali, non si verifica alcun inconveniente e il sistema continua a ruotare.

III) Nel moto uniforme è

$$v(t) = v = \text{costante}.$$

Avendo supposto i raggi commensurabili con q, le loro misure rispetto a q saranno le frazioni irriducibili

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$$

Tutti gli spazi periferici descritti nel tempo x sono uguali; dividendoli per le lunghezze delle rispettive circonferenze si hanno rispettivamente i numeri di giri fatti in tali tempi, ossia

$$f_1 = \frac{v x}{2\pi \frac{a_1}{b_1}};\ f_2 = \frac{v x}{2\pi \frac{a_2}{b_2}};\ \dots$$

$$\dots;\ f_n = \frac{v x}{2\pi \frac{a_n}{b_n}}$$

Per ritornare alla posizione iniziale completa, $f_1, f_2, \dots, f_n$ devono essere tutti interi ed assumere i valori minimi possibili, cioè vx deve essere il minimo comune multiplo di tutti i denominatori. Quindi:

$$vx = \text{mcm}\left[2\pi\frac{a_1}{b_1}; 2\pi\frac{a_2}{b_2}; \dots; 2\pi\frac{a_n}{b_n}\right] =$$

$$= 2\pi \frac{\text{mcm}\,(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\text{MCD}\,(b_1, b_2, \dots, b_n)}$$

Pertanto il periodo x del ruotismo è:

$$x = \frac{2\pi}{v} \cdot \frac{\text{mcm}(a_1, a_2, \dots a_n)}{\text{MCD}(b_1, b_2, \dots b_n)}$$

ESEMPIO

Se si hanno tre ruote di raggi $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{10}{21}$, si ha

$$x = \frac{2\pi}{v} \cdot \frac{20}{3} = \frac{40\pi}{3v};$$

per $v = \pi/\text{sec.}$ è $x = \frac{40}{3}$ (secondi) e i giri sono:

$$f_1 = \frac{\pi x}{2\pi \frac{4}{9}} = 15;\ f_2 = \frac{\pi x}{2\pi\frac{5}{6}} = 8;$$

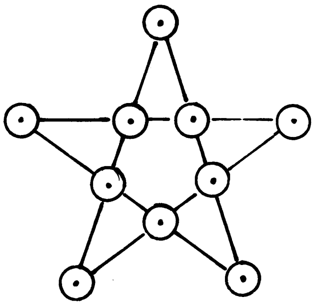
$$f_3 = \frac{\pi x}{2\pi \frac{10}{21}} = 14.$$

IV) Se due raggi qualunque sono incommensurabili tra loro, qualche misura di raggio è irrazionale, per cui non esiste nè MCD nè mcm. La rotazione è aperiodica; cioè ad ogni istante corrisponde una situazione che non viene più riprodotta.

È facile constatare che il sistema è commutativo, cioè che cambiando l'ordine delle ruote, a parità di v rimangono immutate le singole velocità angolari e il periodo del ruotismo.

QUESTIONE 144

Porre nei cerchietti di questa STELLA MAGICA dieci numeri naturali in modo che risulti COSTANTE E MINIMA



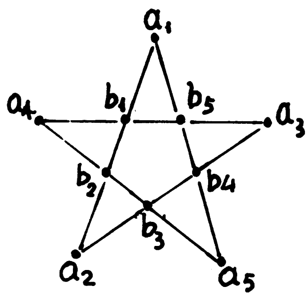
la somma dei numeri posti in ciascuna delle cinque quaterne di cerchietti i cui centri sono allineati.

RISOLUZIONE

di Giuseppe Guarato-VALDAGNO

Indicando come in figura, con a_i e con b_i $(1 \leq i \leq 5)$ i termini posti rispettivamente sulle punte esterne della stella e sui vertici del pentagono interno e ponendo $s = 2t$ (dove s indica la somma di ogni quaterna, che deve risultare pari in quanto ogni elemento appartiene a due quaterne), si ha: il sistema:

$$(1) \quad \begin{cases} a_1 + b_1 + b_2 + a_2 = 2t \\ a_2 + b_3 + b_4 + a_3 = 2t \\ a_3 + b_5 + b_1 + a_4 = 2t \\ a_4 + b_2 + b_3 + a_5 = 2t \\ a_5 + b_4 + b_5 + a_1 = 2t \end{cases}$$



Risolvendo rispetto alle a_i in funzione delle b_i si ha:

$$(2) \quad \begin{cases} a_1 = t + b_3 - b_1 - b_5 \\ a_2 = t + b_5 - b_2 - b_3 \\ a_3 = t + b_2 - b_4 - b_5 \\ a_4 = t + b_4 - b_1 - b_2 \\ a_5 = t + b_1 - b_3 - b_4 \end{cases}$$

Comprendendo fra i naturali anche lo zero, assegniamo alle b_i i piu piccoli valori possibili e cioè quelli dell'insieme

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Degli elementi di B esistono ben $5! = 120$ permutazioni; osserviamo però che se una determinata permutazione fornisce

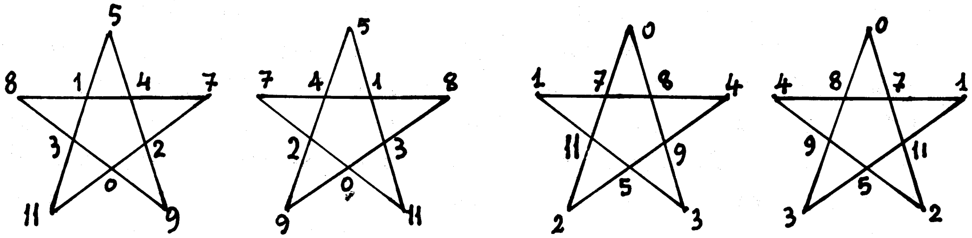
una soluzione anche altre quattro (cinque con quella di partenza) dànno la stessa soluzione permutata circolarmente.
Rimangono quindi 24 permutazioni distinte ottenute lasciando inalterato per esempio il primo termine, cioè lo zero, e permutando in tutti i modi possibili gli altri quattro elementi. Ognuna di queste fornisce una soluzione se i secondi membri delle (2) assumono di conseguenza valori distinti.
Tenendo conto di tali condizioni solo le sei permutazioni seguenti, a fianco delle quali sono riportati i valori degli a_i ricavati dalle (2), dànno soluzioni:

		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
1)	0, 1, 2, 3, 4	$t-2$	$t+1$	$t-6$	$t+2$	$t-5$	(3)
2)	0, 1, 3, 4, 2	$t+1$	$t-2$	$t-5$	$t+3$	$t-7$	
3)	0, 2, 4, 1, 3	$t+1$	$t-3$	$t-2$	$t-1$	$t-5$	
4)	0, 2, 4, 3, 1	$t+3$	$t-5$	$t-2$	$t+1$	$t-7$	
5)	0, 3, 1, 4, 2	$t-1$	$t-2$	$t-3$	$t+1$	$t-5$	
6)	0, 4, 3, 2, 1	$t+2$	$t-6$	$t+1$	$t-2$	$t-5$	

Osservando bene il quadro possiamo rilevare che i valori minimi di a_i sono di tre tipi: $t-5$ per la 3) e la 5)
$t-6$ per la 1) e la 6)
$t-7$ per la 2) e la 4).
Dovendo tali elementi essere maggiori di 4 si hanno tre tipi di soluzioni:
I) $t=10$ e $s=20$; II) $t=11$ e $s=22$; III) $t=12$ e $s=24$
Sostituendo nel quadro (3) si hanno 6 soluzioni di cui 2 di costante magica minima ($s=20$). Scambiando gli a_i con i b_i si ottengono altre 6 soluzioni di cui 2 di somma minima. Tali soluzioni si possono ottenere dalle precedenti scambiando gli elementi opposti (per opposti intendiamo quelli che si trovano sullo stesso piano di simmetria: con riferimento alla figura sono opposti a_1 e b_3, b_1 e a_5).
Se poi si vuole escludere lo zero, anzicchè l'insieme
$B=\{0,1,2,3,4\}$ si considera l'insieme $B'=\{1,2,3,4,5\}$ e le nuove soluzioni si ottengono aumentando di un'unita' le soluzioni precedenti e le costanti aumentano di 4 e diventano rispettivamente $s=24$; $s=26$; $s=28$.

Riportiamo le 4 soluzioni a costante minima.

$S = 20 \qquad A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11\}$.



NOTA. E' facile osservare che le prime due stelle (e di conseguenza anche le altre due derivate) sono simmetriche; cioè l'una si ottiene dall'altra per ribaltamento attorno all'asse verticale di ciascuna. Le 5 quaterne sono fisse.
A titolo di curiosità riportiamo anche le altre otto soluzioni come se le quaterne fossero allineate una dopo l'altra.

$S = 22 \qquad A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 13\}$

a_1	b_1	b_2	a_2	b_3	b_4	a_3	b_5	b_1	a_4	b_2	b_3	a_5	b_4	b_5	a_1
9	0	1	12	2	3	5	4	0	13	1	2	6	3	4	9
13	0	4	5	3	2	12	1	0	9	4	3	6	2	1	13
0	12	9	1	6	13	2	5	12	3	9	6	4	13	5	0
0	5	13	4	6	9	3	12	5	2	13	6	1	9	12	0

$S = 24 \qquad A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 13, 15\}$

13	0	1	10	3	4	7	2	0	15	1	3	5	4	2	13
15	0	2	7	4	3	10	1	0	13	2	4	5	3	1	15
0	10	13	1	5	15	3	7	10	4	13	5	2	15	7	0
0	7	15	2	5	13	4	10	7	3	15	5	1	13	10	0

Al Lettore il facile compito di scoprire che anche queste soluzioni sono a due a due simmetriche e che per ciascuno dei due gruppi le 5 quaterne sono fisse.

Da quanto sopra, si può dedurre anche che non può esistere una STELLA MAGICA a 5 punte con 10 numeri in progressione aritmetica e in particolare con i primi 10 numeri naturali (1, 2, 3, ..., 9, 10).

QUESTIONE 145

GARA MATEMATICA 1973
MATHESIS - Sezione di MESSINA

Due traghetti partono nello stesso istante dalle rive opposte di un fiume che attraversano secondo rotte perpendicolari alle sponde. Ciascun traghetto viaggia a velocità costante, ma uno a velocità maggiore dell'altro. Essi si incrociano in un punto a 720 m dalla sponda più vicina. Entrambi i traghetti si fermano agli ormeggi per 10 minuti prima di ripartire. Al ritorno si incrociano nuovamente a 100 m dalla seconda sponda.

Quanto è largo il fiume?

La maggior parte dei RISOLUTORI ha inviato una risoluzione analoga alla seguente:

RISOLUZIONE

Dette x la lunghezza del fiume, v_1 la velocità del traghetto più veloce e v_2 la velocità di quello più lento, si ha il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x-720}{v_1} = \dfrac{720}{v_2} \\[2mm] \dfrac{x}{v_1} + 10 + \dfrac{x-100}{v_1} = \dfrac{x}{v_2} + 10 + \dfrac{100}{v_2} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{x-720}{720} \\[2mm] \dfrac{2x-100}{v_1} = \dfrac{x+100}{v_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{x-720}{720} \\[2mm] \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{2x-100}{x+100} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{x-720}{720} = \frac{2x-100}{x+100}\ ; \Rightarrow$$

.... $x^2 - 2060x = 0$

da cui, risolvendo e scartando la soluzione nulla, si ha:

$$x = 2060\ (m).$$

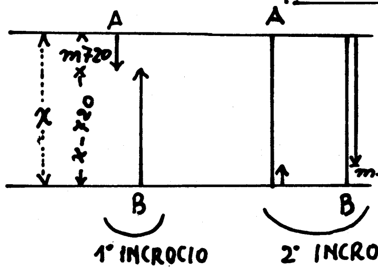
La sosta agli ormeggi non interviene nella risoluzione del problema. —

Molto più interessante è la

RISOLUZIONE

di Mauro Bigi
del L. Sc. "CASTELNUOVO" di FIRENZE

Indico con x la larghezza del fiume. Dal grafico si deduce facilmente che al primo incro-



cio i due traghetti hanno percorso complessivamente la larghezza del fiume. Al secondo incrocio invece essi avranno percorso insieme tre volte la larghezza

Dato che ciascun traghetto va a velocità costante si può asserire che il percorso di ogni traghetto al 2° incrocio è *triplo* del percorso fatto fino al 1° incrocio. Con riferimento

al traghetto A	oppure	al traghetto B
si ha l'equazione		si ha l'equazione.
$x + 100 = 3 \cdot 720$	da cui	$2x - 100 = 3(x - 720)$
$x = 2060$ (m)		$x = 2060$ (m)

LE RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI 146 - 150 SARANNO PUBBLICATE NEI PROSSIMI FASCICOLI.

QUESTIONE 151

Ricostruire l'addizione criptaritmetica.
Quante soluzioni ?

$$\begin{array}{ccccc} & & T & R & E\ + \\ & & T & R & E\ + \\ S & E & T & T & E\ + \\ S & E & T & T & E\ = \\ \hline V & E & N & T & I \end{array}$$

Fernando Rossi

RISOLUZIONE di Roberto Martinolli del L. Sc. "G. Oberdan" di TRIESTE, di Giuseppe Guarato di VALDAGNO e di Emma Frigerio di MILANO

Dallo schema dell'operazione da ricostruire si ha $T, S, V \neq 0$; e inoltre

$$\begin{array}{llll} (1) & 4 \cdot E & = I + 10m & \text{con } m = 0,1,2,3 \\ (2) & 2 \cdot R + T + m & = 10n & n = 1,2,3 \\ (3) & 4 \cdot T + n & = N + 10p & p = 1,2,3 \\ (4) & E + p & = 10 & \\ (5) & 2 \cdot S + 1 & = V & \end{array}$$

Consideriamo i tre casi definiti dai possibili valori di p, tenendo presenti le cinque equazioni precedenti.

$\boxed{p=1}$ Dalla (4) $E = 9$; dalla (1) $I = 6$ ed $m = 3$; per la (2) T è dispari e per la (3) deve essere

$1 < T < 5$; quindi $T = 3$

per $n = 1 \Rightarrow R = 2$; $\underline{N = 3 = T}$ (▾)

per $n = 2 \Rightarrow R = 7$; $N = 4$; $S = 2$; $V = 5$.

e si ha la PRIMA SOLUZIONE (★)

per $n = 3 \Rightarrow \underline{R = 12}$ (▾)

(▾) Le relazioni sottolineate non sono accettabili.

$\boxed{p=2}$ $\Longrightarrow$ $E=8$; $I=2$; $m=3$;

per la (2) T è dispari e per la (3) deve essere

$$5 \leq T \leq 7$$

Se $T=5$

per $n=1$ $\Rightarrow$ $\underline{R=1=N}$ (v)

per $n=2$ $\Rightarrow$ $\underline{N=2=I}$ (v)

per $n=3$ $\Rightarrow$ $\underline{R=11}$ (v)

Se $T=7$

per $n=1$ $\Rightarrow$ $R=0$; $N=9$; $S=1$; $V=3$

e si ha la SECONDA SOLUZIONE (**)

$\left.\begin{array}{l}\text{per } n=2 \\ \text{per } n=3\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{N>9}$ (v)

$\boxed{p=3}$ $\Longrightarrow$ $E=7$; $I=8$; $m=2$;

per la (2) T deve essere pari e per la (3) deve essere $T>6$ cioè $\underline{T=8=I}$ (v)

Dunque le sole soluzioni possibili sono

(*)
$$\begin{array}{r} 379\ + \\ 379\ + \\ 29339\ + \\ 29339\ = \\ \hline 59436\ \ \ \end{array}$$

(**)
$$\begin{array}{r} 708\ + \\ 708\ + \\ 18778\ + \\ 18778\ = \\ \hline 38972\ \ \ \end{array}$$

QUESTIONE 152

Il dividendo di una divisione è 709 e il quoziente è 12. Determinare il divisore e il quoziente. Quante soluzioni esistono?

RISOLUZIONE di Roberto Martinolli del L. Sc. "Oberdan" TRIESTE

Il testo del questione proposta contiene ovviamente un errore di "stampa": ricorre due volte la parola quoziente. Si presentano le alternative:

dividendo $=709$; quoziente $=12$
determinare il divisore d e il resto r.

Debbono verificarsi le disuguaglianze:

$$12d \leq 709 < 13d$$

ossia

$$d \leq \frac{709}{12} \Rightarrow d \leq 59$$

$$d > \frac{709}{13} \Rightarrow d > 54.$$

Ne segue:

$d=$	55	56	57	58	59
$r=$	49	37	25	13	1

dividendo $=709$; resto $=12$
determinare il divisore d e il quoziente q.

Si ha

$$\begin{array}{l|l} 709 & d \\ \hline 12 & q \end{array}$$ cioè $d \cdot q = 709-12 = 697 = 17 \cdot 41$

d e q debbono essere interi e $d>12$.

Si hanno quindi le seguenti soluzioni:

$d=$	17	41	697
$q=$	41	17	1

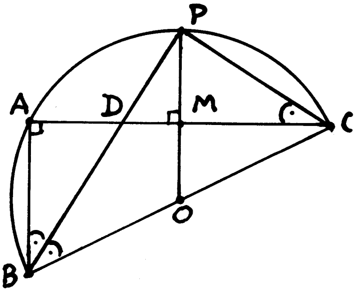
QUESTIONE 153

Un triangolo ABC, rettangolo in A, ha il cateto AC doppio del cateto AB; la bisettrice dell'angolo acuto ABC divide il cateto AC in due parti AD e DC. Dimostrare che AD è la sezione aurea del cateto AB.

Francesco Criscione

RISOLUZIONE geometrica

di Marco Longinetti del Lic. Scient. "L. da Vinci" di FIRENZE



Occorre e basta dimostrare che

$$AB : AD = AD : (AB - AD).$$

Si tracci la semicirconferenza BAC di diametro BC; sia P l'intersezione di questa semicirconferenza con il prolungamento della bisettrice BD; sia P l'intersezione di tale semicirconferenza con il prolungamento della bisettrice BD; sia O il punto medio di BC e sia M l'intersezione di AC con OP.

Si ha $\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{PC}$; $\overline{AM} = \overline{MC} = \overline{AB}$; $OP \perp AC$; $A\hat{B}P = A\hat{C}P$.

Risultano quindi uguali i triangoli rettangoli PMC e DAB.

Ne segue $\overline{PM} = \overline{AD}$. Considerando ora il triangolo rettangolo CPD, per il II teor. di EUCLIDE, si ha:

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{MC} & : & \overline{PM} & = & \overline{PM} & : & \overline{DM} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \overline{AB} & : & \overline{AD} & = & \overline{AD} & : & (\overline{AM} - \overline{AD}) \\ & & & & & & \downarrow \\ \overline{AB} & : & \overline{AD} & = & \overline{AD} & : & (\overline{AB} - \overline{AD}). \end{array}$$

c.d.d.

ERRATA - CORRIGE FASC. 2/3 - 1974

pagina 17	rigo 22	}		
" 18	" 3	}	$\forall a$ leggasi $\forall x$	
" 18	" 16	}		

Rimandiamo al prossimo fascicolo l'elenco dei Risolutori delle questioni 142-145 e 151-153 le cui risoluzioni sono riportate su questo fascicolo.

SCHEDA DI CONTROLLO

I SELEZIONE *dalle* "SCHEDE DIDATTICHE" *di Angolo acuto*

Eseguire le seguenti operazioni:

- $\frac{4}{3} + \frac{5}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} + \frac{10}{9} = \frac{12+10}{9} = \frac{22}{9}$

- $(0{,}2)^3 + (0{,}2)^2 \times (0{,}1) = 0{,}008 + 0{,}04 \times 0{,}1 =$
  $= 0{,}008 + 0{,}004 = 0{,}012$

- $2{,}\bar{3} + 5{,}\bar{6} = 7{,}\bar{9} = 8$ ☒ VERO ☐ FALSO
- $2{,}\bar{3} + 5{,}\bar{6} = \frac{23-2}{9} + \frac{56-5}{9} = \frac{21}{9} + \frac{51}{9} = \frac{72}{9} = 8.$

- $(a^2 b^3 c^k)^2 \cdot (a^3 b^k c^2)^k =$
  $= a^4 b^6 c^{2k} \; a^{3k} b^{k^2} c^{2k} =$
  $= a^{4+3k} b^{6+k^2} c^{4k}$

- $(a^3 b^2 c)^k : (a^k b c^3)^2 =$
  $= a^{3k} b^{2k} c^k : (a^{2k} b^2 c^6) =$
  $= a^k b^{2k-2} c^{k-6}.$

- $a^{-2} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}.$
- $(-b)^{-3} = \left(-\frac{1}{b}\right)^3 = -\frac{1}{b^3}.$
- $\left(\frac{c}{b}\right)^{-2} = \left(\frac{b}{c}\right)^2.$

- $(-0{,}2)^{-2} = \left(-\frac{10}{2}\right)^2 = 5^2 = 25$
- $(0{,}\bar{3})^{-3} = 3^3 = 27.$

- $(15a^8 + 5a^4 - 10a^{12}) : (5a^4) = 3a^4 + 1 - 2a^8.$

- $(a^{25} - a^{15} - 2a^5) : (-a^5) = -a^{20} + a^{10} + 2.$

- $(a^7 + 2a^3 - 3a^5) : (-a^3) = -a^4 - 2 + 3a^2$

- $(x^5 - 2x^3 + x) : (x^4) = x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}$

- $(x^5 - 2x^4 + x) : (x^{-4}) = x^9 - 2x^8 + x^5$

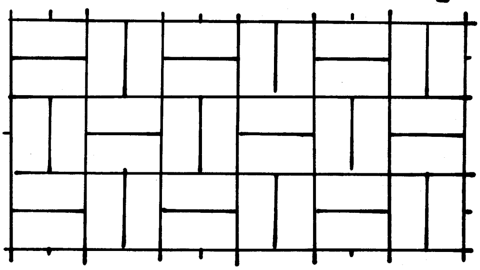
- $(20x^{20} + 15x^{15} - 5x^5) : (5x^{-4}) = 4x^{24} + 3x^{19} - x^9.$

- $(x^4 - 2x^{-3} + x^{-1} + 1) \cdot x^3 = x^7 - 2 + x^2 + x^3.$

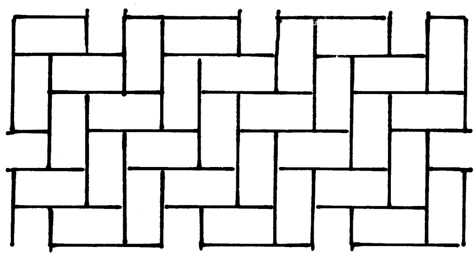
IV SELEZIONE *dalle* "SCHEDE DIDATTICHE" *di Angolo acuto*

• Per ciascuno dei motivi qui disegnati (immaginati estesi per tutto il piano) indicare i centri di simmetria e gli assi di simmetria.

I



II



RISPOSTE

I Disegno

<u>Sono centri di simmetria</u>
i punti medi dei segmenti tracciati nel disegno e i punti di intersezione delle rette tracciate nel disegno

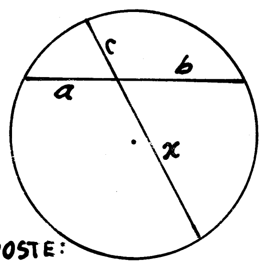
<u>Sono assi di simmetria</u>
le rette contenenti i segmenti allineati.

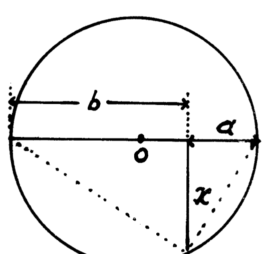
II Disegno

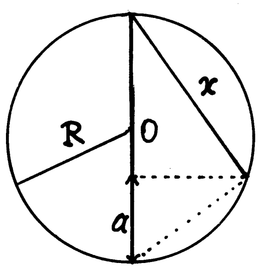
<u>Sono centri di simmetria</u>
i centri di tutti i rettangoli del disegno.

Non esistono assi di simmetria.

• Per ciascuna delle seguenti figure, esprimere la lunghezza del segmento indicato con x, in funzione della lunghezza dei segmenti indicati con a, b, c, R.







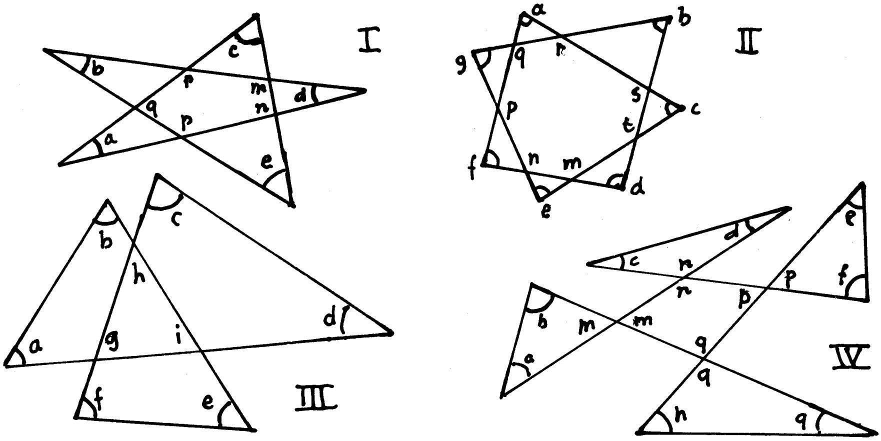
Risposte:

Per il teor. delle corde
$c : a = b : x$,
$\Rightarrow \quad x = \frac{ab}{c}$.

Per il II teor. di Euclide
$a : x = x : b$
$\Rightarrow \quad x = \sqrt{ab}$

Per il I teor. di Euclide
$2R : x = x : (2R-a)$
$\Rightarrow \quad x = \sqrt{2R(2R-a)}$

- Per ciascuna delle seguenti figure determinare la somma degli angoli indicati con un archetto:



RISPOSTE

FIGURA I Posto $\hat{\pi}$ = angolo piatto

si ha:

$$\left.\begin{aligned} \hat{a}+\hat{c}+\hat{n} &= \hat{\pi} \\ \hat{b}+\hat{d}+\hat{p} &= \hat{\pi} \\ \hat{c}+\hat{e}+\hat{q} &= \hat{\pi} \\ \hat{d}+\hat{a}+\hat{r} &= \hat{\pi} \\ \hat{e}+\hat{b}+\hat{m} &= \hat{\pi} \end{aligned}\right\} = 5\hat{\pi}$$

e poichè $\hat{m}+\hat{n}+\hat{p}+\hat{q}+\hat{r} = (5-2)\hat{\pi}$

ne segue $2(\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}+\hat{d}+\hat{e}) = 2\hat{\pi}$

cioè $\underline{\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}+\hat{d}+\hat{e} = \pi}$

FIGURA II Posto $\hat{\pi}$ = angolo piatto

si ha

$$\left.\begin{aligned} \hat{a}+\hat{c}+\hat{e}+\hat{p} &= 2\hat{\pi} \\ \hat{b}+\hat{d}+\hat{f}+\hat{q} &= 2\hat{\pi} \\ \hat{c}+\hat{e}+\hat{g}+\hat{r} &= 2\hat{\pi} \\ \hat{d}+\hat{f}+\hat{a}+\hat{s} &= 2\hat{\pi} \\ \hat{e}+\hat{g}+\hat{b}+\hat{t} &= 2\pi \\ \hat{f}+\hat{a}+\hat{c}+\hat{m} &= 2\pi \\ \hat{g}+\hat{b}+\hat{d}+\hat{n} &= 2\pi \end{aligned}\right\} = 14\hat{\pi}$$

e poichè

$\hat{m}+\hat{n}+\hat{p}+\hat{q}+\hat{r}+\hat{s}+\hat{t} = 5\hat{\pi}$

ne segue

$3(\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}+\hat{d}+\hat{e}+\hat{f}+\hat{g}) + 5\pi = 14\hat{\pi}$

da cui $\underline{\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}+\hat{d}+\hat{e}+\hat{f}+\hat{g} = 3\hat{\pi}}$

FIGURA III Posto $\hat{\pi}$ = angolo piatto si ha

$$\left.\begin{aligned} \hat{a}+\hat{b}+\hat{i} &= \hat{\pi} \\ \hat{c}+\hat{d}+\hat{g} &= \hat{\pi} \\ \hat{e}+\hat{f}+\hat{h} &= \hat{\pi} \end{aligned}\right\} = 3\hat{\pi}$$

e poichè $\hat{g}+\hat{h}+\hat{i} = \hat{\pi}$

ne segue

$\underline{\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}+\hat{d}+\hat{e}+\hat{f} = 2\hat{\pi}}$

FIGURA IV

$$\left.\begin{aligned} \hat{a}+\hat{b}+\hat{m} &= \hat{\pi} \\ \hat{c}+\hat{d}+\hat{n} &= \hat{\pi} \\ \hat{e}+\hat{f}+\hat{p} &= \hat{\pi} \\ \hat{g}+\hat{h}+\hat{q} &= \pi \end{aligned}\right\} = 4\hat{\pi}$$

e poichè $\hat{m}+\hat{n}+\hat{p}+\hat{q} = 2\hat{\pi}$

ne segue

$\underline{\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}+\hat{d}+\hat{e}+\hat{f}+\hat{g}+\hat{h} = 2\hat{\pi}}$

SPEDIZIONE IN ABBONAMENTO POSTALE GRUPPO IV

PER FAVORE NON CESTINATE

Se questo periodico non vi interessa, vi preghiamo di rispedire al mittente le copie ricevute, in busta affrancata come stampe.

ANGOLO ACUTO - Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

Coloro che trattengono ANGOLO ACUTO sono pregati di inviare con sollecitudine la loro quota di abbonamento

LIBRI RICEVUTI

Quaderni del PERIODICO DI MATEMATICHE. Numero 1
BRUNO RIZZI / Problemi di Gare matematiche

[Enunciati, soluzioni e complementi ai problemi assegnati alle gare di Roma (1962, 1970-73) e alle gare nazionali (1971-72)].

In questa raccolta di B. Rizzi non sono indicate soltanto le soluzioni, ma esse sono anche illustrate con commenti e con sviluppi e argomenti connessi e istruttivi.

Le gare matematiche - dice il prof. Bruno de Finetti nella presentazione del volume - costituiscono indubbiamente un elemento e un argomento di grande importanza e interesse nello sviluppo dell'educazione matematica come complemento e, in un certo senso, come antidoto dell'istruzione scolastica.

Certamente il volume è molto interessante per tutti gli Angolisti ai quali se ne consiglia l'acquisto (140 pagine, Lire 2.500) facendone richiesta alla MATHESIS, via Vicenza 23 - 00185 ROMA.

Agli abbonati di ANGOLO ACUTO 1975 detto volume verrà ceduto al prezzo di Lire 2.250.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 gennaio 1970
Direttore responsabile: ***Giuseppe Spinoso***

Stampato dalla Tip. "G. Capponi" - Firenze

Associato all'USPI
Unione Stampa Periodica Italiana