ANNO V - 1974

6

NOVEMBRE DICEMBRE

L'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

Periodico bimestrale
a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

spedizione in abb. postale - gruppo IV
conto corrente postale 5/27919

Abbonamenti per il 1975

Studenti	L. 1800
Professori e Scuole	L. 2200
Sostenitori	L. 3000
Annate arretrate	L. 1800

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio.

PROBLEMI ELEMENTARI DI TOPOLOGIA

Abbiamo avuto occasione di prendere visione, presso la Casa Editrice Le Monnier, dei due volumi, di imminente pubblicazione, del nuovo corso di Matematica per la Scuola Media dei Proff. C. Bernardi, L. Cateni e F. Michetti: «NUMERI E LETTERE» e «LE FIGURE», e siamo lieti di poter pubblicare - in anteprima - per gli Angolisti, per gentile concessione della Casa Editrice e degli Autori, alcune pagine tratte dal Cap. X del volume «LE FIGURE».

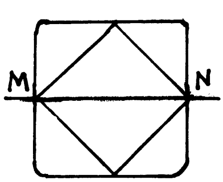


fig. 9

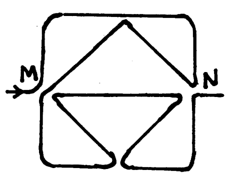


fig. 10

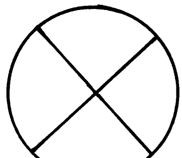


fig. 11

I due volumi sono veramente interessanti dal punto di vista didattico-psicologico: infatti gli Autori sono partiti dalla giusta convinzione che lo studio della matematica debba essere concepito non tanto come apprendimento di particolari nozioni quanto invece come metodo di educazione del pensiero e come strumento di educazione logica e di sintesi espressiva.

Siamo piuttosto imbarazzati nella scelta delle pagine da pubblicare, tra quelle che trattano la teoria degli insiemi, le trasformazioni geometriche, le rubriche «esercitazioni collettive» *e* «lavori di gruppo» *e gli originali nuovi quesiti capaci di stimolare vivo interesse e passione per le ricerche di carattere logico-matematico.*

Per esigenze di spazio dobbiamo limitarci a pubblicare qualche pagina sui problemi di TOPOLOGIA *(cap. X, § 2).*

★ La TOPOLOGIA è uno dei rami più recenti della geometria. Anche se alcuni problemi topologici erano stati già in precedenza affrontati, lo studio sistematico di questa materia ebbe inizio solo verso la metà del secolo scorso. Pur essendosi sviluppata in un periodo di tempo relativamente breve, la topologia ha assunto una importanza fondamentale sia nella geometria, sia per le sue applicazioni alle altre discipline scientifiche.

★ Dare una esauriente definizione della topologia con linguaggio elementare è cosa praticamente impossibile. Ci limitiamo pertanto a precisare che la topologia si disinteressa di uguaglianze e disuguaglianze fra grandezze e dell'idea stessa di misura. Essa, invece, si occupa della proprietà che riguardano le reciproche posizioni di linee e punti; in particolari studia quelle proprietà che restano valide anche quando le figure prese in esame vengono *deformate*. (Il significato del vocabolo *deformare* dovrebbe essere chiaro di per sè. Comunque, facciamo presente che, nella pratica, si può deformare una figura F che sia stata preventivamente disegnata su di una lamina, sottoponendo tale lamina a trazioni, torsioni, pressioni di ogni tipo, purchè queste non determinino sovrapposizioni di punti nè lacerazioni del materiale elastico).

Ad ogni modo gli aspetti più elementari della topologia risulteranno più chiari dopo la lettura dei problemi seguenti (scelti fra quelli che hanno le caratteristiche di un gioco).

★ PROBLEMA I. *Linee tracciabili con tratto continuo.*

Si osservi la fig. 9: è possibile disegnarla senza mai staccare la penna dal foglio e senza mai ripassare con la punta scrivente su una linea già tracciata? Dopo qualche tentativo si riesce senza difficoltà a trovare una soluzione; ad esempio quella indicata nella figura 10. (Si osservi, in proposito, che la punta scrivente, pur non dovendo passare una seconda volta su nessuna delle linee che compongono la figura, è «autorizzata» a passare più volte sugli estremi, come M ed N, di quelle linee).

Se, invece, consideriamo la circonferenza con due diametri della figura 11 ci accorgiamo che per quanti tentativi si facciano, non si riesce ad eseguire il disegno con un *tratto continuo* (cioè con i criteri illustrati per il caso precedente).

★ Lasciamo ai lettori la fatica e ....il divertimento di verificare che le figure 12 e 13 possono essere tracciate con disegni a tratto continuo, mentre per le figure 14 e 15, che pur sembrano più semplici delle precedenti, la cosa non è realizzabile in alcun modo.

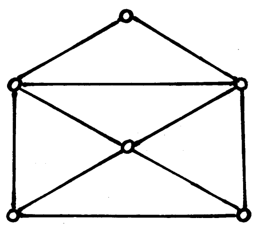


fig. 12

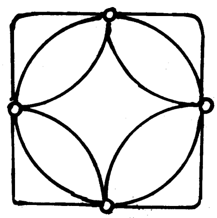


fig. 13

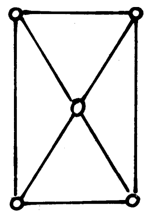


fig. 14

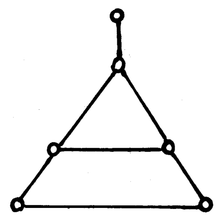


fig. 15

L'esame delle figure fin qui considerate ci suggerisce una osservazione di notevole interesse. Si nota infatti che la figura 14 si può ottenere *deformando* la figura 11 (.....). E, inoltre, che le due figure hanno lo stesso comportamento rispetto al problema considerato; cioè che entrambe *non* possono essere tracciate con tratto continuo.

La generalizzazione del discorso è del tutto intuitiva: *Il disegno a tratto continuo di una figura F', ottenuta per «deformazione» da una data figura F, è possibile o impossibile dipendentemente dal fatto che tale disegno sia possibile o impossibile per la figura F.*

* Tutto quanto abbiamo detto fin qui ha carattere introduttivo. Il punto centrale del nostro problema sta, infatti nella domanda: «esiste un metodo per distinguere le figure tracciabili a tratto continuo dalle altre?».

La risposta è positiva e sorprendentemente semplice.

Occorre esaminare gli *estremi* delle varie linee che compaiono nel disegno che ci interessa (e che nelle figure 12-15 abbiamo contrassegnato con cerchietti). Ciascuno di tali estremi è comune:
o ad un numero pari (2,4,6,...) di linee e, allora, lo chiameremo NODO PARI,
o ad un numero dispari (1,3,5,...) di linee e, allora, lo chiameremo NODO DISPARI.

Ebbene: *i nodi pari non hanno alcuna rilevanza; contano solo i nodi dispari*. Più precisamente, *se di nodi dispari ve ne sono due o nessuno, allora la figura più essere tracciata a tratto continuo; in caso contrario il disegno a tratto continuo è impossibile*. (Tralasciamo la corrispondente dimostrazione benchè sia abbastanza semplice).

Torniamo ad osservare i disegni delle figure 12 e 13 che abbiamo visto essere effettuabili a tratto continuo: nella prima vi sono due nodi dispari e nella seconda non ve ne è alcuno. Se, poi, consideriamo i disegni non tracciabili a tratto continuo di cui alle figure 14 e 15, notiamo che presentano entrambi quattro nodi dispari.

* Altre proprietà riguardanti l'argomento sono le seguenti:

mentre i nodi pari possono essere in numero qualunque, i nodi dispari o sono in numero pari (2, 4, 6,...) o non ci sono affatto;

se i nodi dispari sono due, il disegno a tratto continuo va necessariamente iniziato da uno di essi; se i nodi dispari non ci sono, allora il disegno può essere iniziato da un punto qualunque.

SEGUONO: PROBLEMA II - Il foglio di Möbius
PROBLEMA III - La questione dei quattro colori (ovvero la colorazione delle carte geografiche.

**

Vedere QUESITI TOPOLOGICI a pag. 14.

LA PALESTRA DELLE GARE

AVVERTENZE IMPORTANTI PER I RISOLUTORI *Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte. Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale. Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età. Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad*

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE

al più presto possibile

Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori. Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.

QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE

CRIPTARITMETICA

Determinare le cifre N, O, U sapendo che esiste l'uguaglianza

UNO (in base 7) = ONU (in base 9)

QUESTIONE

CRIPTARITMETICA

Ricostruire l'uguaglianza

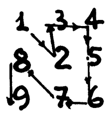
$$MADRE = (M+A+D+R+E)^3.$$

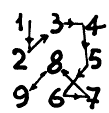
QUESTIONE

Con le nove cifre significative si possono formare tre numeri di tre cifre, tali che uno sia uguale alla somma degli altri due. Esempio:

$$\begin{array}{r} 569+ \\ 214= \\ \hline 783 \end{array}$$

Le nove cifre si possono anche disporre in una matrice di tre per tre, in modo che formino una catena connessa da una linea continua che attraversi una sola volta da ogni casella.
Esempi:





Quante disposizioni soddisfano contemporaneamente alle due predette condizioni?

Fernando Rossi

QUESTIONE

In un cerchio, una corda AB è uguale al lato di un triangolo equilatero inscritto e P è un punto appartenente al maggiore dei due archi di estremi A, B.

Descritta la circonferenza di diametro AB che incontri le congiungenti AP e BP in M e N, dimostrare che al variare di P sulla circonferenza, si ha sempre

$$AP = 2 \cdot PN$$

e che la lunghezza del segmento MN rimane costante.

Angelo Cacciavillani.

QUESTIONE

Fra due potenze successive di 3,

$$3^K \text{ e } 3^{K+1},$$

ci sono sempre UNA o DUE potenze successive di 2.

QUESTIONE

Determinare la minima distanza della retta di equazione

$$4x - 3y + 12 = 0$$

dalla parabola di equazione

$$y^2 = 8x.$$

P. Scirè.

QUESTIONE

Alle migliori RISPOSTE di questa questione saranno assegnati due primi :

PRIMO	PREMIO	Lire 3000
SECONDO	PREMIO	Lire 2000.

Costruire un trapezio isoscele di perimetro dato $2p$, circoscritto ad una semicirconferenza di raggio dato r. E' richiesta una risoluzione GEOMETRICA. Discussione.

RUBRICA "INTERMEDIARIO"

DOMANDA N. 2 - *Estensione* - Fascicolo 2/3 - 1974. Pagina 27.

Se n *è un numero primo e se* a *e* b *sono primi con* n, *la differenza*

$$a^{n-1} - b^{n-1}$$

è divisibile per n.?

RISPOSTA

di Giuseppe Guarato di VALDAGNO

La risposta è affermativa e la dimostrazione è facilmente deducibile dal teorema di FERMAT:

« *Se* n *è un numero primo non divisore del numero* a, *allora* :

$$a^{n-1} \equiv 1 \quad (mod.\ n) »$$

Per tale teorema deve essere:

$$a^{n-1} \equiv 1 \quad (mod.\ n),$$
$$b^{n-1} \equiv 1 \quad (mod.\ n);$$

da cui sottraendo membro a membro risulta:

$$a^{n-1} - b^{n-1} \equiv 0 \quad (mod.\ n)$$

ossia $a^{n-1} - b^{n-1}$ è divisibile per n.

RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 150

Un cubo di cubi

Dentro una scatola cubica di 49 cm di lato (interno) sono sistemati dei cubetti rispettivamente di cm 3, cm 5 e cm 7 di spigolo. Complessivamente sono 659 cubetti e sono sistemati nella scatola in modo che non vi siano interstizi nè tra loro nè con le pareti della scatola. Determinare il numero di cubetti di ciascuna grandezza e indicare il modo in cui possono essere sistemati nella scatola.

Bruno Giordano

RISOLUZIONE

di Mauro Bigi del Lic. Scient. "G.Castelnuovo" *di* FIRENZE

Siano x, y e z rispettivamenti i cubetti di cm 3, di cm 5 e di cm 7 di spigolo.

Si ha il sistema:

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x+y+z=659 \\ 3^3x+5^3y+7^3z=49^3 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x+y+z=659 \\ 27x+125y+343z=117\,649 \end{cases}$$

Eliminando la x e semplificando si ha l'equazione

$$49y+158z=49\,928$$

da cui

$$z=\frac{49\,928}{158}-\frac{49}{158}y\,;$$

ovvero

$$z=316-\frac{49}{158}y\,.$$

Dovendo essere z un numero naturale si hanno i seguenti valori possibili di y:

$y_1=158$, $y_2=2\cdot158=316$, $y_3=3\cdot158=474$,

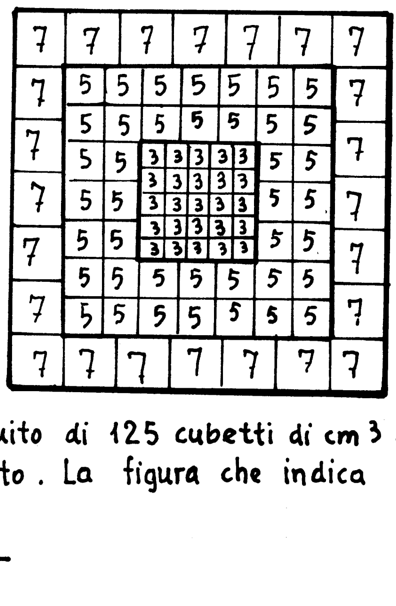
e corrispondentemente di z e di x:

$z_1=267$, $z_2=218$, $z_3=169$,

$x_1=234$, $x_2=125$, $x_3=16$.

I cubetti della seconda terna $x_2=125$, $y_2=316$, $z_2=218$ possono essere disposti nella scatola nel modo seguente:

Un primo "GUSCIO" adiacente alle pareti costituito dai 218 cubetti di cm 7 di lato; un secondo e un terzo guscio costituito dai 316 cubetti di cm 5 di lato ed infine un cubo centrale costi-



tuito di 125 cubetti di cm 3 di lato. La figura che indica la sezione con un piano di simmetria parallelo a due facce opposte della scatola chiarisce la disposizione dei cubi.

Le altre due soluzioni del sistema (I) non sono soluzioni del problema geometrico.

RISOLUZIONE di Roberto Martinolli del L.Sc. "Oberdan" di TRIESTE.

I cubi possono essere sistemati nella scatola in due modi diversi:

I) coprendo, internamente, tre facce della cavità cubica che abbiano, due a due, uno spigolo in comune, con cubi tutti delle stesse dimensioni, si riduce il volume iniziale del cubo a quello di un cubo di lato minore; si prosegue nello stesso modo fino a lasciare uno spazio cubico che possa essere riempito con i rimanenti cubi.

II) coprendo, internamente, le sei facce della cavità cubica con un guscio di cubi delle stesse dimensioni, si lascia nell'interno uno spazio cubico minore; si prosegue successivamente con gusci concentrici fino a riempirlo completamente.

Dal punto di vista pratico è più facile seguire il primo modo.

[*Nota della Redazione:* È facile sistemare i cubi anche seguendo il secondo modo, purchè i cubi occorrenti per la faccia superiore di ciascun guscio si accantònino per sistemarli in un secondo tempo in ordine inverso, cioè a cominciare dal guscio più interno]

Il primo strato di cubi deve essere di cm 7 di lato perchè gli altri cubi lascerebbero degli spazi vuoti. Si ottiene quindi una cavità cubica di 42 cm di lato.

A questo punto si potrebbe proseguire con uno strato di cubi o di cm 7 di lato o di cm 3 di lato (Infatti 42 è divisibile per 7 e per 3). Indichiamo qui le serie di cubi che si possono disporre per strati nella scatola.

Si hanno le seguenti possibilità:

Indichiamo con $\boxed{K}$ un cubo di lato K cm

I	$7\,\boxed{7}$
II	$4\,\boxed{7} + 7\,\boxed{3}$
III	$4\,\boxed{7} + 2\,\boxed{3} + 3\,\boxed{5}$
IV	$2\,\boxed{7} + 7\,\boxed{5}$
V	$2\,\boxed{7} + 1\,\boxed{5} + 10\,\boxed{3}$
VI	$2\,\boxed{7} + 4\,\boxed{5} + 5\,\boxed{3}$
VII	$2\,\boxed{7} + 1\,\boxed{5} + 5\,\boxed{3} + 3\,\boxed{5}$
VIII	$2\,\boxed{7} + 1\,\boxed{5} + 3\,\boxed{3} + 3\,\boxed{7}$
IX	$1\,\boxed{7} + 14\,\boxed{3}$
X	$1\,\boxed{7} + 9\,\boxed{3} + 3\,\boxed{5}$
XI	$1\,\boxed{7} + 7\,\boxed{3} + 3\,\boxed{7}$
XII	$1\,\boxed{7} + 4\,\boxed{3} + 6\,\boxed{5}$
XIII	$1\,\boxed{7} + 4\,\boxed{3} + 3\,\boxed{5} + 5\,\boxed{3}$.

Si possono eliminare subito

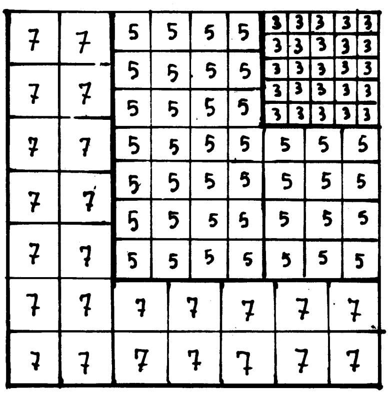
la serie I)
che non comprende nè $\boxed{5}$ nè $\boxed{3}$,
le serie II), IX) e XI)
che non comprendono $\boxed{5}$
e la serie IV)
che non comprende $\boxed{3}$

Per calcolare il numero n dei cubi occorrenti per ogni strato si può usare la formula

$$n = \left(\frac{l}{m}\right)^3 - \left(\frac{l-m}{m}\right)^3 = \cdots = 1 + 3 \cdot \frac{l}{m} \cdot \left(\frac{l}{m} - 1\right)$$

con l lunghezza dello spigolo esterno dello strato ed m spessore dello strato.

Si può così sapere quanti cubi richiede complessivamente ciascuna serie e si conclude che l'unica serie che richiede esattamente i 659 cubi previsti dall'enunciato è la VI).



Ecco come si presenta una delle tre facce della cavità cubica sulle quali si adagiano cubi delle tre dimensioni.

II) Anche in questo caso, è necessario che il primo guscio di cubi sia di cm 7 [NOTA della REDAZIONE: si può sistemare il fondo e le quattro pareti e accantonare i 25 cubi necessari per completare la copertura; oppure si può sistemare un doppio fondo e le quattro pareti ma in questa seconda disposizione si perde la simmetria centrale].

Si sistemano poi i gusci più interni con cubi di cm 7, o di cm 5 o di cm 3.

Si hanno le seguenti possibilità:

1) $7\boxed{7}$
2) $2\boxed{7} + 7\boxed{3} + 2\boxed{7}$
3) $2\boxed{7} + 1\boxed{3} + 3\boxed{5} + 1\boxed{3} + 2\boxed{7}$
4) $1\boxed{7} + 7\boxed{5} + 1\boxed{7}$
5) $1\boxed{7} + 2\boxed{5} + 5\boxed{3} + 2\boxed{5} + 1\boxed{7}$

Si leggano le serie come se rappresentassero successivamente i cubi presi secondo un asse di simmetria della cavità cubica iniziale.

Si possono eliminare subito le serie 1), 2) e 4) che non comprendono cubi delle tre misure.

Per calcolare il numero n di cubi necessari per formare un guscio si può usare la formula

$$n = \left(\frac{l}{m}\right)^3 - \left(\frac{l-2m}{m}\right)^3 = \cdots = 8 + 6\frac{l}{m}\left(\frac{l}{m} - 2\right).$$

con l lunghezza dello spigolo esterno del guscio ed m spessore del guscio.

Si trova così che soltanto la serie 5) richiede esattamente i 659 cubi indicati dall'enunciato. Si può osservare che i due procedimenti indicati si possono usare insieme alternativamente; ad esempio dopo un rivestimento per strati su tre facce (1° procedimento) si ottiene una cavità cubica a cui si può applicare il secondo procedimento: rivestimento per gusci sulle sei facce.

E' facile osservare inoltre che in ciascuna delle due disposizioni (per strati o per gusci) si impiegano sempre 218 cubi di cm 7 di lato, 316 di cm 5 di lato e 125 cubi di cm 3 di lato.

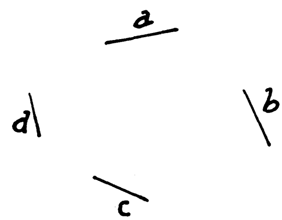
Ai volonterosi Angolisti il compito di calcolare il numero complessivo di cubetti occorrenti per ciascuna delle disposizioni previste e formulare quesiti analoghi a quello in esame.

Le RISOLUZIONI delle QUESTIONI 151, 152 e 153 sono state già pubblicate nel fascicolo precedente V, 5 - Sett.-ott. 1974 - pagg. 10-12

QUESTIONE 154

Un quadrilatero MNPR, con i vertici inaccessibili, è individuato dai frammenti a, b, c, d dei lati MN, NP, PR, RM.
Individuare il tracciato delle due diagonali MP ed NR

Alfonso La Paglia (BIELLA)



RISOLUZIONE GRAFICA del Proponente.

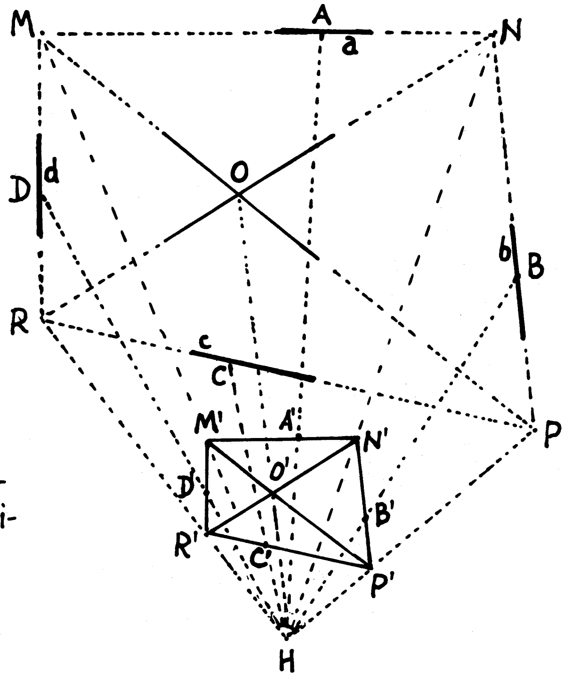
(Le linee facenti capo ai vertici inaccessibili sono indicate solo per la dimostrazione).

Quattro punti arbitrari A, B, C, D scelti rispettivamente sui frammenti a, b, c, d dati, si uniscano con un punto arbitrario H non appartenente alle loro rette. Sulle congiungenti si prenda $HA' = \frac{1}{n} HA$, $HB' = \frac{1}{n} HB$; $HC' = \frac{1}{n} HC$, $HD' = \frac{1}{n} HD$ (n qualunque; in figura $n = 3$).

Conducendo da A', B', C', D' le parallele ai frammenti a, b, c, d, si ottiene un quadrilatero M'N'P'R' simile, anzi omotetico, al quadrilatero MNPR rispetto al centro H con il rapporto $\frac{1}{n}$.

I due quadrilateri hanno allora parallele (oltre ai lati), anche

le diagonali i cui punti di incontro sono O' e O, allineati con H.
Essendo O' noto, si trova O facendo $HO = n \cdot HO'$, e da O si conducano le diagonali cercate conducendo le parallele alle diagonali di M'N'P'R'.



QUESTIONE 155

Dimostrare che se a e b sono due numeri naturali primi fra loro, la loro somma $a+b$ e la loro differenza sono entrambe prime con il loro prodotto ab. M.M.

RISOLUZIONE di
di Anna Maria Batic del Liceo Scientifico Sloveno di TRIESTE

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO. Se $a+b$ e ab non fossero primi fra loro ammetterebbero un fattore primo comune. Questo fattore dividendo il prodotto ab dovrebbe dividere uno dei suoi fattori, per esempio il fattore a; e allora il fattore comune, dividendo $a+b$ ed a, dovrebbe dividere anche b; ma allora a e b non sarebbero primi fra loro (come si era supposto). Dunque $a+b$ ed ab non possono ammettere fattori comuni.
Allo stesso modo si dimostra che $a-b$ e ab sono primi fra loro.

Per il 1975 ogni Angolista procuri almeno un nuovo Abbonato.

QUESTIONE 156

Trovare due numeri sapendo che il loro M.C.D. è 3 e che il loro m.c.m. è 2520.
Quante coppie di numeri soddisfano alle condizioni sopra indicate? M. M.

RISOLUZIONE di Marco Succi del Lic. Sc. "A. Volta" di MILANO e di Maurizio Berni del Lic. Scient. "L. Spallanzani" di REGGIO EM.

Indicando con x e y i due numeri, deve essere:

$$xy = 3 \cdot 2520 = 3 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \;;$$

$$xy = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \qquad (1)$$

e poichè deve essere:

$$M.C.D.(x, y) = 3$$

dalla (1) si ricavano facilmente le seguenti coppie

x		y
3	$= 3$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$
9	$= 3^2$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$
24	$= 3 \cdot 2^3$	$3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 315$
72	$= 3^2 \cdot 2^3$	$3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$
15	$= 3 \cdot 5$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$
45	$= 3^2 \cdot 5$	$2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$
21	$= 3 \cdot 7$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$
63	$= 3^2 \cdot 7$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

e ordinando:

x	y
3	2520
9	840
15	504
21	360
24	315
45	168
63	120
72	105

Altre otto soluzioni si ottengono scambiando tra loro i valori sopra indicati.

LE RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI 146, 147, 148, 149, 157, 158, 165, 166 relative ai temi di matematica proposti alla MATURITA' SCIENTIFICA (SESSIONE ORDINARIA E SESSIONE SUPPLETIVA) 1973, saranno pubblicate in un fascicolo supplementare, che sarà inviato ai soli Abbonati 1975.

QUESTIONE 159

CRIPTARITMETICA. Ricostruire la seguente moltiplicazione:

$$\begin{array}{r} T\;R\;E\;X \\ N\;O \\ \hline B\;O\;E \\ N\;O\;E\;\;\; \\ \hline M\;A\;R\;E \end{array}$$

RISOLUZIONE di Letizia Tricerri del L. Sc. "Albert Einstein" di MILANO.

Essendo $O+E = \ldots R$
deve essere $E \neq$ zero ;

N ed O (del secondo fattore), oltre ad essere diversi da zero, debbono essere anche diversi da 1 (perchè i due prodotti parziali BOE e NOE sono diversi dal primo fattore TRE), e debbono essere diversi da 9 (perchè i due prodotti parziali sono di tre cifre. Inoltre si ha $E \cdot O = \dots E$ e $E \cdot N = \dots E$ e, poichè l'unica cifra ($\neq 0$) che, moltiplicata per due numeri distinti (O ed N) dia due prodotti che abbiano per cifra delle unità la cifra di partenza, è 5 si ha $E = 5$.

Va notato ancora che O ed N non possono essere cifre pari; rimangono quindi soltanto due possibilità:

$N = 7$ e $O = 3$
(N del 2° fattore)

da cui $R = 8$; $T = 1; 2; 3 \dots$

$\Rightarrow N > 9$
(N del 2° fattore parziale),

e questa alternativa è da scartare.

oppure

$N = 3$ e $O = 7$

da cui $R = 2$; $T = 1$; $B = 8$; $A = 6$; $M = 4$.

e l'unica soluzione è

$$\begin{array}{r} 125\times \\ 37 \\ \hline 875 \\ 375 \\ \hline 4625 \end{array} \qquad \begin{array}{r} TRE\times \\ NO \\ \hline BOE \\ NOE \\ \hline MARE \end{array}$$

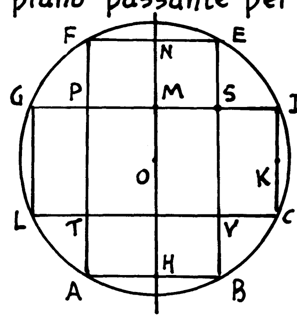
QUESTIONE 160

In una sfera di raggio $25a$ sono inscritti due cilindri coassiali. Si sa che i diametri di base dei due cilindri sono rispettivamente $40a$ e $48a$. Descrivere il solido *RIUNIONE* e il solido *INTERSEZIONE* dei due cilindri calcolando, di ciascuno, l'area della superficie e il volume.

RISOLUZIONE

di Vladi De Bono del L. Scient. "Galilei" di TRIESTE

Secando la sfera e i due cilindri con un piano passante per l'asse dei due cilindri si ha la seguente sezione: →



Il solido INTERSEZIONE I è un cilindro che ha le basi (diametro TV) uguali a quelle del cilindro di base minore e l'altezza SV uguale a quella dell'altro cilindro.

Il solido RIUNIONE R è formato dal cilindro di base maggiore (diametro CL) e da due cilindri uguali (coassiali al primo cilindro) posti sopra e sotto le due basi del primo cilindro, ed aventi le basi (diametro PS e diametro TV) uguali a quella del cilindro di base minore (diametro AB).

Intanto si ha:

$\overline{BH} = 20a$; $\overline{DM} = 24a$; $\overline{BE} = \sqrt{\overline{AE}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{(50a)^2 - (40a)^2} = 30a$;

$\overline{CD} = \sqrt{\overline{LD}^2 - \overline{CL}^2} = \sqrt{(50a)^2 - (48a)^2} = 14a$; $\overline{ES} = \overline{ON} - \overline{OM} = 15a - 7a = 8a$;

Ne segue:

INTERSEZIONE

$$S_I = 2\pi \cdot \overline{MS}^2 + 2\pi \cdot \overline{MS} \cdot \overline{VS} = 2\pi\, \overline{MS}\, (MS + SV) = 2\pi \cdot 20a\,(20a + 14a) = \boxed{1360\, \pi a^2}.$$

$$V_I = \pi\, \overline{MS}^2 \cdot \overline{VS} = \pi (20a)^2 \cdot 14a = \boxed{5600\, \pi a^3}.$$

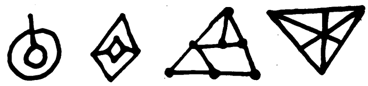
RIUNIONE

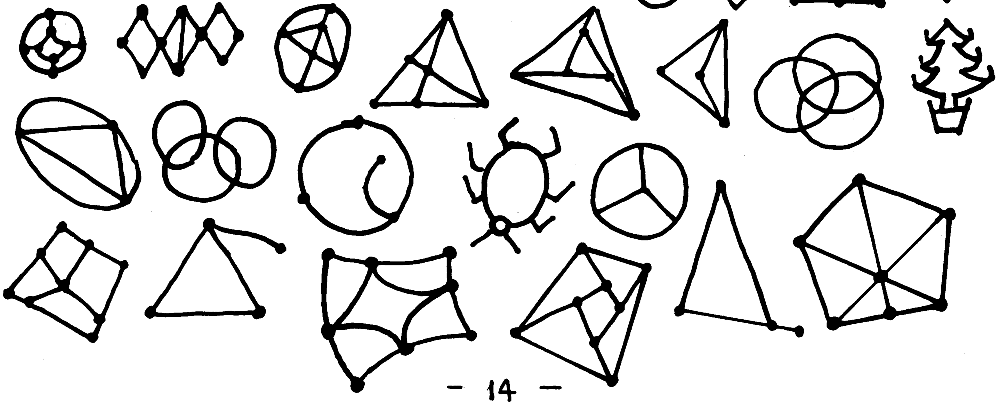
$$S_R = 2\left[\pi \cdot \overline{NE}^2 + \pi(\overline{MD}^2 - \overline{MS}^2) + 2\pi\, \overline{MD} \cdot \overline{OM} + 2\pi \cdot \overline{NE} \cdot \overline{SE}\right] =$$
$$= 2\pi\left[\overline{MD}^2 + 2\, \overline{MD} \cdot \overline{OM} + 2 \cdot \overline{NE} \cdot \overline{SE}\right] =$$
$$= 2\pi\left[(24a^2 + 2 \cdot 24a \cdot 7a + 2 \cdot 20a \cdot 8a\right] = \boxed{2464\, \pi a^2}$$

$$V_R = \left[\pi\, MD^2 \cdot DC + 2\pi\, MS^2 \cdot ES\right] = \pi\left[MD^2 \cdot DC + 2 MS^2 \cdot ES\right] =$$
$$= \pi\left[(24a)^2 14a + 2(20a)^2 \cdot 8a\right] = \boxed{14464\, \pi a^3}.$$

<u>QUESITI TOPOLOGICI</u>. Delle seguenti figure quali sono «TOPOLOGICAMENTE EQUIVALENTI», cioè che si possono ottenere, l'una dall'altra, per «deformazione continua»? Quali sono percorribili «a tratto continuo» e quali non lo sono? E perchè?

A D E F G H I L M R S T V Z





Maturità scientifica 1974

SESSIONE SUPPLETIVA

PRIMO QUESITO. Si determinino i coefficienti dell'equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

in modo che la parabola da essa rappresentata sia tangente alle tre rette rispettivamente di equazione:

$$2x + y - 3 = 0; \qquad 4x - y - 12 = 0; \qquad y = 0 .$$

Detti A, B, C i rispettivi punti di contatto, si determini sull'arco ACB il punto P tale che risulti massima l'area del triangolo APB.

Si calcolino le aree dei segmenti di parabola determinati dai lati AP e PB di tale triangolo.

SECONDO QUESITO. Si consideri la curva di equazione:

$$y = x(x-2)^2$$

e siano A, B, C i suoi punti d'intersezione con la retta di equazione $y = x$.

Se A', B', C' sono gli ulteriori punti comuni alla curva e alle rette tangenti ad essa condotte rispettivamente per A, B, C, si verifichi che A', B', C' sono allineati.

TERZO QUESITO. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

e si determinino i valori delle costanti a, b, c in modo che risulti

$$f(1) = \frac{1}{6}; \qquad f(2) = \frac{1}{24}; \qquad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{8}{15},$$

e si disegni il grafico della funzione così ottenuta.

Si espongano brevemente gli elementi della teoria dei massimi e minimi relativi di una funzione $y = f(x)$.

Ringraziamo la Prof. Pia Brizio di Milano che gentilmente ci ha inviato il testo dei tre quesiti.

N. 41

LA POSTA di *Angolo acuto*

PROF GIUSEPPE SPINOSO

VIACAIROLI 78 FIRENZE

01/11 18.21

203 80711 CS PUX1 107/0959 COSENZA 48/47 1 120C

+ CONSIGLIO DIRETTIVO SEZIONE COSENTINA MATHESIS SEDUTA TRENTA OTTOBRE MILLENOVECENTOSETTANTAQUATTRO HABET NOMINATO SIGNORIA VOSTRA SOCIO ONORARIO PER ESSERSI DISTINTO PER ATTIVITÀ INERENTI LA VALORIZZAZIONE ED IL PROGRESSO DELLE DISCIPLINE SCIENTIFICHE STOP LIETI MERITATO RICONOSCIMENTO DISTINTI SALUTI +

GIUSEPPE PLASTINA PRESIDENTE VITO COSTANTINI SEGRETARIO +

Angolo acuto
Palestra per i Giovani appassionati di Matematica
Periodico a cura di GIUSEPPE SPINOSO
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

Firenze 3 novembre 1974

Al Presidente Prof. Giuseppe Plastina
al Segretario Prof. Vito Costantini
e a tutta la Sezione Cosentina
della MATHESIS
COSENZA

Graditissimo mi è giunto il telegramma che mi comunica la nomina a Socio Onorario della attiva Sezione Cosentina della Mathesis. Ci tengo a precisare che più che a me personalmente tale riconoscimento va indirizzato a tutta la famiglia degli "Angolisti": in particolare ai Giovani partecipanti alle gare della Palestra e agli appassionati Colleghi che disinteressatamente sostengono la mia fatica, con il loro consenso e con la loro preziosa collaborazione.

Sono lieto anche perchè tale riconoscimento mi giunge dalla solerte e tenace Sezione della Mathesis della natia Terra Calabra.

Ringrazio di cuore e formulo l'augurio più fervido di un proficuo lavoro per il secondo decennio di vita della Sezione Cosentina.

Distinti saluti

Giuseppe Spinoso

RISOLUTORI delle QUESTIONI	143	144	145	150	151	152	153	154	155	156	159	160
AGROSI ANIELLO - DISO (LE)	▲		▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲		
BARESI LUISA - OSPITALETTO (BS)					▲		▲			▲		
BATIC ANNA MARIA - L.Sc. Sloveno - TRIESTE							▲	▲	▲	▲		
BENINI ENRICO - L.Sc."Galilei" - TRIESTE					▲	▲	▲	▲	▲			
BIGI MAURO - L.Sc."Castelnuovo" FIRENZE				▲			▲			▲	▲	▲
CAGNOLATI FRANCESCO - L.Sc."Spallanzani" - REGGIO EM.			▲									
D'AMBROSIO LUCIA - Sc. Media - BISCEGLIE (BA)	▲						▲					
D'ANTONIO PASQUA - L.Sc."Einstein" TORINO							▲				▲	
DEL BONO VLADI - L.Sc."Galilei" TRIESTE											▲	▲
FELICIAN LEONARDO - L.Cl."Dante" TRIESTE	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲
FELICIAN LORENZO - Sc. Media - TRIESTE			▲									
FOGLIOTTI FRANCESCO - GENOVA-SAMPIERDARENA	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲
FRIGERIO EMMA - MILANO					▲	▲	▲		▲	▲		
GAI DAVIDE - L.Sc."A. Volta" MILANO					▲	▲	▲			▲		
GINI GINO - THIENE (VI)										▲		
GUARATO GIUSEPPE - VALDAGNO (VI)	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲
JANNELLI ENRICO - L.Sc."Fermi" BARI			▲	▲	▲	▲	▲		▲	▲	▲	▲
LA FAUCI GIUSEPPE - L.Sc."La Farina" MESSINA					▲		▲		▲	▲		
LONGINETTI MARCO - L.Sc."L. da Vinci" FIRENZE		▲	▲		▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲
LUCARDESI PAOLO - L.Sc."Lussana" BERGAMO	▲	▲										
MANGANARO MARCO - L.Sc."Oberdan" TRIESTE		▲	▲	▲	▲	▲	▲		▲		▲	▲
MARTINOLLI ROBERTO - L.Sc."Oberdan" TRIESTE					▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲
ROZZI NADIA - L.Sc."Spallanzani" REGGIO EMILIA										▲	▲	
SUCCI MARCO - L.Sc."A. Volta" MILANO					▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲
TERRANOVA DIEGO - L.Sc."Oberdan" TRIESTE							▲	▲	▲		▲	
VIOLA PAOLO - L.Cl."Dante" TRIESTE	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲				
VIOLA MADDALENA - L.Cl."Dante" TRIESTE								▲			▲	▲
ZENNARO MARINO - L.Sc."Galilei" TRIESTE											▲	▲

AMICI SOSTENITORI di *Angolo acuto*

PROF. MOSCA GIULIO - TERAMO
PROF. ALBANESE MARIA - FIRENZE
PROF. GIOVANNOZZI MARCO - FIRENZE
PROF. MONARI TERESA - MILANO
PROF. VALENTI PIERO - MILANO
PROF. PESCE ANTONIO - FIRENZE
PROF. PALERMO LUIGI - PERUGIA
PROF. VAGHI GIANNA MARIA - MILANO
PROF. PANERAI TULLIA - FIRENZE
PROF. SANDRONI FRANCO - PISA
PROF. ROSELLI ALBERTO - ROVIGO
PROF. BALDI GIOVANNI - TORINO
PROF. PAGLIANO SERGIO - MILANO
PROF. CAVALIERE FERDINANDO - FOGGIA
PROF. SPILINBERGO LUIGIA - ODERZO (TV)

ERRATA-CORRIGE

Fascicolo V, 5 pag. 2.

RIPUBBLICHIAMO LA QUESTIONE 175

Gemellaggio criptaritmetico fra CAPRI e PEDASO: CAPRI è il quadrato di CEL, PEDASO è il cubo di IO. Determinare i due numeri (CAPRI e PEDASO). Soluzione unica.

PEDASO: Comune sulla costa adriatica - prov. di Ascoli Piceno - E' centro agricolo e stazione balneare.

SPEDIZIONE IN ABBONAMENTO POSTALE GRUPPO IV

PER FAVORE NON CESTINATE

Se questo periodico non vi interessa, vi preghiamo
di rispedire al mittente le copie ricevute,
in busta affrancata come stampe.
ANGOLO ACUTO - Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

Coloro che trattengono ANGOLO ACUTO
sono pregati di inviare con sollecitudine
la loro quota di abbonamento

PER RINNOVARE L'ABBONAMENTO per il 1975

gli Angolisti potranno utilizzare il modulo di conto corrente postale inserito in questo fascicolo, oppure inviare con LETTERA RACCOMANDATA l'importo, in francobolli da L. 25 o da L. 50.

Consigliamo agli Angolisti di diventare CORRENTISTI POSTALI. (Sono sufficienti L. 500 per i relativi moduli). Potranno così rinnovare anche l'abbonamento ad "Angolo Acuto" usando il POSTAGIRO, esente da qualsiasi tassa ed evitando perdite di tempo agli sportelli degli uffici postali.

Per la costituzione di un fondo-premi per i più bravi Giovani risolutori delle questioni proposte nella Palestra delle Gare, inviare quote multiple di L. 1.000.

Questo fascicolo contiene il testo del TEMA DI MATEMATICA della MATURITA' SCIENTIFICA 1974. Sessione supplettiva (pagina 15).

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 gennaio 1970
Direttore responsabile: ***Giuseppe Spinoso***

Stampato dalla Tip. "G. Capponi" - Firenze

Associato all'USPI
Unione Stampa Periodica Italiana