ANNO VI - 1975

L'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

giugno 6

Periodico mensile
a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

conto corrente postale 5/27919
telefono 588.429

Abbonamenti per il 1975

Studenti	L.	1800
Professori e Scuole	L.	2200
Sostenitori	L.	3000
Annate arretrate	L.	1800

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio.

RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 146

I QUESITO del tema di Matematica della MATURITA' SCIENTIFICA - 3-7-1973

Si scrivano le equazioni delle due circonferenze C' e C'' tangenti alla parabola di equazione $y = 5 - x^2$ e alla retta di equazione $y = 1$.
[N.d.R.: Occorre precisare che C' e C'' debbano essere BITANGENTI alla parabola, cioè debbono avere i centri sull'assa della parabola, cioè sull'asse della y].
Dopo aver determinato r' e r'' si scriva l'equazione di un'altra circonferenza C''' tangente alla C'', avente il centro sulla retta degli altri due centri e raggio uguale a r'. Inoltre si trovi l'equazione della parabola tangente a C'' ed a C''' e si calcoli l'area della regione del piano limitata dalle due parabole.

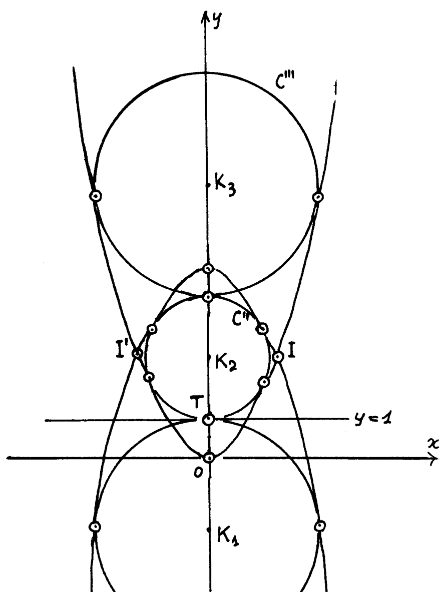
RISOLUZIONE dedotta dalle risposte di Roberto Martinolli del L. Sc. "Oberdan" di TRIESTE, di Leonardo Felician del L.Cl. "Dante" di TRIESTE e di Giuseppe Guarato di VALDAGNO.

Poichè i centri delle due circonferenze C' e C'' debbono essere sull'asse y, le loro equazioni debbono avere la forma

(1) $\quad x^2 + y^2 + ay + b = 0$

Per determinare a e b occorre considerare contemporaneamente i due sistemi

$\begin{cases} x^2+y^2+ay+b=0 \\ y = 5-x^2 \text{ (parabola data).} \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+y^2+ay+b=0 \\ y = 1 \text{ (retta data).} \end{cases}$
da cui eliminando x^2 si ha l'equazione:	da cui eliminando y si ha l'equazione:



$y^2+(a-1)y+b+5=0.$ | $x^2+1+a+b=0.$

Uguagliando a zero i due discriminanti si ha il sistema in a e b:

$$\begin{cases}(a-1)^2-4b-20=0\\ a+b+1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^2+2a-15=0\\ b=-a-1.\end{cases}$$

da cui $\begin{cases}a_1=3\\ b_1=-4\end{cases}$ e $\begin{cases}a_2=-5\\ b_2=4.\end{cases}$

Sostituendo nella (I) si ottengono le equazioni delle circonferenze:

$C')\ x^2+y^2+3y-4=0$; $C'')\ x^2+y^2-5y+4=0$;

i cui centri e raggi sono

$K_1=\left(0;-\frac{3}{2}\right)$ | $K_2=\left(0;\frac{5}{2}\right)$

$r_1=\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{5}{2}.$ | $r_2=\sqrt{\frac{25}{4}-4}=\frac{3}{2}$

I due punti di contatto delle due circonferenze con la retta $y=1$, coincidono nel punto $T(0;1)$. Il centro K_3 della circonfererza C''', tangente *esternamente* alla C'' (nel testo ministeriale non è detto ESTERNAMENTE) ha l'ordinata K''' uguale alla somma dell'ordinata K'' $\left(=\frac{5}{2}\right)$ di K_2 e dei raggi r_1 e r_2; perciò si ha

$$K'''=K''+r_1+r_2=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=\frac{13}{2};$$

$K_3=\left(0;\frac{13}{2}\right)$ E poichè deve essere $r_3=r_1=\frac{5}{2}$, l'equazione di C''' è

$$x^2+\left(y-\frac{13}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

ovvero

$$x^2+y^2-13y+36=0.$$

OSSERVAZIONE: Data la simmetria di C' e di C''' rispetto a K_2, deve essere

$$\overline{K_3K_2}=\overline{K_2K_1},$$

cioè K_2 deve essere il punto medio di K_1K_3; si ha quindi:

$2K''=K'+K'''$ ovvero $2\cdot\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}+K'''$

da cui $K_3=5+\frac{3}{2}=\frac{13}{2}.$

* * *

L'equazione della seconda parabola (bitangente alle circonferenze C'' e C''' e avente per asse l'asse y) deve essere della forma

$$y=ax^2+b \qquad \text{con } a\neq 0$$

Per determinare i coefficienti a e b si considerino contemporaneamente i sistemi:

$$\begin{cases}x^2+y^2-5y+4=0\\ y=ax^2+b\end{cases} \qquad \begin{cases}x^2+y^2-13y+36=0\\ y=ax^2+b\end{cases}$$

Eliminando la x si ha rispettivamente:

$$ay^2-(5a-1)y+4a-b;$$

$$ay^2-(13a-1)y+36a-b=0.$$

Uguagliando a zero i rispettivi discriminanti si ha il sistema in a e b:

$$\begin{cases}(5a-1)^2-4a(4a-b)=0\\ (13a-1)^2-4a(36a-b)=0\end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases}9a^2-10a+4ab+1=0\\ 25a^2-26a+4ab+1=0\end{cases}$$

Risolvendo e tenendo conto che deve essere $a\neq 0$ risulta $a=1, b=0.$ L'equazione della seconda parabola è quindi: $y=x^2.$

* * *

Le coordinate delle intersezioni I e I' delle due parabole si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases}y=5-x^2\\ y=x^2\end{cases} \Rightarrow I\equiv\left(\frac{\sqrt{10}}{2};\frac{5}{2}\right);\ I'\equiv\left(\frac{\sqrt{10}}{2};\frac{5}{2}\right)$$

Detta S l'area della regione limitata dalle due parabole si ha:

$$S=2\int_0^{\frac{\sqrt{10}}{2}}\left[(5-x^2)-x^2\right]dx=$$

$$=2\int_0^{\frac{\sqrt{10}}{2}}\left[5-2x^2\right]dx=$$

$$=2\left[5x-\frac{2}{3}x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{10}}{2}}=2\left[5\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}\right]=$$

$$=\frac{10}{3}\sqrt{10}.$$

Lo stesso risultato si ottiene applicando la REGOLA di ARCHIMEDE sull'area del *segmento parabolico* per cui risulta:

$$S=2\cdot\frac{2}{3}\,\overline{II'}\cdot\overline{K_2O}=$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{10}\cdot\frac{5}{2}=\frac{10}{3}\sqrt{10}.$$

QUESTIONE 147

II QUESITO del Tema di Matematica della MATURITÀ SCIENTIFICA 3-7-1973

Si disegni il grafico della funzione

$$y = \frac{x^2+1}{x^2-1} \qquad (1)$$

e se ne determinino i punti per i quali la distanza dal punto $A(0;1)$ assume valore minimo.

RISOLUZIONE dedotta dalle risposte di Giuseppe Guarato di VALDAGNO e di Enrico Jannelli di BARI.

La funzione in esame indica una cubica razionale. Non ha punti reali d'intersezione con l'asse x ed ha un solo punto reale d'intersezione con l'asse y: il punto $B(0;-1)$.

E' una curva simmetrica rispetto all'asse y (tutti i termini in x hanno esponenti pari).

La y assume valori reali al variare di x da $-\infty$ a $+\infty$ esclusi i valori di $x=-1$ e $x=+1$.

La (1) si può scrivere nel modo seguente

$$x^2 = \frac{y+1}{y-1} \qquad (2)$$

per cui si può asserire che la x assume valori reali per valori di y esterni all'intervallo $(-1 — +1)$.

La curva ammette un asintoto orizzontale di equazione $y=1$, e due asintoti verticali di equazione $x=-1$ e $x=+1$.

Ciò deriva dal calcolo dei seguenti limiti:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{|x|\to 1 \\ (|x|>1)}} y(x) = +\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{|x|\to 1 \\ (|x|<1)}} y(x) = -\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{y\to 1 \\ (y>1)}} x(y) = \pm\infty \end{cases}$$

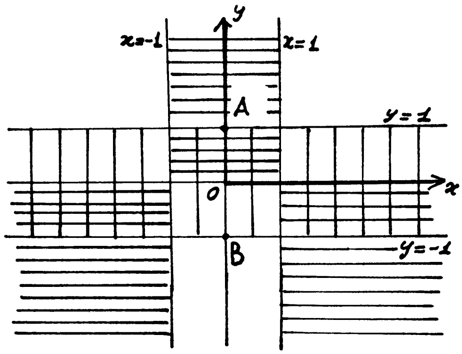
Dall'equazione (1) risulta che è

$y>0$ se $x^2>1$ cioè per valori di x esterni all'intervallo $-1 — +1$,

mentre è

$y<0$ per $-1<x<+1$.

Pertanto la curva giace nelle regioni non tratteggiate nel seguente schema:



La derivata prima della (1) è

$$y'(x) = \dots = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} > 0 \quad \text{per} \quad x<0,$$

perciò la curva rappresentativa cresce per $x<0$ e decresce per $x>0$; per $x=0$ si ha un *massimo relativo*, e tale massimo è appunto $B(0;-1)$.

Inoltre si ha:

$$y'' = \dots = \frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} > 0$$

per $x<-1$ e $x>1$;

pertanto la curva ha la concavità rivolta verso l'alto per $x<-1$ e $x>1$ e verso il basso per $-1<x<1$.

Queste conclusioni permettono di disegnare il grafico della funzione.

* * *

Detto $P_0(x_0;y_0)$ un punto generico della (1) si ha:

$$P_0 \equiv \left(x_0 ; \frac{x_0^2+1}{x_0^2-1} \right);$$

ne segue

$\overline{PA}^2 = z = (0-x_0)^2 + \left(1 - \frac{x_0^2+1}{x_0^2-1}\right)^2 = x_0^2 + \frac{4}{(x_0^2-1)^2}$. Derivando si ha

$$z' = 2x_0 - \frac{16x_0}{(x_0^2-1)^3} = 2x_0\left[1 - \frac{8}{(x_0^2-1)^3}\right] = 2x_0\left(1 - \frac{2}{x_0^2-1}\right)\left[1 + \frac{2}{x_0^2-1} + \frac{4}{(x_0^2-1)^2}\right].$$

L'ultimo fattore di quest'ultimo prodotto è sempre positivo e non si annulla mai, per cui è $z'>0$ per $\frac{2x_0(x_0^2-3)}{x_0^2-1} > 0$

ossia per

$$-\sqrt{3} < x_0 < -1 \ , \quad 0 < x_0 < 1 \quad e \quad x_0 < \sqrt{3} \ ;$$

è $z'<0$ per

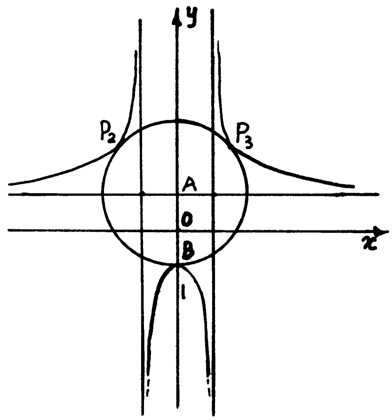
$$x_0 < -\sqrt{3} \ , \quad -1 < x_0 < 0 \quad e \quad 1 < x_0 < \sqrt{3}$$

Ne segue che si hanno tre minimi per

$x_0 = -\sqrt{3}$, $x_0 = 0$; $x_0 = \sqrt{3}$

I punti cercati sono quindi

$C(-\sqrt{3};2)$, $B(0;-1)$ e $D(-\sqrt{3};2)$.



che ovviamente appartengono alla circonferenza di centro A e raggio $AB = 2$, la cui equazione è

$(x-0)^2 + (y-1)^2 = 2^2$ ovvero

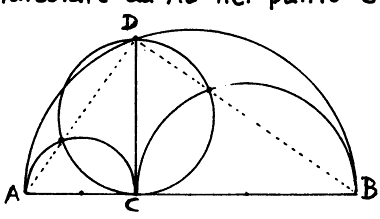
$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$.

Detta circonferenza e la curva (1) risultano tangenti nei tre punti C, B, D sopra indicati.

QUESTIONE 186

Siano AC e CB due segmenti adiacenti; la parte di uno stesso semipiano di origine AB, limitata dalle tre semicirconferenze aventi per diametri i segmenti AB, AC e CB è detta ARBELO.

Dimostrare che la sua area è uguale a quella di un cerchio avente per diametro il segmento CD perpendicolare ad AB nel punto C



RISOLUZIONE di Vincenzo Ciani - I·A del L. Sc. "L. da Vinci" di BISCEGLIE (Bari) PREMIO L.2000 *e di Mauro Bigi - II·B del L.Sc "Castelnuovo" di FIRENZE.* PREMIO L.1500

1). L'area S dell'ARBELO è data dall'area del semicerchio di diametro AB diminuita dalle aree dei semicerchi di diametro AC e CB, cioè si ha:

$$S = \frac{1}{8}\left[(\overline{AC}+\overline{CB})^2 - \overline{AC}^2 - \overline{CB}^2\right]\pi = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{4}\,\overline{AC}\cdot\overline{CB}\cdot\pi \ .$$

2) L'area S_1 del cerchio di diametro CD è:

$$S_1 = \frac{1}{4}\overline{CD}^2\cdot\pi \ .$$

3) D'altra parte, dal triangolo ADB, rettangolo in D, per il 2° teorema di EUCLIDE, risulta che CD è medio proporzionale fra AC e CB ossia

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{CB}$$

Ne segue subito che $S = S_1$.

NOTA di V. Ciani *Si può anche verificare che il contorno dell'ARBELO ha la stessa lunghezza della circonferenza di diametro AB.*

QUESTIONE 187

Ricostruire l'addizione criptaritmetica con le nove cifre significative (da 1 a 9) sapendo che

$$\begin{array}{r} A\ B\ C + \\ D\ E\ F = \\ \hline G\ H\ I. \end{array}$$

$$DEF = 2 \cdot ABC.$$

RISOLUZIONE

di Giuseppe Guarato di VALDAGNO

Poichè la somma delle cifre da 1 a 9 è 45 che è divisibile per 9, anche la somma dei tre numeri ABC, DEF, GHI (che sono formati da quelle cifre tutte distinte e senza ripetizioni) è divisibile per 9. Ne segue che ABC deve essere divisibile per 3 e quindi GHI (= 3·ABC) risulta multiplo di 9. Infatti se fosse

$ABC \equiv 2 \pmod{3}$ o $ABC \equiv 1 \pmod{3}$

allora sarebbe

$DEF \equiv 1 \pmod{3}$ o $DEF \equiv 2 \pmod{3}$

e la somma dei tre numeri sarebbe multipla di 6 e non di 9, in ciascuno dei due casi.

Sarà allora $ABC \equiv 0 \pmod{3}$

Inoltre è

$$ABC = \frac{1}{3} GHI \leq \frac{1}{3} \cdot 981 = 327$$

e A può assumere solo i valori

1, 2, 3.

Sia A = 1. Diamo a B successivamente i valori da 2 a 9 e a C i possibili valori compatibili col fatto che ABC risulti multiplo di 3.

Per B = 2 e B = 3 non si hanno soluzioni perchè risulterebbe

D = B = 2 e G = B = 3

Con questo procedimento si determinano facilmente le quattro soluzioni possibili:

ABC = 192, 219, 273, 327

Ecco le quattro addizioni:

$$\begin{array}{r} 192+ \\ 384= \\ \hline 576 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 219+ \\ 438= \\ \hline 657 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 273+ \\ 546= \\ \hline 819 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 327+ \\ 654= \\ \hline 981 \end{array}$$

L'Angolista Davide Gai del L. Sc. "Volta" di MILANO aggiunge:

«Se fra le cifre fosse incluso lo «zero, si avrebbe una soluzione «in più (N.d.R: Una sola? Sì. Perchè?) «e precisamente:

« ABC + DEF = GHI

« 267 + 534 = 801.

« Inoltre è intessante notare co-«me si possa passare dalla pri-«ma addizione alla seconda e «dalla terza alla quarta, trasportando la colonna delle unità «al posto della colonna delle cen-«tinaia e facendo slittare di un «posto verso destra le altre due «colonne».

QUESTIONE 188

Si consideri il quadrato ABCD di lato AB = ℓ e l'arco BD di centro C e raggio ℓ.

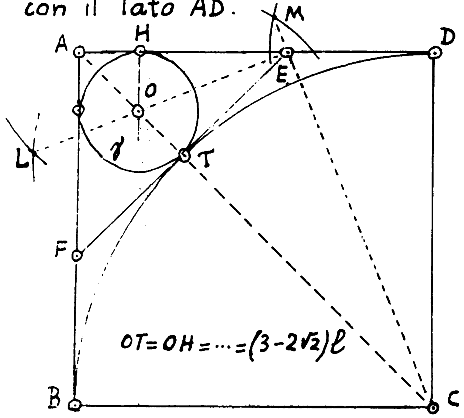
Calcolare l'area del cerchio γ tangente (esternamente) all'arco BD e ai lati AB e AD.

Determinare graficamente la posizione del centro di γ.

RISOLUZIONE

di Giuseppe Guarato di VALDAGNO, di Maura Bigi - L. Sc. "Castelnuovo" di FIRENZE, di Franco Mostardi del L. Sc. "Enriquez" di LIVORNO e di Marco Longinetti del L. Sc. "L. da Vinci" di FIRENZE.

Il centro O di γ è sulla diagonale AC, che incontra la circonferenza di γ e l'arco BD nel loro punto di tangenza comune T. Sia FE la tangente comune e H il punto di tangenza di γ con il lato AD.



Essendo EH = ET e sapendo che il raggio di γ, nel caso particolare, è AH, si deduce che HC perpendicolare per H ad AD, individua sulla AC il centro di γ;

oppure

tenendo presente che O è l'incentro del triangolo AEF, basta condurre la bisettrice EL di $\widehat{AEF}$: si ha $O = (AC \cap EL)$;

oppure

tenendo presente che CM, bisettrice di $\widehat{DCA}$ incontra AD nel punto E, e che la bisettrice EL di $\widehat{AET}$ risulta perpendicolare alla bisettrice dell'angolo adiacente TED, basta condurre per E la EL perpendicolare alla EC.

QUESTIONE 189

Determinare per quali valori di x ($x \in \mathbb{R}$) l'espressione

$$\frac{(x^2-4x+3)(x^2-6x+5)}{(x^2+x-6)(x^2-x-12)}$$

assume valori positivi.

RISOLUZIONE
di Melania Caporaso del L. Scient. "C. Colombo" di Marigliano (Na) e di Francesco Fogliotti di Genova-Sampierdarena.

L'espressione in esame si può scrivere anche così:

$$\frac{(x-3)(x-1)\cdot(x-1)(x-5)}{(x+3)(x-2)\cdot(x+3)(x-4)}$$

La disequazione da risolvere è quindi:

$$\frac{(x-1)^2(x-3)(x-5)}{(x+3)^2(x-2)(x-4)} > 0.$$

La frazione si annulla per

$x = 1$, $x = 3$, $x = 5$

e perde significato per

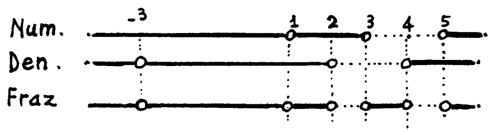
$x = -3$, $x = 2$, $x = 4$

Il numeratore è positivo per

$x < -3$ ($x \neq 1$) e per $x > 5$.

Il denominatore è positivo per

$x < 2$ ($x \neq -3$) e per $x > 4$.



La frazione è positiva per

$x < -3$; $-3 < x < 1$; $1 < x < 2$; $3 < x < 4$; $x > 5$.

LA PALESTRA delle GARE

QUESTIONI PROPOSTE

Avvertenze per i risolutori a pag. 8

QUESTIONE 206

Determinare i quattro numeri primi

ABBB, AACA, DCBD, DBAC.

QUESTIONE 207

Date due circonferenze concentriche di centro O e raggi R ed r (R > r), condurre una secante comune ABCD, che incontri la circonferenza esterna in A e D e quella interna in B e C, in modo che sia AB = BC = CD.

QUESTIONE 208

Studiare la funzione

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

QUESTIONE 209

Determinare le soluzioni della equazione

$$\cos(7x-18^\circ)=\cos(32^\circ-2x),$$

comprese nell'intervallo

$$0^\circ \text{ — } 360^\circ.$$

QUESTIONE 210

Date le parabole di equazione

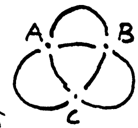
$$y=\frac{x^2}{4}-2x,$$

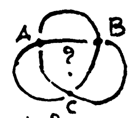
$$y=-\frac{x^2}{4}+x$$

determinare le coordinate dei loro punti di intersezione A e B.
Le tangenti in A e in B alle due parabole determinano un parallelogramma del quale si chiede di calcolare il perimetro e l'area.

QUESTIONE 211

MATHESIS - Sez. MESSINA - Febbr. 1975





Una corda giace sul pavimento nel modo mostrato dalla figura, ma è troppo lontana perchè sia possibile scorgere come è disposta nei punti di incrocio A, B, C.
Qual è la probabilità che la corda formi un nodo?

ERRATA - CORRIGE
FASCICOLO VI, 5, pagina 7
Nella figura il centro della circonferenza è

$$C\left(\frac{b}{2};\frac{a+c}{2}\right).$$

RISOLUTORI delle QUESTIONI	184	185	186	187	188	189
AGROSI ANIELLO - DISO	●		●	●		
BENINI ENRICO - L.Sc."Galilei" - TRIESTE	●		●			
BERNI MAURIZIO - L.Sc. REGGIO EMILIA			●			
BIGI MAURO - L.Sc."Castelnuovo" FIRENZE			●	●	●	●
CAPORASO MELANIA - L.Sc. - MARIGLIANO						●
CASSESE ANTONIO - Ist.Tecn.Comm. NOLA				●		
CIANI VINCENZO - L.Sc. BISCEGLIE			●	●		
DALLA COSTA IRMA - L.Cl. PADOVA	●					
D'ANTONIO PASQUA - L.Sc."Einstein" TORINO			●			●
DE CRESCENZO PASQUALE - NOLA			●	●	●	●
FOGLIOTTI FRANCESCO - GENOVA-SAMPIERD.	●	●	●	●	●	●
FRANCOLINI ALESSANDRO - L.Sc. BORGO S.LORENZO	●					
GAI DAVIDE - L.Sc."A.Volta" MILANO	●		●	●	●	●
GALLAI STEFANO - L.Cl. CITTA' di CASTELLO	●	●				
GRECO PASQUALE - Ist.Tecn.Comm. NOLA				●		
GUARATO GIUSEPPE - VALDAGNO	●	●	●	●	●	●
JANNELLI ENRICO - L.Sc."Fermi" - BARI	●	●	●	●	●	●
LONGINETTI MARCO - L.Sc."L.da Vinci" - FIRENZE	●	●	●	●	●	●
MARCHIONNA MARIO - L.Sc."A.Volta" - MILANO			●		●	●
MARTINOLLI ROBERTO - L.Sc."Oberdan" TRIESTE	●	●	●	●	●	●
MOSTARDI FRANCO - L.Sc."Enriquez" LIVORNO			●		●	●
ROSELLI WALTER - ROVIGO			●			
SUCCI MARCO - L.Sc."A.Volta" MILANO	●	●	●	●	●	●
TERRANOVA DIEGO - L.Sc.Oberdan - TRIESTE	●					
TRICERRI LETIZIA - L.Sc."Einstein - TORINO			●		●	
VIOLA PAOLO - TRIESTE	●	●				
GATTI GUIDO - CREMONA		●				

Le risoluzioni delle Questioni 184 e 185 sono state pubblicate nel fascicolo VI, 5.

SPEDIZIONE IN ABBONAMENTO POSTALE GRUPPO III - 70%

PER FAVORE, NON CESTINATE.

Se questo periodico non vi interessa, vi preghiamo di passarlo ad un appassionato che voglia sottoscrivere l'abbonamento, oppure di respingere le copie ricevute, in busta affrancata come stampe, al mittente:

ANGOLO ACUTO - Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE

ALLA CACCIA DEL TEMA DI MATEMATICA CHE SARA' PROPOSTO ALLA MATURITA' SCIENTIFICA nella SESSIONE SUPPLETIVA 1975

Poichè la busta ministeriale, contenente detto tema, sarà aperta solo dalle Commissioni presso le quali avrà luogo la SESSIONE SUPPLETIVA, preghiamo i Professori, Presidenti o Commissari alla Maturità Scientifica, che ne verranno a conoscenza, di volerci inviare con cortese urgenza una fotocopia o il testo esatto del suddetto tema, per poterlo pubblicare nel prossimo numero di ANGOLO ACUTO. AI PRIMI DIECI ANGOLISTI CHE CI FARANNO PERVENIRE IL TESTO ESATTO SARA' INVIATA IN OMAGGIO UNA ANNATA ARRETRATA DI ANGOLO ACUTO.

Il prossimo fascicolo 7-8 (luglio-agosto) sarà inviato, ai primi di settembre, SOLTANTO agli ABBONATI.

AVVERTENZE IMPORTANTI PER I RISOLUTORI *Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte. Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale. Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età. Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad*

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE
al più presto possibile

Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori. Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 gennaio 1970
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso*

Stampato dalla Tip. "G. Capponi" - Firenze

Associato all'USPI
Unione Stampa Periodica Italiana