Fascicolo triplo: Lire 600

ANNO VI - 1975

L'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

luglio - settembre

7-9

Periodico mensile
a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

conto corrente postale 5/27919
telefono 588.429

Abbonamenti per il 1975

Studenti	L.	1800
Professori e Scuole	L.	2200
Sostenitori	L.	3000
Annate arretrate	L.	1800

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio.

NUMERI PRIMI E NUMERI DI FERMAT

Uno dei più grandi e più originali matematici di tutti i tempi, Pietro Fermat (1601-1665) aveva creduto che tutti i numeri della forma

$$F_x = 2^{2^x} + 1 \quad (\text{con } x \in N)$$

fossero NUMERI PRIMI.

Ma ciò non è vero! Infatti

per $x=1$ si ha $F_1 = 2^2 + 1 = 5$
per $x=2$ " " $F_2 = 2^4 + 1 = 17$
per $x=3$ " " $F_3 = 2^8 + 1 = 257$
per $x=4$ " "

$$F_4 = 2^{16} + 1 = 65\,537$$

Questi numeri 5, 17, 257 e 65 537 sono numeri primi.

Per $x=5$ Leonardo Eulero (1707-1783), trovò nel 1732, che $F_5 = 2^{32} + 1 =$ $= 4\,294\,967\,297$ è uguale a $= 641 \times 6\,700\,417$.

E quindi $2^{32}+1$ non è numero primo.

Altri matematici hanno dimostrato che i numeri $2^{2^x} + 1$ con $x = 6; 12; 23, 36$ non sono numeri primi.

Il matematico Edoardo Lucas (1842-1891) ha creduto che l'enunciato di Fermat dovesse essere modificato così: «Tutti i numeri «della serie
«$2+1$; 2^2+1; $2^{2^2}+1$; $2^{2^{2^2}}+1$;...
«sono numeri primi.»

Ma questa proprietà e le seguenti proposizioni sui

Ma come ha fatto EULERO *a determinare che* 641 *è il minore divisore di* $2^{32}+1$?

Con il metodo delle congruenze si può dimostrare facilmente che $2^{32}+1$ è divisibile per 641.

Si ha:

$$2^9 = 512 \equiv -129 \; ; \quad (\text{mod.} 641)$$
$$2^{12} = 2^9 \cdot 2^3 \equiv (-129) \cdot 8 \equiv$$
$$\equiv -1032 \equiv 250 \; ;$$
$$2^{16} = 2^{12} \cdot 2^4 \equiv 250 \cdot 16 \equiv$$
$$\equiv 4000 \equiv 154 \; ;$$
$$2^{32} = (2^{16})^2 \equiv (154)^2 \equiv$$
$$= 23\,716 \equiv -1 \; .$$
$$\Rightarrow 2^{32}+1 \text{ è divisibile per } 641$$

numeri primi non sono state dimostrate, ma nemmeno smentite da nessun esempio.

1) Ogni numero pari, maggiore di 2, è la somma di due numeri primi. (GOLDBACH).

2) Ogni numero pari è la differenza di due numeri primi. (POLIGNAC).

3) Esistono infinite coppie di numeri primi aventi minima differenza, 2. ESEMPI 3 e 5; 5 e 7; 11 e 13; 17 e 19; 29 e 31; 41 e 43; .... 179 e 181; ...1019 e 1021; .... 1721 e 1723; ...4931 e 4933; ...

Il più grande numero primo conosciuto sino al 1894, secondo l'*Intermediarie des Mathematiciens*, pare sia stato $2^{61}-1 = 2305843009213693951$.

Nel 1920 Fanquelbergue ha accertato che il numero $2^{127}-1$ è primo (... 39 cifre!).

Non esistono formule che diano SOLTANTO numeri primi, anzi il matematico Adriano Legendre (1752-1833) ha dimostrato che nessun polinomio di una indeterminata può rappresentare SOLAMENTE numeri primi.

Sono stati trovati polinomi semplici in x che danno numeri primi quando la x assume i valori 0, 1, 2, 3, ... ma solo fino ad un certo valore. Eccone alcuni:

$2x^2+2x+7$	fino ad	$x=5$;
x^2+x+11	" "	$x=9$;
$2x^2+11$	" "	$x=10$;
x^2+x+17	" "	$x=15$;
$2x^2+2x+19$	" "	$x=17$;
$3x^2+3x+23$	fino ad	$x=21$
$2x^2+29$	" "	$x=28$
$6x^2+6x+31$	" "	$x=28$
x^2+x+41	" "	$x=39$.

LUFR.

LA PALESTRA DELLE GARE

QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 212

Costruire sette rette su un piano tali che le loro intersezioni siano 21 dei quali ogni retta ne contenga 6.

QUESTIONE 213

Criptaritmetica.

Ricostruire l'uguaglianza:

TRE × TRE = CINQUE,

sapendo che TRE è un numero pari.

QUESTIONE 214

Quante sono le diagonali di un poliedro convesso avente 22 facce tutte triangolari?

QUESTIONE 215

Determinare due numeri razionali tali che la somma dei loro quadrati sia uguale a 2.

QUESTIONE 216

Date le coordinate dei punti A, B, C determinare le coordinate del punto A' simmetrico di A rispetto alla retta BC.

Giovanni Longo

QUESTIONE 217

Determinare, senza usare tavole di logaritmi, quale dei seguenti numeri

$$100^{120}, \quad 120^{100}$$

sia il maggiore.

QUESTIONE 218

Il numero N è formato da sei cifre; la sua cifra delle unità è 4. Portando questa cifra a sinistra di N si ottiene un nuovo numero N' di sei cifre che è uguale al quadruplo di N:

$$4(ABCDE4) = (4ABCDE).$$

QUESTIONE 219

Costruire il triangolo ABC dati i lati $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e la bisettrice $\overline{AL} = w$ dell'angolo interno BAC.

QUESTIONE 220

Si sostiene talvolta che noi usiamo il sistema decimale di numerazione (per cui, per esempio, 362 significa $3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 2$) in quanto abbiamo dieci dita.

Un *marziano*, dopo aver *scritta* l'equazione

$$x^2 - 16x + 41 = 0,$$

invitato a scrivere la differenza delle radici, *scrive* 10.

Quante dita hanno i marziani?

N.B. Per i numeri compresi fra 0 e 6, la scrittura dei marziani coincide con la nostra.

QUESTIONE 221

E' richiesta la risoluzione puramente geometrica (per via sintetica) del seguente problema:

E' dato un circolo di raggio r. Costruire un triangolo isoscele che sia circoscritto al circolo, sapendo che la differenza tra uno dei lati e la metà della base è d.

QUESTIONE 222

Sia N un numero intero formato da h cifre consecutive uguali a 1, seguite da h cifre uguali a 5. Dimostrare che qualunque sia il valore di h il numero $N+1$ è un quadrato.

Come si scrive la base di detto quadrato?

MATHESIS TRIESTE 1975

INTERMEDIARIO

L'Angolista Marco Succi, del L. Scient. "A. Volta" di Milano chiede agli Angolisti una risoluzione del seguente problema:

COSTRUIRE UN TRIANGOLO ABC, CONOSCENDO IL LATO $BC = 2a$, L'ALTEZZA $AH = h$ E LA BISETTRICE $AL = w$.

Risoluzioni delle questioni proposte

Ancora sulla *QUESTIONE 187*.

Ricostruire l'addizione criptaritmetica con le nove cifre significative (da 1 a 9) sapendo che DEF = 2·ABC.

$$\begin{array}{r} ABC+ \\ DEF= \\ \hline GHI \end{array}$$

A pag. 5 del fasc. VI,6 abbiamo pubblicato la risoluzione di G. Guarato che conduce alle quattro possibili soluzioni:

$$\begin{array}{r} 192+ \\ 384= \\ \hline 576 \end{array} \quad \begin{array}{r} 219+ \\ 438= \\ \hline 657 \end{array} \quad \begin{array}{r} 273+ \\ 546= \\ \hline 819 \end{array} \quad \begin{array}{r} 327+ \\ 654= \\ \hline 981 \end{array}$$

ed abbiamo aggiunto la seguente NOTA di D. Gai:

«Se fra le cifre fosse incluso lo ZERO «si avrebbe una soluzione in più e «precisamente:

$$\begin{array}{r} 267+ \\ 534= \\ \hline 801 \end{array}$$ »

[N.d.R: UNA SOLA? SÌ. PERCHE'?]

A queste domande risponde ancora Giuseppe Guarato di Valdagno:

Se fra le cifre fosse incluso lo zero, questo valore non potrebbe ovviamente essere assunto dalle lettere

- *Continua a pag. 5* -

Ministero della Pubblica Istruzione

MATURITA' SCIENTIFICA

SESSIONE ORDINARIA 3 - 7 - 1975

Delle seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene più adeguate alla sua preparazione:

1) Assegnata una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2$, si conduca per A la retta tangente e su essa si consideri un punto M tale che $\overline{AM} = x$. Da M si tracci la ulteriore retta tangente alla circonferenza e sia C il punto in cui essa incontra il prolungamento di AB. Posto $\overline{AC} = y$, si esprima y in funzione di x e si disegni il grafico relativo.

---

2) In un riferimento cartesiano ortogonale xOy sono date le parabole C' e C'' rispettivamente di equazione

$$y = -x^2 + 2ax$$

$$y = \frac{x^2}{a^4} - \frac{2x}{a^3} \qquad a > 0\ ;$$

si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due parabole e si determini il valore di a per cui tale area risulta minima.

Si completi la trattazione dimostrando che se $F(x)$ è una primitiva di una funzione $f(x)$ per $a \leq x \leq b$, risulta

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

---

3) Si conduca internamente ad un angolo retto AOB una semiretta OC che forma con OA un angolo $AOC = x$; presi rispettivamente su OA ed OB due punti M ed N tali che $\overline{OM} = 1$, $\overline{ON} = \sqrt{3}$, siano M' ed N' le rispettive proiezioni di M ed N su OC. Detto P il punto medio di M'N', si determini x in modo che risulti massima l'area del triangolo NOP.

A pag. 6 di questo fascicolo è riportata una RISOLUZIONE ANALITICA della terza questione.

MATURITA' SCIENTIFICA

SESSIONE SUPPLETIVA 17 - 7 - 1975

1) Si studi la funzione

$$y = x^2(3-x)$$

e se ne disegni il grafico.

Detti A e B i punti corrispondenti agli estremi relativi della funzione, si conducano per essi le rette tangenti alla curva e siano C e D i rispettivi punti di contatto. Si calcoli l'area del quadrilatero convesso limitato dai segmenti AC e BD e dagli archi AD e BC della curva.

Si completi la trattazione dimostrando che se una funzione reale $f(x)$ della variabile reale x ha in un punto c, del suo campo di esistenza, derivate prima e seconda verificanti le condizioni

$$f'(c)=0 \qquad f''(c)<0$$

queste sono sufficienti per affermare che in c la $f(x)$ ha un massimo relativo.

---

2) Assegnato un riferimento cartesiano ortogonale xOy, si consideri la circonferenza di equazione $x^2+y^2=1$. Detto AB l'arco di essa contenuto nel primo quadrante, si determini su tale arco un punto P tale che, indicati con Q il punto d'intersezione della retta tangente alla circonferenza per P con l'asse delle ascisse e con S quello d'intersezione della retta OP con la retta di equazione $y=2$, l'area del triangolo QPS risulti minima.

---

3) In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=2r$, si conduca una corda AC tale che sia $\widehat{CAB}=2x$. Detto D il punto medio dell'arco BC, si determini x in modo che l'area y del quadrilatero ACDB risulti massima.

---

continuazione da pag. 3.

A, D, G, C, F con $C \neq 5$.

Se $I=0 \Rightarrow C+F=10$

e se $F = 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8$

sarà $C = 1;6 \quad 2;7 \quad 3;8 \quad 4;9$

ma come si vede in nessun caso è verificata l'uguaglianza

$C+F=10$

Se $B=0 \Rightarrow C+F>10$

e, ricordando che $ABC<329$,

se $F = 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8$

sarà $C = 6 \quad 7 \quad 8 \quad 4;9$

$E=1$; $H=2$

$I = 1 \quad 4 \quad 2;7$

$G = 3, 6, 9$.

GHI=	324	624	924	327	627	927
ABC=	108	208	308	109	209	309
DEF=	216	416	616	218	418	618

ma, come si vede, nessuna è accettabile.

Se $E=0 \Rightarrow C+F>10$, $3<C<5$;

$B=5$; $F=8$; $C=4$; $\Rightarrow$

$ABC=15\underline{4}$; $DEF=308$; $GHI=\underline{4}62$;

IMPOSSIBILE perché $C=4=G$.

Se $H=0 \Rightarrow G \neq 3;6;9$; $G=4;5;7;8$;

e $I \neq 5$ si hanno 10 combinazioni:

GHI=	402	408	501	504	507
ABC=	134	136	167	168	269
DEF=	268	272	334	336	538

(continua a pag. 7)

MATURITA' SCIENTIFICA 1975 - III QUESITO

Si conduca internamente ad un angolo retto $A\hat{O}B$ una semiretta OC che forma con OA un angolo AOC = x ; presi rispettivamente su OA ed OB due punti M ed N tali che $\overline{OM}=1$, $\overline{ON}=\sqrt{3}$, siano M' ed N' le rispettive proiezioni di M e di N su OC. Detto P il punto medio di M'N', si determini x in modo che risulti massima l'area del triangolo NOP.

RISOLUZIONE ANALITICA.

Si ha $M\equiv(1;0)$, $M\equiv(0;\sqrt{3})$ e sia $y=mx$ l'equazione della retta generica OC ($m>0$).
L'equazione della retta MM' ($\perp OC$) è

$$y=-\frac{1}{m}(x-1).$$

Considerando il sistema

$$\begin{cases} y=mx \\ y=-\frac{1}{m}(x-1) \end{cases}$$

si deducono le coordinate di M':

$$M'\equiv\left(\frac{1}{1+m^2}\ ;\ \frac{m}{1+m^2}\right).$$

L'equazione della retta NN' ($\perp OC$) è

$$y-\sqrt{3}=-\frac{1}{m}x.$$

Considerando il sistema

$$\begin{cases} y=mx \\ y=-\frac{1}{m}x+\sqrt{3} \end{cases}$$

si deducono le coordinate di N':

$$N'\equiv\left(\frac{\sqrt{3}\,m}{1+m^2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}\,m^2}{1+m^2}\right)$$

e quindi le coordinate di P, punto medio di M'N':

$$P\equiv\left[\frac{1+\sqrt{3}m}{2(1+m^2)}\ ;\ \frac{m(1+\sqrt{3}m)}{2(1+m^2)}\right].$$

Le equazioni parametriche del luogo geometrico di P sono:

$$(1)\quad \begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt{3}\,m}{2(1+m^2)} \\[2ex] y=\dfrac{m(1+\sqrt{3}\,m)}{2(1+m^2)} \end{cases}$$

Eliminando fra le (1) il parametro m ($=\frac{y}{x}$, con $x\neq 0$) si ha:

$$x=\frac{1+\sqrt{3}\frac{y}{x}}{2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)};\Longrightarrow x=\frac{(x+\sqrt{3}y)x}{2(x^2+y^2)};$$

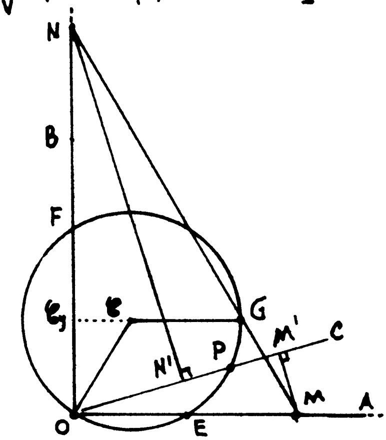
$$\Rightarrow 2x(x^2+y^2)=x(x+\sqrt{3})y,$$

e dividendo ambo i membri per $x\neq 0$ si ha l'equazione

$$x^2+y^2-\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}y}{2}=0$$

che è l'equazione della circonferenza di centro $\mathscr{C}\equiv\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ e raggio uguale a

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\dots=\frac{1}{2}$$



Il triangolo ONP di base $ON=\sqrt{3}$ e altezza PP_y, ha area massima quando è massima l'ascissa del punto P, cioè quando P coincide con il punto G, punto della circonferenza avente l'ordinata uguale all'ordinata del centro $\mathscr{C}$ e quindi ascissa massima. Si ha:

$$X_G=\overline{\mathscr{C}_y\mathscr{C}}+\overline{\mathscr{C}G}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4};\Rightarrow$$

$$\Rightarrow G\equiv\left(\frac{3}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right);\Rightarrow m=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\operatorname{tg}30^\circ=$$

$$=\operatorname{tg}M\hat{O}C.$$

(continua)

In tal caso $P \equiv M' \equiv N' \equiv G$ e appartiene alla retta MN.
La retta richiesta OC si può costruire conducendo da O la perpendicolare ad MN.
L'area massima richiesta è

$$\frac{1}{2}\,\overline{ON}\cdot\overline{PP_y} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8}\sqrt{3}\,.$$

NOTA. Dette E, F le intersezioni di detta circonferenza con gli assi OA e OB,
se $m>0$ P si trova sull'arco EGF,
se $m<0$ P " " " EOF.

*

QUESTIONE 148

MATURITA' SCIENTIFICA 1973 - III quesito

Si studi la variazione della funzione

$$y = 3\cos 2x - 4\cos x \qquad (1)$$

nell'intervallo $(0, 2\pi)$.

RISOLUZIONE

dedotta dalle risposte degli Angolisti Leonardo Felician e Paolo Viola del L.Cl. "Dante" di Trieste, di Enrico Jannelli del L.Sc. "Fermi" di Bari, di Roberto Martinolli del L.Sc. "Oberdan" di Trieste, di Francesco Fogliotti di Genova-Samp. e da Giuseppe Guarato di Valdagno.

La funzione $y = 3\cos 2x - 4\cos x$ è combinazione lineare di due funzioni definite e continue in ogni punto x dell'intervallo $(0, 2\pi)$ e quindi è funzione definita e continua in tale intervallo.

I grafici delle due funzioni

$$y_1 = 3\cos 2x \quad \text{e} \quad y_2 = -4\cos x$$

sono simmetrici rispetto alla retta $x = \pi$ e quindi anche il grafico della funzione data

$$y = y_1 + y_2$$

è simmetrica rispetto a tale retta.

La (1) si può scrivere successivamente

$$y = 3(2\cos^2 x - 1) - 4\cos x\,;$$

$$y = 6\cos^2 x - 4\cos x - 3\,. \qquad (2)$$

CONTINUAZIONE da pag. 5

GHI =	702	708	$\boxed{801}$	804	807
ABC =	234	236	$\boxed{267}$	268	269
DEF =	468	472	$\boxed{534}$	536	538

L'unico caso compatibile con le premesse e con le norme criptaritmetiche è quello racchiuso in un rettangolo: $267+534=801$.
Negli altri nove casi esistono coppie di lettere che assumono valori uguali.

Si determinano facilmente i seguenti punti del grafico:

$$A(0;-1)\,;\; B\left(\frac{\pi}{2};-3\right);\; C(\pi;7);$$
$$D\left(\frac{3\pi}{2};-3\right) \text{ ed } E(2\pi;-1).$$

Si ha $y=0$ per i valori di x per cui è

$$6\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$$

Questa equazione in $\cos x$ ha per radici:

$$\cos x = \frac{2 \mp \sqrt{22}}{6},$$

Il valore $\dfrac{2+\sqrt{22}}{6}$ si deve scartare perchè > 1.

Detto a l'arco (del secondo quadrante) per cui

$$\cos a = \frac{2-\sqrt{22}}{6}, \text{ si ha:}$$

$y>0$ per $a < x < 2\pi - a$,

$y<0$ per $0 < x < a$ e
per $2\pi - a < x < 2\pi$.

La curva rappresentativa della funzione incontra l'asse x nei punti $L(a;0) = (2{,}06\ldots;0)$
e $L'(2\pi - a; 0) = (4{,}22\ldots;0)$.

La derivata prima della funzione (2) è

$$y' = 6\cdot 2\cos x(-\operatorname{sen} x) - 4(-\operatorname{sen} x) =$$
$$= -12\operatorname{sen} x\left(\cos x - \frac{1}{3}\right),$$

e si annulla per i valori di x per i quali è $\operatorname{sen} x = 0$ e $\cos x = \frac{1}{3}$.

Detto b l'arco (del primo quadrante) per cui $\cos b = \frac{1}{3}$.

Risulta $y' > 0$ per

$b < x < \pi$ e $2\pi - b < x < 2\pi$;

risulta $y' < 0$ per

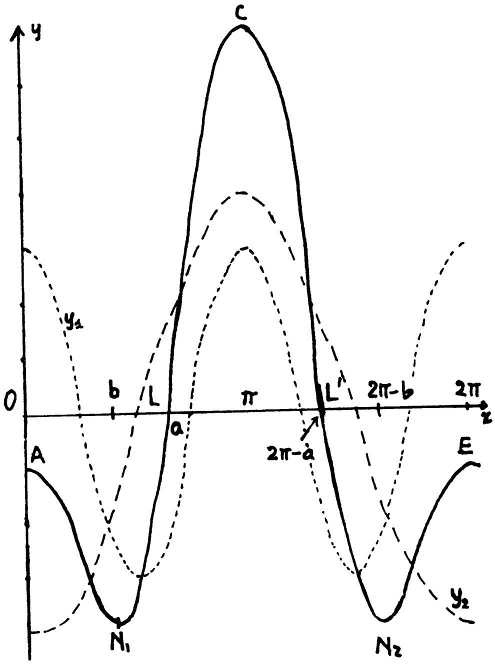
$x < b$ e $\pi < x < 2\pi - b$

La curva presenta quindi tre massimi in

$A(0;-1)$; $C(\pi, 7)$ ed $E(2\pi;-1)$

e due minimi in

$N_1\left(b;-\frac{11}{3}\right)$ e $N_2\left(2\pi - b;-\frac{11}{3}\right)$.



Essendo $y'' = -24\cos^2 x + 4\cos x + 12$, l'equazione $y'' = 0$ ammette due radici reali compresi fra -1 e $+1$ ed esistono quindi quattro *flessi*, a due a due simmetrici rispetto alla retta $x = \pi$.

La figura dà con buona approssimazione l'andamento del grafico della funzione in esame.

NOTA. E' facile disegnare approssimativamente l'andamento della curva in esame considerando prima i grafici delle funzioni

$y_1 = 3\cos 2x$, $y_2 = -4\cos x$

e successivamente il grafico della funzione $y = y_1 + y_2$ che si ottiene assegnando, per ogni valore della x, il punto che ha per ordinata la somma algebrica delle ordinate y_1 e y_2.

QUESTIONE 149

MATURITA' SCIENTIFICA 1973 - IV QUESITO

Si studi la funzione

$$y = \frac{1 + x^3}{x^2}$$

e se ne disegni il grafico.

Si scriva poi l'equazione della tangente nel suo punto A di ordinata nulla e quella della retta passante per lo stesso punto e tangente alla curva in un ulteriore punto B.

Detta C l'intersezione della prima tangente con il grafico, si calcoli l'area della regione piana limitata dal segmento BC e dal grafico stesso

Hanno inviato ottime risoluzioni L. Felician, F. Fogliotti, G. Guarato, E. Jannelli e R. Martinolli.

RISOLUZIONE

1). La funzione in esame è una cubica razionale irriducibile definita in tutto l'intervallo reale $(-\infty, +\infty)$ escluso lo zero. Non gode di alcuna simmetria.

E' $y \gtreqless 0$ per $x \gtreqless -1$; quindi la curva l'interseca l'asse x solamente nel punto $A(-1;0)$.

Poichè $\lim_{|x| \to 0} y = +\infty$

l'equazione $x = 0$ (o meglio il semiasse positivo delle y) è asintoto doppio verticale della curva.

Il profilo della curva è formato

da due rami giacenti in semipiani opposti rispetto all'asse y.
Poichè la (1) si può scrivere

$$y = x + \frac{1}{x^2} \quad , \quad (2)$$

si deduce facilmente che la (1) presenta un asintoto obliquo e precisamente la retta $y=x$, cioè la bisettrice del 1° e 3° quadrante. Se si indicano con y e Y le ordinate di due punti di uguale ascissa, appartenenti rispettivamente alla curva e alla retta $y=x$ si ha per la (2)

$$y - Y = \frac{1}{x^2}$$

da cui si deduce che è sempre $y>Y$ e che il grafico della (1) è contenuto nel semipiano $y>x$.

2). Derivando la (1) si ha

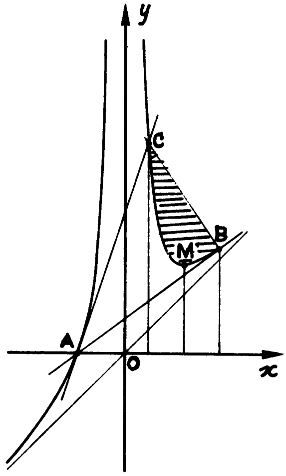
$$y' = \frac{3x^2 \cdot x^2 - 2x(1+x^3)}{x^4} = \frac{x^3-2}{x^3} > 0$$

per $x<0$ e $x>\sqrt[3]{2}$.

Si ha quindi un minimo relativo per $x=\sqrt[3]{2}$ nel punto

$$M\left(\sqrt[3]{2}\,;\ \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\right).$$

Poichè $y''=6/x^4$ assume sempre valore positivo, la concavità della curva è sempre rivolta verso il semiasse positivo delle y.
Si può quindi tracciare facilmente il grafico della curva rappresentativa della (1).



3). La retta generica passante per $A(-1;0)$ ha per equazione

$$y = m(x+1) \qquad (3)$$

Facendo sistema con la (1) si ha l'equazione

$$(1-m)x^3 - mx^2 + 1 = 0 \qquad (4)$$

le cui radici danno le ascisse dei punti di intersezione fra la (1) e la (3).
Affinchè la (3) risulti tangente alla (1) nel punto $(-1;0)$, il trinomio del primo membro della (4) deve risultare divisibile per $(x+1)^2$
Deve aversi quindi:

$(1-m)x^2 - x + 1 = 0 \qquad (5) \Longleftarrow$

$(1-m)x - 2 + m = 0 \qquad (6) \Longleftarrow$

	$1-m$	$-m$	0	$+1$
-1		$-1+m$	$+1$	-1
	$1-m$	-1	$+1$	zero
-1		$-1+m$	$2-m$	
	$1-m$	$-2+m$	$3-m=$ zero per $m=3$ (*)	

L'equazione della tangente in A alla (1) è quindi $y=3m+3$ e l'ascissa della sua ulteriore intersezione con la (1) si deduce dalla (6) ponendo $m=3$:

$$-2x - 2 + 3 = 0 \quad \text{da cui} \quad x_c = \frac{1}{2}; \quad C\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

(*) Più rapidamente si può calcolare il valore di m della tangente in A, considerando il valore che assume la derivata prima della (1) per $x=-1$:

$$y' = \frac{x^3-2}{x^3}\ ; \quad m = y'_{(x=-1)} = \frac{(-1)^3 - 2}{(-1)^3} = 3$$

La retta generica passante per A

$$y = m(x+1) \qquad (3)$$

(ma non tangente in A) è tangente in un ulteriore punto B della curva, se l'ascissa di B è soluzione doppia dell'equazione

$$(1-m)x^2 - x + 1 = 0 \qquad (5)$$

Ciò si verifica per il valore di m che annulla il Δ della (5).

Si ha: $\Delta = 1 - 4(1-m) = 0 \;\Rightarrow m = \frac{3}{4}$;

$\frac{x^2}{4} - x + 1 = 0$ (5') ovvero dalla (5)

da cui

$\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 = 0$;

$x_B = 2$.

$x_B = \frac{1}{2(1-m)} = \frac{1}{2\left(1-\frac{3}{4}\right)} = 2.$

Ne segue $\quad B\left(2 ; \frac{9}{4}\right)$.

Il coefficiente angolare della retta BC

$$m_c = \frac{\frac{9}{2} - \frac{9}{4}}{\frac{1}{2} - 2} = \dots = -\frac{3}{2}$$

e l'equazione della retta è

$$y - \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

cioè

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{21}{4} \quad (*) \quad (7)$$

L'area S della regione limitata dal segmento BC e dalla curva (1) si può ora calcolare nel modo seguente:

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left[\left(-\frac{3}{2}x + \frac{21}{4}\right) - \frac{1+x^3}{2}\right] dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{21}{4} - \frac{5}{2}x - \frac{1}{x^2}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{21}{4}x - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \dots = \frac{27}{16}.$$

(*) L'equazione (7) della retta BC si ricava subito sviluppando il determinante $\longrightarrow$ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 1 \\ 2 & \frac{9}{4} & 1 \end{vmatrix} = 0$

QUESTIONE 190

È richiesta una risoluzione geometrica del problema:

« Essendo a, b, c i lati di
«un triangolo ($a > b > c$), deter-
«minare il segmento x in modo
«che
« $\quad a-x, \quad b-x, \quad c-x$
«siano i lati di un triangolo ret-
«tangolo».

MATURITA' SCIENTIFICA · Ottobre 1926

Relazione

Pubblichiamo intanto una

RISOLUZIONE ALGEBRICA

Poichè il lato maggiore è a, l'ipotenusa del triangolo rettangolo richiesto è $a-x$, per cui dovrà essere $(a-x)^2 = (b-x)^2 + (c-x)^2$

ossia

$$f(x) = x^2 - 2(b+c-a)x + b^2 + c^2 - a^2 = 0, \quad (1)$$

equazione da risolvere e discutere per $x < c$. (*)

La condizione di realtà per le radici è sempre verificata perchè

$$\frac{\Delta}{4} = (b+c-a)^2 - (b^2+c^2-a^2) =$$

$$= 2a^2 + 2bc - 2ab - 2ac =$$

$$= 2a(a-b) - 2c(a-b) = 2(a-b)(a-c) > 0$$

poichè è, per ipotesi, $a > b > c$.

Inoltre si ha

$$f(c) = c^2 - 2bc - 2c^2 + 2ac + b^2 + c^2 - a^2 =$$

$$= -2c(b-a) + (b+a)(b-a) =$$

$$= (a-b)(2c-b-a) ;$$

essendo a il maggiore e c il minore dei tre lati si ha:

$$a-b > 0 \quad e \quad 2c-b-a < 0 ;$$

dunque $f(c) < 0$, discorde con il primo coefficiente della (1), positivo.

Si conclude che c è *interno* all'intervallo delle radici

$$x_1 < c < x_2$$

(*) Le misure dei lati del triangolo rettangolo cercato devono essere positive; quindi x deve essere minore del minore dei tre lati del triangolo, cioè $x < c$.

e quindi soltanto la radice minore è accettabile; il problema ammette in ogni caso una e una sola soluzione:

$$(2) \qquad x = b+c-a-\sqrt{2(a-b)(a-c)}$$

Conviene anche studiare il segno della radice x_1 rispetto allo zero; si ha:
$f(0) = b^2+c^2-a^2$;
quando $f(0)=b^2+c^2-a^2<0$, (3)
lo zero è interno alle radici e i lati del triangolo dato si debbono *aumentare*; in tal caso dalla (3) si ha $a^2>b^2+c^2$ e quindi il triangolo dato è *ottusangolo*.
Se invece è $f(0)=b^2+c^2-a^2>0$ (4) lo zero è esterno all'intervallo delle radici e precisamente esterno a sinistra, essendo $\Sigma=b+c-a>0$; quindi $x_1>0$; in tal caso per la (4) si ha $a^2<b^2+c^2$ e il triangolo dato è *acutangolo*.
Se $b^2+c^2-a^2=0$ cioè se $b^2+c^2=a^2$, si ha $x_1=0$ e il triangolo dato è già rettangolo e si identifica con il triangolo da determinare.

PRIMO ESEMPIO: Sia $a=4, b=3, c=2$; il triangolo dato è *ottusangolo*; per la (2) si ha $x=-1$ e i lati del triangolo rettangolo cercato sono

$$(a-x)=4+1=5, \quad (b-x)=3+1=4, \quad (c-x)=2+1=3.$$

SECONDO ESEMPIO: Sia $a=7, b=6, c=5$ il triangolo dato è *acutangolo*; per la (2) si ha: $x=2$;

$$a-x=7-2=5; \quad b-x=6-2=4; \quad c-x=5-2=3.$$

Questo quesito era stato proposto esplicitamente per la ricerca di una risoluzione geometrica, cioè per via sintetica.
Quasi tutti i Risolutori (vedi Quadro a pag. 23) hanno risolto il problema per via algebrica e alcuni hanno effettuato una costruzione geometrica dedotta dalla formula risolutiva (2).
Fra le risoluzioni di questo tipo pubblichiamo quella di *Giuseppe Guarato* che è completa anche nella discussione:

Costruzione.
Sia ABC il triangolo dato; $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$. Sul prolungamento di BA, e su AB stesso si prendano i punti D ed E tali che sia

$$\overline{AD}=\overline{AC}=b, \quad \overline{DE}=\overline{BC}=a \Rightarrow \overline{BE}=b+c-a \text{ e } \overline{EA}=a-b.$$

Per A si conduca la perpendicolare ad AB e sia $\overline{AF}=\overline{AC}=b$.

Se ABC è acutangolo (fig. 1 pag. 12) allora $b^2+c^2-a^2>0$: sia G il punto della semicirconferenza di diametro FB tale che sia $\overline{FG}=\overline{BC}=a$ $\Rightarrow$ allora $\overline{BG}^2=b^2+c^2-a^2$.

Se invece ABC è ottusangolo (fig. 2) $\Rightarrow a^2-b^2-c^2>0$, e G è il punto della semicirconferenza di diametro BC tale che sia $\overline{CG}=\overline{BF}$ $\Rightarrow \overline{BG}^2=a^2-b^2-c^2$.

Il triangolo BHE, avente $\overline{BH}=\overline{BG}$, [rettangolo in H se ABC è acutangolo, e rettangolo in B se ABC è ottusangolo], è tale che il lato $\overline{EH}=\sqrt{\Delta/4}$.
Siano B_1 e B_2 ($\overline{BB_1}<\overline{BB_2}$) le intersezioni della circonferenza E(EH) con la BD. È facile riconoscere $\overline{BB_1}$ e $\overline{BB_2}$ sono le soluzioni della (1).

Discussione.
Poichè dalla (1)

$$\sqrt{\Delta/4}=\sqrt{2(a-b)(a-c)}>a-b$$

risulta $\overline{EH}>\overline{EA}=a-b$.
Se $\hat{ABC}$ è acutangolo si ha:
$\overline{EA}<\overline{EH}<\overline{EB}$ (EB ipotenusa) per cui, essendo $\overline{BB_2}>\overline{BA}$, l'unica soluzione è $x=\overline{BB_1}$ e il

triangolo AB_1C_1 è il triangolo rettangolo cercato

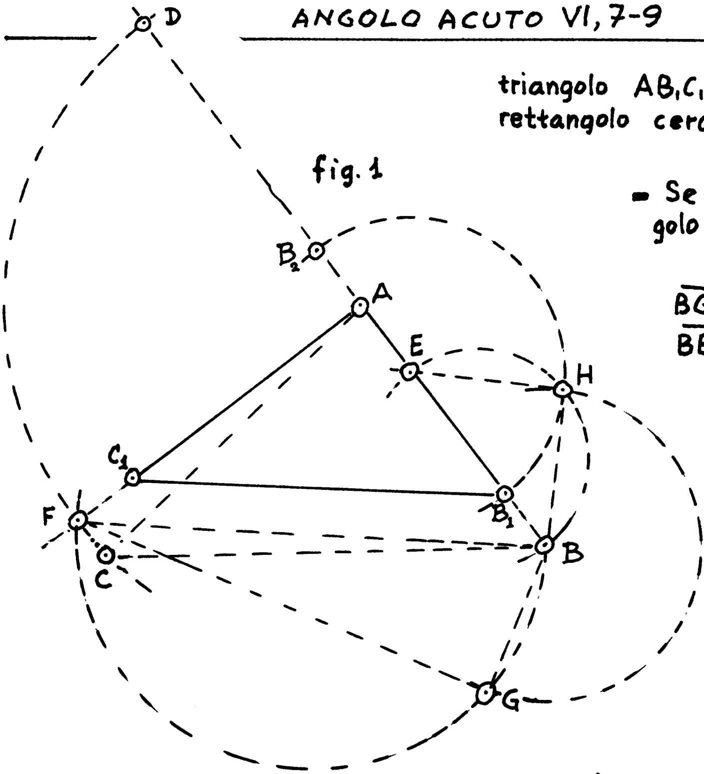


fig. 1

■ Se $\hat{ABC}$ è rettangolo in A, risulta

$\overline{FB} = \overline{CB} \Rightarrow$
$\overline{BG} = \overline{BH} = 0$ e
$\overline{BB_2} = 2(b+c-a) > 0$

e l'unica soluzione è $\overline{BB_1} = 0$

■ Se $\hat{ABC}$ è ottusangolo, oltre ad essere

$\overline{EH} > \overline{EA}$ è anche $\overline{EH} > \overline{EB}$
($\overline{EH}$ ipotenusa)
e risulta $\overline{BB_2} > \overline{BA}$,
mentre $\overline{BB_1} < 0$ e
quindi l'unica soluzione è
$x = \overline{BB_1} < 0$
e il segmento x deve essere aggiunto anziché sottratto: anche in questo caso, $\hat{AB_1C_1}$ è il triangolo cercato.

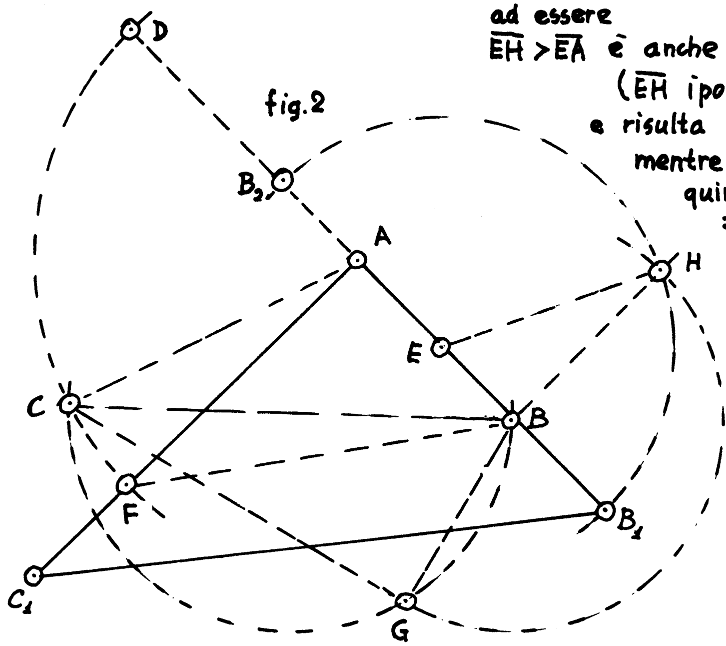
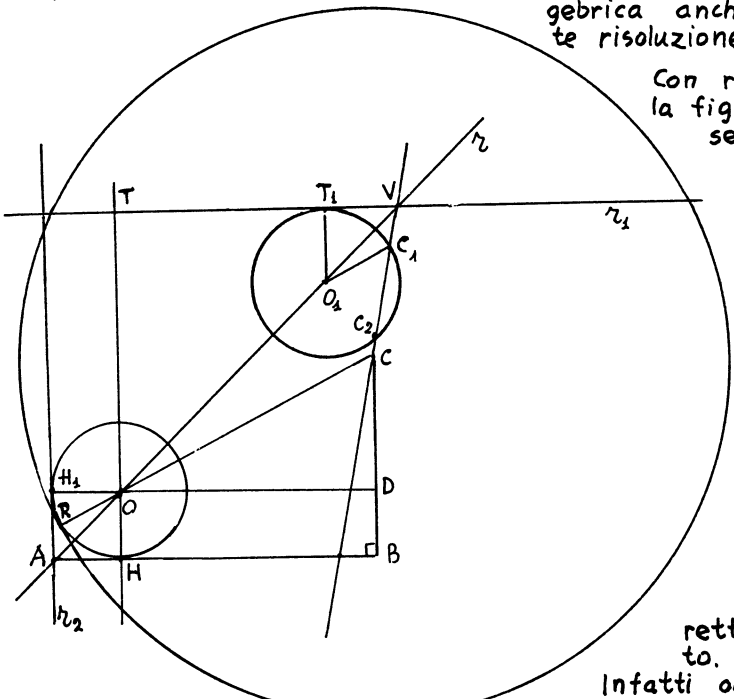


fig. 2

CONTINUA→

L'Angolista Guido Gatti ci ha inviato oltre alla risoluzione algebrica anche la seguente risoluzione geometrica:



Con riferimento alla figura traccio il segmento $\overline{AB}=b$ e da B, $\perp$ ad AB, traccio $\overline{BC}=c$.

Per A traccio la retta r formante con AB un angolo di 45°.
Sulla retta r deve giacere il punto O, vertice del triangolo rettangolo cercato.
Infatti ogni punto di r è equidistante da AB e dalla retta r_2, parallela a BC e passante per A.
Con centro in C e raggio uguale ad a traccio la circonferenza $C(a)$.
Il problema è risolto qualora si individui su r un punto O che sia centro di una circonferenza tangente ad AB, a r_2 e alla crf. $C(a)$.
Traccio allora r_1 parallela ad AB e alla distanza a. La r_1 incontra la r in V. Congiungo V con C e, preso su r un punto qualunque O_1 traccio una crf. tangente a r_1 in T_1, che seca la retta VC in C_1 e C_2.
Da C traccio la parallela al raggio O_1C_1 di $O_1(O_1T_1)$, che seca la retta r in O e $C(a)$ in R.
Da O traccio la parallela ad AB che seca BC in D.
Il triangolo rettangolo ODC è quella richiesto. Infatti sono simili i triangoli VOC e VO_1C_1 e sono simili i triangoli VOT e VO_1T_1, per cui si ha

$$OC : O_1C_1 = OT : O_1T_1 \ ;$$

ma $O_1C_1 = O_1T_1$ quindi $OC = OT$. Il segmento $\overline{HT} = \overline{CR} = a$

$$\Rightarrow \overline{HT} - \overline{OT} = \overline{CR} - \overline{CO} = x \quad \Rightarrow \overline{OR} = \overline{OH} = \overline{OH_1} = x$$

$$\overline{CO} = a - x, \quad \overline{OD} = b - x, \quad \overline{DC} = c - x.$$

Omettiamo la discussione.
Agli Angolisti G. Gatti e G. Guarato sono stati assegnati premi da L. 3000 ciascuno.
Ci sembra opportuno riportare per gli Angolisti anche la seguente

interessante risoluzione di ERMENEGILDA SANTALUCIA pubblicata a pag. 46, fasc. IV, anno I del BOLLETTINO della SOCIETÀ MATEMATICA CALABRESE fondata e tuttora diretto dal Preside Prof. Mariano Scardina di Reggio Calabria.

Poichè è

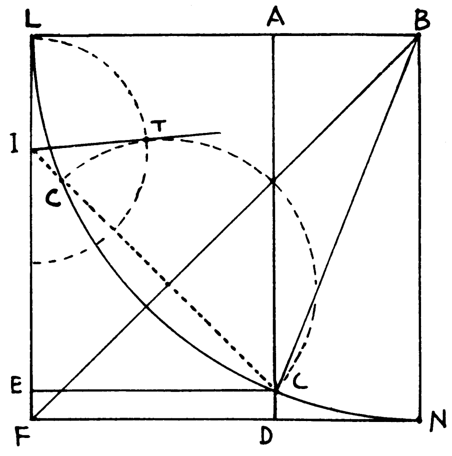
$(a-x)-(b-x)=a-b$, $(a-x)-(c-x)=a-c$

il problema proposto si riduce a quello di costruire un triangolo rettangolo del quale siano note le differenze

$$m=a-b \;, \quad n=a-c \qquad (m<n)$$

fra l'ipotenusa e ciascuno dei cateti.

Sia ABC il triangolo cercato, di ipotenusa BC. Si descriva il quadrante di crf. di centro B e raggio BC limitato dal raggio BAL e dal raggio BN; si conducano le tangenti LF, NF agli estremi dell'arco LN. Si ottiene così il quadrato BLFN.



Si prolunghi il cateto AC fino ad incontrare NF in D e si conduca per C il segmento CE parallelo a BAL; risulta CE = AL = DF.

Sarà $\overline{CD}=m$, $\overline{CE}=n$; cioè del rettangolo CDFE sono noti i lati.

Per dedurre da questo rettangolo la posizione dei vertici B e A del triangolo cercato, si osservi che B è centro di una crf. tangente alle rette FD, FE e passante per C; ossia B è equidistante da C e dalla retta FE e appartiene alla bisettrice FB dell'angolo retto DFE. Pertanto se C' è il simmetrico di C rispetto alla retta FB, il problema si riduce a quello di descrivere la circonferenza, passante per C e C' e tangente alla retta FE.

Trattasi di un problema assai noto, che ammette due soluzioni, una delle quali, nel caso nostro, non è accettabile.

[Sia I l'intersezione fra le rette CC' ed FE; sia T il punto di contatto della semi-crf. di diam. CC'; si riportino infine sulla retta FE i segmenti

IL = IL' = IT.]

E' facile ora costruire il quadrato BLFN e determinare le posizioni dei vertici B e A.

Proponiamo agli appassionati Angolisti una più approfondita analisi di questa questione per quanto riguarda la discussione delle due risoluzioni per via sintetica.

QUESTIONE 191

Risolvere l'equazione

$$2ax^2-2(a+b)x+a^2=2bx^2+a(a-b)x-ab. \quad (1)$$

RISOLUZIONE

di Francesco Romeo
del L. Sc. "Archimede" di Messina.

Svolgendo i prodotti, portando tutti i termini a primo membro e raggruppando opportunamente si ha successivamente:

$$2x(ax-b)-a(2x-a)-bx(2x-a)-$$
$$-a(ax-b)=0$$

$$(2x-a)(ax-b)-(bx+a)(2x-a)=0$$
$$(2x-a)\left[(a-b)x-(a+b)\right]=0$$

Quest'ultima per la legge dell'annullamento del prodotto si scinde nelle due equazioni lineari:

$$2x-a=0 \quad ; \quad (2)$$
$$(a-b)x-(a+b)=0 \quad ; \quad (3)$$

dalla (2) si ha $x_1=\frac{a}{2}$

dalla (3) se $a\neq b$ si ha

$$x_2=\frac{a+b}{a-b}$$

Se $a=b=0$ la (3) e la (1) sono identità.

Se $a=b\neq 0$ la (3) diventa

$$0\cdot x=2a$$ *impossibile*;

la (1) diventa di 1° grado:

$2ax-a^2=0$ e fornisce la sola soluzione $x_1=\frac{a}{2}$.

CASO PARTICOLARE: $a=0\neq b$
la (1) diventa $bx^2+bx=0$
$\Rightarrow \quad x_1=0 \; ; \; x_2=-1$.

Diversi Angolisti hanno ridotto l'equazione data a forma normale:

$$2(a-b)x^2-\left\{2(a+b)+a(a-b)\right\}x+a(a+b)=0$$

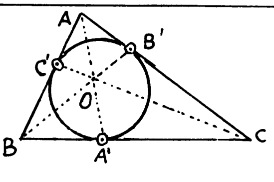
La difficoltà maggiore si presenta nel riconoscere che Δ è un quadrato perfetto. Il calcolo si può condurre nel modo seguente:

$$\Delta=\left[2(a+b)+a(a-b)\right]^2-8a(a-b)(a+b)=$$
$$=4(a+b)^2+a^2(a-b)^2+4a(a^2-b^2)-8a(a^2-b^2)=$$
$$=4(a+b)^2+a^2(a-b)^2-4a(a^2-b^2)=$$
$$=\left[2(a+b)-a(a-b)\right]^2.$$

Ora è facile andare avanti e si ritrovano le conclusioni della risoluzione precedente.

---

figura questione 192



QUESTIONE 192

Sia ABC un triangolo qualsiasi. Siano A', B', C' i punti di tangenza della circonferenza inscritta con i lati BC, AC, AB.
Dimostrare che le rette

AA', BB', CC'

passano per uno stesso punto (*punto di GERGONNE*).

RISOLUZIONE
di Francesco Fogliotti di GENOVA

Per la proprietà delle tangenti ad una circonferenza condotte da un punto esterno si ha:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{A'C}=\overline{CB'}\\ \overline{B'A}=\overline{AC'}\\ \overline{C'B}=\overline{BA'}\end{array}\right\}.$$ Moltiplicando membro a membro

si ha $\overline{A'C}\cdot\overline{B'A}\cdot\overline{C'B}=\overline{CB'}\cdot\overline{AC'}\cdot\overline{BA'}$.

Ora per il Teorema *inverso* di CEVA le tre *ceviane* AA', BB', CC' passano per uno stesso punto. c.d.d.

NOTE per una chiara comprensione della dimostrazione precedente.

DEFINIZIONE. Dicesi *ceviana* (da *Giovanni Ceva* (Milano 1648 - Mantova 1734) relativa ad un lato di un triangolo il segmento che congiunge il vertice opposto al lato prescelto con un punto qualunque di questo lato.

TEOREMA (diretto) di CEVA.

«Tre ceviane AA', BB', CC' passanti «per uno stesso punto O del piano «del triangolo ABC, determinano «sui lati del triangolo sei segmenti tali che il prodotto di tre di «essi non aventi alcun estremo «in comune, uguaglia (in valore «assoluto) il prodotto dei tre «segmenti rimanenti»

DIMOSTRAZIONE

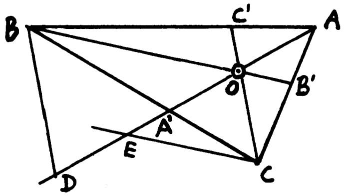
Sia dato il triangolo ABC e le tre ceviane AA', BB', CC' passanti per O.

Devo dimostrare che

TESI) $\overline{BA'}\cdot\overline{CB'}\cdot\overline{AC'} = \overline{A'C}\cdot\overline{B'A}\cdot\overline{C'B}$ (*)

Prolungo AA' e conduco

BD // CC' e CE // BB' ; ottengo



$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{C'B}}{\overline{AC'}} \quad e \quad \frac{\overline{OA}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{CB'}}$$

Dalla similitudine dei triangoli

BOA'	BOD
CEA' $\Longrightarrow$	CEO $\Longrightarrow$
$\frac{BA'}{CA'} = \frac{BO}{CE}$	$\frac{BO}{CE} = \frac{OD}{EO}$.

Ne segue

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{EO}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{EO}}\cdot\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{CB'}}\cdot\frac{\overline{C'B}}{\overline{AC'}}$$

da cui la TESI (*).

Sussiste il teorema inverso:

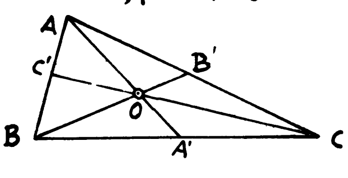
«Se tre ceviane (ciascuna relati-
«va ad uno dei lati del triango-
«lo) determinano sui lati sei seg-
«menti tali che
«il prodotto di tre segmenti
«non aventi estremi in comune
«e appartenenti a lati diversi
«e' uguale al prodotto degli
«altri tre segmenti,
«queste tre ceviane debbono
«passare per uno stesso punto».

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

IPOTESI) $\overline{BA'}\cdot\overline{CB'}\cdot\overline{AC'} = \overline{A'C}\cdot\overline{B'A}\cdot\overline{C'B}$ (▲)

TESI) AA', BB', CC' passano per O.

Infatti, se BB' non passa per O, passi allora, per O, BB''.



Per il teorema diretto di Ceva si avrebbe

$$\overline{BA'}\cdot\overline{CB''}\cdot\overline{AC'} = \overline{A'C}\cdot\overline{B''A}\cdot\overline{C'B} \quad (*)$$

Dividendo membro a membro la (▲) e la (*) si ha:

$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{CB''}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B''A}} \ ;$$

permutando i medi e componendo:

$$\overline{CA} : \overline{B'A} = \overline{CA} : \overline{B''A}$$

$$\Rightarrow \overline{B'A} = \overline{B''A} \Rightarrow B'' \equiv B'$$

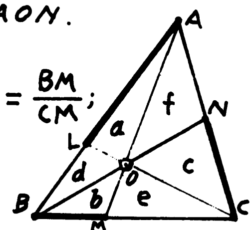
$$\Rightarrow BB'' \equiv BB' .$$

Vengono qui indicate rapidamente altre due dimostrazioni del teorema di Ceva (diretto).

I) Indichiamo con a, b, c, d, e, f le aree dei triangoli BOM, CON, BOL, COM, AON.

Si ha:

$$\frac{a}{d} = \frac{AL}{BL} ; \quad \frac{b}{e} = \frac{BM}{CM} ; \quad \frac{c}{f} = \frac{CN}{AN}$$



$$\Rightarrow \frac{a\cdot b\cdot c}{d\cdot e\cdot f} = \frac{AL\cdot BM\cdot CN}{BL\cdot CM\cdot AN}.$$

Basta provare che $\frac{a\cdot b\cdot c}{d\cdot e\cdot f} = 1$

Infatti si ha

$$\frac{a}{e} = \frac{OL\cdot OA}{OM\cdot OC} ; \quad \frac{b}{f} = \frac{OB\cdot OM}{OA\cdot ON} ; \quad \frac{c}{d} = \frac{OC\cdot ON}{OL\cdot OB}.$$

Moltiplicando queste uguaglianze membro a membro si trova:

$$\frac{a\cdot b\cdot c}{d\cdot e\cdot f} = 1 .$$

II). Si puo' scrivere anche

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\overline{AL}}{\overline{BL}} = \dfrac{O\widehat{C}A}{O\widehat{C}B} \\[2ex] \dfrac{\overline{BM}}{\overline{CM}} = \dfrac{O\widehat{A}B}{O\widehat{A}C} \\[2ex] \dfrac{\overline{CN}}{\overline{AN}} = \dfrac{O\widehat{B}C}{O\widehat{B}A} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\overline{AL}\cdot\overline{BM}\cdot\overline{CN}}{\overline{BL}\cdot\overline{CM}\cdot\overline{AN}} = 1.$$

QUESTIONE 193

Considerata la successione ricorrente di Fibonacci:

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots\ldots$

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\ldots$

determinata dalle condizioni

$$a_0 = 0 \qquad a_1 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \qquad (*)$$

dimostrare che:

I) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_{n+2} - 1$.

II) $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} = a_{2n}$.

III) $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$.

RISOLUZIONE
di Davide Gai - L.Sc. "Volta" di MILANO

I) Per la condizione $(*)$ valgono le seguenti uguaglianze:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a_3 - a_2, \\ a_2 = a_4 - a_3, \\ a_3 = a_5 - a_4, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \\ a_n = a_{n+2} - a_{n+1} \end{array}\right\} \text{Sommando membro a membro e ricordando che } a_2 = 1 \text{, si ottiene la I).}$$

II) Ancora per la $(*)$ si ha:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a_2, \\ a_3 = a_4 - a_2, \\ a_5 = a_6 - a_4, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{2n-1} = a_{2n} - a_{2n-2} \end{array}\right\} \text{Sommando membro a membro segue la II).}$$

III) Sottraendo membro a membro la II) dalla I) si ha:

$$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n} =$$
$$= a_{2n+2} - 1 - a_{2n} = a_{2n+1} - 1$$

RISOLUZIONE
di Franco Mostardi
del L. Sc. "Enriquez" di LIVORNO.

Le relazioni I), II) e III) si possono dimostrare con il metodo di induzione completa:

Esse sono verificate per $n=2$:

I) $a_1 + a_2 = a_4 - 1$; $1+1 = 3-1$.

II) $a_1 + a_3 = a_4$; $1+2 = 3$

III) $a_2 + a_4 = a_5 - 1$; $1+3 = 5-1$

Inoltre se sono verificate per un generico numero n, sono verificate anche per il suo successivo $n+1$.
Infatti, tenendo conto della condizione $(*)$ si ha:

I) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} =$
$= a_{n+2} - 1 + a_{n+1} =$
$= a_{n+3} - 1$.

II) $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n+1} =$
$= a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2(n+1)-1} =$
$= a_{2n} + a_{2n+1} = a_{2n+2} = a_{2(n+1)}$.

III) $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n} + a_{2n+2} =$
$= a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n} + a_{2(n+1)} =$
$= a_{2n+1} - 1 + a_{2n+2} =$
$= a_{2n+3} - 1 = a_{2(n+1)+1} - 1$.

Si può supporre che n dapprima assuma il valore 2 e le tre leggi saranno verificate per $n = 2+1 = 3$; analogamente anche per $n=4$, $n=5$, ecc.
Le tre leggi sono dunque verificate per ogni valore di $n \in N$.

QUESTIONE 194

CRIPTARITMETICA ... FACILE

Ricostruire l'addizione criptaritmetica:

$$\begin{array}{r} \text{A N N O} + \\ \text{S A N T O} = \\ \hline \text{1 9 7 5 D} \end{array}$$

Poichè non ci sono pervenute risoluzioni da parte di alunni di

Scuola Media i premi previsti non sono stati assegnati.

RISOLUZIONE

di Marco Succi - L.Sc. "Volta" - MILANO

E' chiaro che le lettere possono assumere anche i valori 1,9,7,5, giacchè deve essere, intanto, S=1. Inoltre poichè $A+A<10$ si ha successivamente:

$A=4$; $N+N+1=17$; $N=8$.

Inoltre si ha:

$N+T=15$ oppure $N+T+1=15$

e poichè $N=8$ $\Rightarrow$

$T=7$	$T=6$
$\sigma=3$	$\sigma=5$
$D=6$	$D=0$

Riassumendo le soluzioni sono:

4883+	4885+
14873=	14865=
19756	19750

QUESTIONE 195

Determinare i coefficienti p e q del polinomio

$$P(x)=x^3+px^2+4x+q \qquad (1)$$

in modo che esso risulti divisibile per $2x-3$ e per $3x+2$.

Risposta di Enrico Tannelli del L.Sc. "Fermi" di BARI:

PRIMA RISOLUZIONE

Poichè $(2x-3)$ e $(3x+2)$ sono fattori del polinomio (1) e poichè da

$$\begin{cases} 2x-3=0 \Rightarrow x_1=\frac{3}{2} \\ 3x+2=0 \Rightarrow x_2=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

ne segue che x_1 e x_2 sono radici dell'equazione $P(x)=0$ e si ha

$$P\left(\tfrac{3}{2}\right)=0 \quad e \quad P\left(-\tfrac{2}{3}\right)=0 .$$

Si può scrivere pertanto il sistema di 1° grado a due incognite p e q

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^3+\left(\frac{3}{2}\right)^2p+4\left(\frac{3}{2}\right)+q=0 \\ \left(-\frac{2}{3}\right)^3+\left(-\frac{2}{3}\right)^2p+4\left(-\frac{2}{3}\right)+q=0 \end{cases}$$

Risolvendo ... $p=-\frac{41}{6}$ e $q=6$

SECONDA RISOLUZIONE

Applicando la regola di RUFFINI della divisione di un polinomio $P(x)$ per un binomio del tipo $(x-a)$, e ricordando che, se $P(x)$ è divisibile per $(2x-3)$ e per $(3x+2)$, è anche divisibile per $\left(x-\frac{3}{2}\right)$ e $\left(x+\frac{2}{3}\right)$, si ha:

	1	p	4	q
$\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}p+\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}p+\frac{75}{8}$
	1	$p+\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}p+\frac{25}{4}$	zero

	1	p	4	q
$-\frac{2}{3}$		$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}p+\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}p-\frac{80}{27}$
	1	$p-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}p+\frac{40}{9}$	zero

Imponendo che ciascun resto sia uguale a zero si ha il sistema

$$\begin{cases} q+\frac{9}{4}p+\frac{75}{8}=0 \\ q+\frac{4}{9}p-\frac{80}{27}=0 \end{cases}$$

che è chiaramente equivalente al sistema della prima risoluzione.

TERZA RISOLUZIONE

Se $P(x)$ è divisibile per $(2x-3)$ e per $(3x+2)$, lo è anche per

$$(2x-3)(3x+2),$$

cioè è divisibile per il trinomio

$$6x^2-5x-6 .$$

Dividendo $P(x)$ per questo trinomio

$$\begin{array}{l|l} x^3+px^2+4x+q & 6x^2-5x-6 \\ \hline -x^3+\frac{5}{6}x^2+x & \frac{1}{6}x+n \\ \hline / \ \left(p+\frac{5}{6}\right)x^2+5x+q & \\ \quad -6nx^2+5nx+6n & \\ \hline \quad \text{zero} & \end{array}$$

il primo termine del quoziente è $\frac{1}{6}x$; rimane da determinare il secondo termine del quoziente in modo che sia

$$\left(\frac{5}{6}+p\right)x^2+5x+q=6nx^2-5nx-6n.$$

Per il principio di identità dei polinomi si ha:

$5=-5n \Rightarrow n=-1$;

quindi $q=-6n \Rightarrow q=6$;

$\frac{5}{6}+p=6n \Rightarrow p=-\frac{41}{6}$.

L'Angolista Guido Gatti di CREMONA ci ha inviato la seguente

RISOLUZIONE.

Un altro metodo per risolvere la questione proposta è il seguente:

Sia l'equazione

$$x^3+px^2+4x+q=0 \qquad (1)$$

e x_1, x_2, x_3 siano le radici che soddisfano la (1). Si ha allora

$$x^3+px^2+4x+q=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

ovvero

$$x^3+px^2+4x+q=x^3-(x_1+x_2+x_3)x+$$
$$+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3.$$

Per il principio di identità dei polinomi si ha

$$p=-(x_1+x_2+x_3)$$
$$4=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$$
$$q=-x_1\cdot x_2\cdot x_3.$$

Poiché sappiamo (v. I RISOLUZIONE) che $x_1=\frac{3}{2}$ e $x_2=-\frac{2}{3}$

da cui $x_1+x_2=\frac{5}{6}$ e $x_1x_2=-1$

si ha

$$\begin{cases} p=-\left(\frac{5}{6}+x_3\right) & & p=-\frac{41}{6} \\ 4=-1+\frac{5}{6}x_3 & \Rightarrow x_3=6 & \\ q=-(-1)x_3 & & q=6 \end{cases}$$

QUESTIONE 196

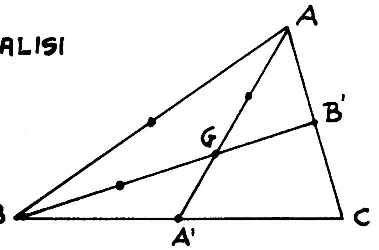
Costruire un triangolo essendo note le misure di due mediane (m_a, m_b) e del lato relativo ad una di esse (a).

RISOLUZIONE

di Marco Longinetti di FIRENZE e di Francesco Fogliotti di GENOVA-SAMPIERDARENA.

Supponiamo il problema risolto e ABC sia il triangolo cercato.

ANALISI



Si ha $\overline{BC}=a$; $\boxed{\overline{BA'}=\frac{a}{2}}$;

$\overline{AA'}=m_a$; $\overline{BB'}=m_b$;

$G\equiv(AA'\cap BB)$.

Per la proprietà del *baricentro* di un triangolo sappiamo che

$2\cdot\overline{GB'}=\boxed{\overline{BG}=\frac{2}{3}m_b}$

$\frac{1}{2}\cdot\overline{AG}=\boxed{\overline{AG'}=\frac{1}{3}m_a}$

Osserviamo quindi che del triangolo A'BG conosciamo le misure dei lati.

Possiamo quindi effettuare la

COSTRUZIONE

prima del triangolo A'BG

(sempre che sia:

$$|\overline{BG}-A'G|<\overline{BA'}<\overline{BG}+\overline{A'G}$$

cioè

$$\left|\frac{2}{3}m_b-\frac{1}{3}m_a\right|<\frac{a}{2}<\frac{2}{3}m_b+\frac{1}{3}m_a$$

ossia

$$\left|\frac{4}{3}m_b-\frac{2}{3}m_a\right|<a<\frac{4}{3}m_b+\frac{2}{3}m_a$$

e successivamente del triang. ABC.

Costruito il triangolo $A'BG$, è facile determinale la posizione di A e di C:

A ; sul prolungamento di $A'G$
$$\overline{GA} = 2 . \overline{A'G} = \frac{2}{3} m_b \;;$$

C ; sul prolungamento di BA'
$$\overline{A'C} = \overline{BA'} = \frac{a}{2} \,.$$

QUESTIONE 197

Considerata la successione ricorrente di FIBONACCI (VI,3 pag.1)

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots$
$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$

determinata dalle condizioni:

$a_0 = 0$; $a_1 = 1$;

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

dimostrare che

1) $a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^{n-1}$ (*)

2) $a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_{2n+1}$

RISOLUZIONE di M. LONGINETTI - FIRENZE

Dimostro la relazione 1) per mezzo del principio d'induzione:

Essa è verificata per $n=1$:

$a_1^2 - a_0 \cdot a_2 = (-1)^0$ $\qquad 1^2 - 0 \cdot 1 = 1$;

per $n=2$

$a_2^2 - a_1 a_3 = (-1)^1$ $\qquad 1^2 - 1 \cdot 2 = -1$;

per $n=3$

$a_3^2 - a_2 a_4 = (-1)^2$ $\qquad 2^2 - 1 \cdot 3 = 1$;

ecc.

Supponiamo che sia vera per n e dimostriamo che è vera anche per $n+1=k$

Infatti si ha dalla 1)

$$a_n \cdot a_n - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^{n-1} \;;$$
$$a_n (a_{n+2} - a_{n+1}) - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^{n-1};$$
$$a_n \cdot a_{n+2} - a_n \cdot a_{n+1} - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^{n-1};$$
$$a_n \cdot a_{n+2} - a_{n+1} (a_n + a_{n-1}) = (-1)^{n-1};$$
$$a_n \cdot a_{n+2} - a_{n+1} \cdot a_{n+1} = (-1)^{n-1};$$
$$a_n \cdot a_{n+2} - a_{n+1}^2 = (-1)^{n-1};$$

e moltiplicando ambo i membri per -1:

$$a_{n+1}^2 - a_n \cdot a_{n+2} = (-1)^n$$

cioè è anche vera per $n+1=k$:

$$a_{(n+1)}^2 - a_{(n+1)-1} \cdot a_{(n+1)+1} = (-1)^{(n+1)-1}$$
$$\Rightarrow a_k^2 - a_{k-1} \cdot a_{k+1} = (-1)^{k-1}$$

c.d.d.

Per dimostrare relazione 2) si consideri la seguente serie di uguaglianze:

$$a_n = 1 \cdot a_n + 0 \cdot a_{n-1} = a_1 a_n + a_0 a_{n-1};$$
$$a_{n+1} = 1 \cdot a_n + 1 \cdot a_{n-1} = a_2 \cdot a_n + a_1 a_{n-1};$$
$$a_{n+2} = 2 \cdot a_n + 1 \cdot a_{n-1} = a_3 a_n + a_2 a_{n-1};$$
$$a_{n+3} = 3 \cdot a_n + 2 \cdot a_{n-1} = a_4 a_n + a_3 a_{n-1};$$
$$a_{n+4} = 4 a_n + 3 a_{n-1} = a_5 a_n + a_4 a_{n-1};$$
$$a_{n+5} = a_6 \cdot a_n + a_5 a_{n-1} \;;$$

....

Ogni nuova uguaglianza si ottiene sommando membro a membro le due uguaglianze precedenti: si noti che i coefficienti di a_n e di a_{n-1} sono numeri della serie di FIBONACCI.

....

$$a_{n+m-1} = a_m a_n + a_{m-1} a_{n-1} \;;$$
$$a_{n+m} = a_{m+1} a_n + a_m a_{n-1} \;;$$
$$a_{n+m+1} = a_{m+2} a_n + a_{m+1} a_{n-1} \,.$$

Se poniamo in quest'ultima $m=n$ si ha successivamente:

$$a_{2n+1} = a_{n+2} a_n + a_{n+1} a_{n-1} =$$
$$= (a_n + a_{n+1}) a_n + a_{n+1} (a_{n+1} - a_n) =$$
$$= a_n^2 + a_{n+1} \cdot a_n + a_{n+1}^2 - a_{n+1} \cdot a_n =$$
$$= a_n^2 + a_{n+1}^2 \,.$$

c.d.d.

NOTA. Gli Angolisti Roberto Mar-

(*) La 1), pubblicata a pag. 3 del fasc. VI,4 conteneva un errore di stampa: $(-1)^n$ invece di $(-1)^{n-1}$.
Ma tutti i risolutori lo hanno facilmente rilerato.

tinolli e Furio Honsell di TRIESTE ci hanno scritto che discutendo "sulle serie di FIBONACCI" hanno scoperto che le proprieta' proposte nelle questioni 193 e 197 si possono generalizzare per qualunque serie ricorrente,

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1},$$

individuata dai primi due termini a_0 e a_1

I) $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_{n+2} - a_1$.

II) $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1} = a_{2n} - a_0$

III) $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n} = a_{2n+1} - a_1$

IV) $a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (a_1^2 - a_0^2 - a_1 a_0)(-1)^{n+1}$

La quinta invece si generalizza in un modo interessante:

V) $a_n \cdot \bar{a}_{n'} + a_{n+1} \cdot \bar{a}_{n'+1} = \bar{a}_{n+n'+1}$

dove a_n e a_{n+1} sono due termini qualsiasi consecutivi della serie primitiva ($a_0 = 0$; $a_1 = 1$), mentre $\bar{a}_{n'}$, $\bar{a}_{n'+1}$ e $\bar{a}_{n+n'+1}$ sono tre termini di una qualsiasi serie, i primi due consecutivi, il terzo indiduato dall'indice somma degli indici del secondo della serie primitiva e del primo della serie secondaria.

ESEMPI: Si considerino le due serie:

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10} ...
a_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55 ...
$\bar{a}_{n'}$	2	5	7	12	19	31	50	81	131	212	343 ...

$$a_5 \cdot \bar{a}_{2'} + a_6 \cdot \bar{a}_{3'} = \bar{a}_{8'} \rightarrow 5 \cdot 7 + 8 \cdot 12 = 35 + 96 = 131$$

$$a_2 \cdot \bar{a}_{3'} + a_3 \cdot \bar{a}_{4'} = \bar{a}_{6'} \rightarrow 1 \cdot 12 + 2 \cdot 19 = 12 + 38 = 50$$

$$a_0 \cdot \bar{a}_{5'} + a_1 \bar{a}_{6'} = \bar{a}_{6'} \rightarrow 0 \cdot 31 + 1 \cdot 50 = 0 + 50 = 50$$

$$a_4 \cdot a_4 + a_5 \cdot a_5 = a_9 \rightarrow 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 = 9 + 25 = 34$$

In questa ultima $\bar{a}_{n'} \equiv a_n$ e si puo' scrivere

$$a_4^2 + a_5^2 = a_{4+5} \longrightarrow a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_{2n+1}.$$

QUESTIONE 198

Condurre per due vertici opposti di un dato rettangolo due rette parallele tali che la loro distanza sia uguale al lato minore del rettangolo.

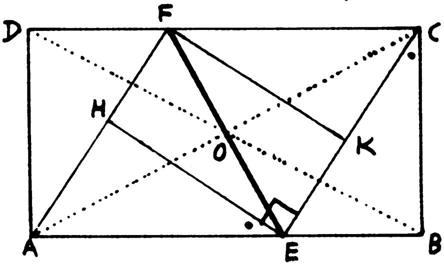
Non essendoci pervenute risposte da parte di alunni di Scuola Media, i due premi previsti non sono stati assegnati.

RISOLUZIONE

di Enrico Jannelli del L. Sc. "Fermi" di BARI

Sia ABCD il rettangolo dato, e siano A e C i due vertici opposti prescelti. Si conduca per O, punto di intersezione delle diagonali, la perpendicolare ad AC e siano E ed F le intersezioni di detta perpendicolare rispettivamente con i lati AB e CD.

Si hanno due coppie di rette che soddistano alle condizioni previste.



a) Le coppie di rette AE e CF, che coincidono con le rette contenenti i lati AB e CD, ovviamente rappresentano una soluzione.

b) Le rette AF e CE costituiscono l'altra coppia. Infatti condotta per E la perpendicolare ad AF, sia H la proiezione di E su AF. Essendo E sull'asse di AC, ne segue $\overline{AE} = \overline{EC}$.

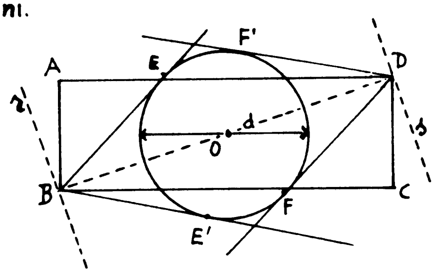
I triangoli rettangoli AHE ed EBC sono uguali poiché hanno le ipotenuse uguali ($\overline{AE} = \overline{EC}$) ed hanno uguali gli angoli HEA e BCE, (complementari dello stesso angolo BEC.

Quindi $\overline{EH} = \overline{BC}$ c.d.d.

RISOLUZIONE generalizzata di Francesco ROMEO. L. Sc. "Archimede" di MESSINA

Per condurre dai vertici opposti B e D di un rettangolo ABCD, due rette parallele, la cui distanza sia uguale ad un segmento dato d, si costruisce la circonferenza avente il centro in O ($O \equiv AC \cap BD$) e raggio uguale a $\frac{d}{2}$. Si conducono ora da B e da D le rette tangenti alla suddetta circonferenza.

Le rette BE e DF e le rette BE' e DF' rapprentano le due soluzioni.



La costruzione è possibile se $0 \leq d \leq \overline{BD}$

Se $d = 0$ le due coppie di rette parallele coincidono con la retta BD.

Se $d = \overline{BD}$ si ha una coppia di rette r, s, perpendicolari a BD nei punti B e D.

QUESTIONE 199

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y + xy = 111 \\ x + z + xz = 55 \\ y + z + yz = 31 \end{cases}$$

$(x, y, z \in \mathbb{R})$. Generalizzare.

Alfonso La Paglia

I premi sono stati assegnati a Marco Longinetti del L. Sc. "Leon. da Vinci" di Firenze (Lire 3000) e a Roberto Martinolli del L. Sc. "Oberdan" di Trieste (Lire 2000).

RISOLUZIONE

Consideriamo il sistema generalizzato $\begin{cases} x + y + xy = a \\ x + z + xz = b \\ y + z + yz = c. \end{cases}$

Aggiungendo 1 ad ambo i membri di ciascuna equazione si ha:

$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = a+1 \\ (x+1)(z+1) = b+1 \\ (y+1)(z+1) = c+1 \end{cases} \quad (I)$$

Moltiplicando membro a membro si ha:

$$(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2 = (a+1)(b+1)(c+1)$$

da cui:

$$(x+1)(y+1)(z+1) = \pm\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)} \quad (II)$$

Dividendo membro a membro la (II) per ciascuna delle (I) si ha:

$$x+1 = \pm\sqrt{(a+1)(b+1):(c+1)}$$
$$y+1 = \pm\sqrt{(a+1)(c+1):(b+1)}$$
$$z+1 = \pm\sqrt{(b+1)(c+1):(a+1)}$$

e quindi:

$$x = -1 \pm\sqrt{(a+1)(b+1):(c+1)}$$
$$y = -1 \pm\sqrt{(a+1)(c+1):(b+1)}$$
$$z = -1 \pm\sqrt{(b+1)(c+1):(a+1)}.$$

Bisogna osservare che, affinché le radici non perdano significato occorre che a, b, c siano diversi da -1, e affinché dette radici siano reali occorre che sia

$$(a+1)(b+1)(c+1) > 0$$

cioè che i valori di a, b, c siano o tutti e tre maggiori di -1, oppure uno maggiore e due minori di -1.

Nel caso particolare è

$a+1 = 112 = 14 \cdot 8$

$b+1 = 56 = 14 \cdot 4$

$c+1 = 32 = 8 \cdot 4$ da cui:

$x_1 = 13; y_1 = 7; z_1 = 3 \mid x_2 = -15; y_2 = -9; z_2 = -5.$

LE FRAZIONI CONTINUE E I NUMERI DI FIBONACCI

Supponiamo che si cerchi di determinare la radice positiva dell'equazione:

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \qquad (1)$$

nel modo seguente: si dividono tutti i termini per x (certamente diverso da zero) e si scrive la (1) nella forma

$$x = 2 + \frac{1}{x} \qquad (2).$$

L'incognita x si ritrova nel 2° membro della (2) e quindi si può sostituire ancora il valore fornito dalla (2). Si hanno successivamente le *frazioni continue*:

$$x = 2 + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{x}}} = \cdots$$

Trascurando successivamente il termine $\frac{1}{x}$ nella precedente catena di uguaglianze si ottiene la successione delle frazioni (dette *ridotte*):

$$2,\ \frac{5}{2},\ \frac{12}{5},\ \frac{29}{12},\ \frac{70}{29},\ \frac{169}{70},\ \ldots$$

che si approssimano via via al valore della radice positiva della (1):

$$x = 1 + \sqrt{2} = 2{,}414214\ldots$$

La più semplice frazione continua aritmetica illimitata è $f = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}$; f soddisfa l'equazione $f = 1 + \frac{1}{f}$ cioè $f^2 - f - 1 = 0$, la cui radice positiva è $f = (1 + \sqrt{5}) : 2$.

Le ridotte di f sono

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \ldots$$

Sia i numeratori, sia i denominatori appartengono alla successione

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Si ritrovano ancora i numeri di FIBONACCI (Vedi Angolo acuto VI, 3 e questioni 193 e 197 risolte in questo fascicolo). ★

RISOLUTORI delle QUESTIONI	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199
AGROSI Aniello - DISO (Le)		●		●	●	●		●		●
BERNI Maurizio, L. Sc - REGGIO EMILIA						●				
BERTI Luciano, L. Sc. "Castelnuovo" - FIRENZE			●							
BIGI Mauro, L. Sc. "Castelnuovo" - FIRENZE		●								
CASSESE Antonio, I. Tecn. Comm. - NOLA (Na)					●					
CORBISIERO Gabriele, - DOMICELLA (Av.)		●				●				
DALLA COSTA Irma, L. Cl. - PADOVA				●	●	●	●			
D'ANTONIO Pasqua, L. Sc. "Einstein" TORINO		●								
DE CRESCENZO Pasquale - NOLA (Na)	●	●		●		●	●			
FOGLIOTTI Francesco - GENOVA-SAMPIERDARENA	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
GIACINTI Simonetta, Ist. T. P. "G. Romano" - ROMA		●								
GRECO Pasquale, I. T. Comm. - NOLA (Na)			●							
GUARATO Giuseppe - VALDAGNO (Vi)	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
GAI Davide, L. Sc. "A. Volta" - MILANO		●		●	●		●			
GALLINGANI Maria Lucia - L. Sc. - REGGIO EMILIA		●								
GATTI Guido - CREMONA	●		●	●		●				
JANNELLI Enrico, L. Sc. "Fermi" BARI	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
LONGINETTI Marco, L. Sc. "L. Da Vinci" - FIRENZE	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
MARRONARO Stefania, Ist. T. P. "G. Romano" - ROMA		●								
MARTINOLLI Roberto, L. Sc. "Oberdan" - TRIESTE	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
MOSTARDI Franco, L. Sc. "Enriques" - LIVORNO	●		●	●	●			●	●	
MARCHIONNA Mario, L. Sc. "A. Volta" - MILANO		●								
ROMEO Francesco, L. Sc. "Archimede" - MESSINA		●			●	●	●		●	●
ROSELLI Walter - CREMONA	●	●		●	●	●				
SUCCI Marco, L. Sc. "A. Volta" - MILANO	●	●		●	●	●	●		●	●
TERRANOVA Diego, L. Sc. "Oberdan" - TRIESTE			●				●			
VINCELLI Antonio - CASACALENDA (Cb)				●	●	●	●			

SPEDIZIONE IN ABBONAMENTO POSTALE GRUPPO III - 70%

PER FAVORE, NON CESTINATE.

Se questo periodico non vi interessa, vi preghiamo di passarlo ad un appassionato che voglia sottoscrivere l'abbonamento, oppure di respingere le copie ricevute, in busta affrancata come stampe, al mittente:

ANGOLO ACUTO - Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE

Comunicato della MATHESIS

«Il Comitato Direttivo della MATHESIS ha invitato i Soci della Sezione Fiorentina a riprendere l'attività. Per questo ha affidato alla prof. Cesarina Dolfi l'incarico di riorganizzare la Sezione. Alla prima riunione che si prevede nella seconda metà di ottobre, sono invitati oltre i Docenti di Matematica e Fisica, anche i Cultori di Matematica ed in particolare anche i Giovani appassionati, studenti universitari e di scuole medie superiori».

-Angolo acuto- nel formulare l'augurio che la Sezione possa rinascere per realizzare un piano concreto di iniziative valide e di lavoro proficuo, auspica anche la rapida organizzazione di un Club matematico di Giovani verso il quale "Angolo acuto" è disponibile per la più aperta reciproca collaborazione.

AVVERTENZE IMPORTANTI PER I RISOLUTORI *Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte. Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale. Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno scolastico e l'età. Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad*

ANGOLO ACUTO, Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE
al più presto possibile

Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori. Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 gennaio 1970
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso*

Stampato dalla Tip. "G. Capponi" - Firenze

Associato all'USPI
Unione Stampa Periodica Italiana