L'Angolo acuto
Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

ANNO VI - 1975

OTTOBRE

10

Periodico mensile
a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

conto corrente postale 5/27919

ABBONAMENTI PER IL 1976

Studenti	L. 2000.
Professori e scuole	L. 2400.
Sostenitori da	L. 3000.
Annate arretrate	L. 2000.

L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio.

LO SPAZIO A QUATTRO DIMENSIONI

di *Claudio Bernardi*

Lo studio della geometria euclidea viene tradizionalmente diviso in due parti: geometria del piano e geometria dello spazio.

Trattando la prima, si studiano le proprietà dei vari enti che, come gli angoli, i poligoni, le circonferenze, vengono costruiti in un piano. Con più rigore possiamo dire che si considera un *insieme ambiente* (o *universo*) detto piano: i suoi elementi vengono chiamati punti, mentre i suoi sottoinsiemi prendono il nome di figure, o, più precisamente, di figure piane. Tra le figure piane ve ne sono alcune di tipo particolare, chiamate rette, le cui caratteristiche sono implicitamente precisate da un'opportuna serie di postulati.

Passando dalla geometria del piano alla geometria dello spazio, si considera un ambiente più ampio detto, appunto, spazio; anche in questo caso si usano i termini punti e figure per indicare rispettivamente gli elementi e i sottoinsiemi dell'insieme ambiente. Nello spazio abbiamo due classi di figure "privilegiate", caratterizzate dai vari postulati: le rette e i piani. E, si noti, ogni piano dello spazio ha le stesse caratteristiche dell'ambiente della geometria piana.

Nello studio dei due rami della geometria si incontrano coppie di concetti che appaiono strettamente legati fra loro: ad esempio, ai cerchi della geometria piana corrispondono, nello spazio, le sfere, mentre i poliedri possono senz'altro essere visti come le figure spaziali analoghe ai poligoni piani.

Oltre alla geometria del piano (a due dimensioni) e dello spazio (a tre dimensioni), si potrebbe considerare anche la geometria della retta, a una sola dimensione: in questo caso l'insieme ambiente, cioè la retta, non è dotato di sottoinsiemi particolari. Naturalmente si tratta di una struttura molto povera e quindi, di per sé, poco significativa.

Senz'altro più interessante e suggestiva è invece la geometria a quattro dimensióni in queste pagine vedremo in primo luogo come la si può introdurre; successivamente esamineremo alcuni aspetti inconsueti che si presentano nel nuovo ambiente.

Ricordiamo che da un punto di vista fisico l'introduzione di una quarta dimensione è utile nella teoria della relatività, secondo la quale, almeno sotto certi aspetti, il tempo va considerato alla stregua di una dimensione spaziale.

Un ampliamento è suggerito comunque anche da considerazioni più tipicamente matematiche: il tentativo di generalizzare, di passare cioè da casi particolari a situazioni più generali, è uno sforzo costante della matematica moderna. E' chiaro che, per essere in grado di introdurre uno spazio a più di tre dimensioni, occorre innanzitutto precisare il concetto di *dimensione*. E' anzi un tipico processo matematico partire da nozioni che ci sembrano chiare da un punto di vista intuitivo, e cercarne definizioni rigorose: non si tratta soltanto di una ricerca di precisione, perché proprio facendo riferimento ad una impostazione più rigorosa si riescono a generalizzare i concetti in esame, ottenendo di conseguenza nuove possibilità di applicazioni.

Nel nostro caso, vi sono essenzialmente due metodi per affrontare il problema, il metodo *sintetico* ed il metodo *analitico*. Il primo consiste nel chiarire il concetto di dimensione per via puramente geometrica. In quest'ordine di idee si può partire, ad esempio, dalla seguente osservazione: date due rette perpendicolari r ed s, nello spazio esiste una terza retta perpendicolare sia ad r che ad s, mentre ciò non avviene nel piano. Ne segue questa possibile definizione: "la dimensione di un ambiente è il numero massimo di rette che si possono tracciare in modo che ciascuna risulti perpendicolare a tutte le altre". A questo punto, per costruire la geometria a quattro dimensioni, occorre individuare enti da assumere come primitivi ed introdurre opportuni postulati, in modo che, fra l'altro, esistano quattro rette a due a due perpendicolari.

La via analitica, invece, mediante l'introduzione delle *coordinate cartesiane* permette di trattare l'argomento utilizzando mezzi prevalentemente *algebrici*. Non c'è dubbio che le dimostrazioni geometriche sono quasi sempre più eleganti e spesso anche più chiare se condotte per via sintetica, cioè senza far ricorso a calcoli di natura algebrica; tuttavia, ai fini dell'introduzione della geometria a quattro dimensioni, la via più semplice e convincente è offerta proprio dalla geometria analitica. Vediamo come si procede.

Una volta fissato un riferimento cartesiano, quante coordinate - numeri reali relativi - occorrono per fissare la posizione di un punto? Sappiamo che sulla retta basta una sola coordinata, nel piano ne sono necessarie due, mentre nello spazio ne servono tre(1)

---

(1) Nella nota **"I numeri cardinali"** apparsa nel n. 9 - 10 di **Angolo acuto** (1971), si è mostrato che un solo numero è sufficiente anche per fissare la posizione di un punto nel piano. Non si trattava tuttavia di un sistema di coordinate, perché la corrispondenza indicata fra punti e numeri reali non è continua, nel senso che, variando con continuità un numero, il punto corrispondente non varia con continuità.

Allora il concetto di dimensione può venir facilmente spiegato ricorrendo al *numero di coordinate* che sono necessarie per fissare la posizione di un punto: il piano ha due dimensioni perché ogni punto è individuato da una coppia di numeri, lo spazio ha tre dimensioni perché invece ad un punto va associata una terna di numeri.

Detto ora $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali, indichiamo con $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ il prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ con se stesso, cioè l'insieme di tutte le coppie ordinate (x, y) di numeri reali. Pertanto un sistema di coordinate cartesiane nel piano individua una corrispondenza biunivoca fra i punti e l'insieme $\mathbb{R}^2$. Ricordiamo anche che, in tale sistema diriferimento, ogni retta può essere vista come l'insieme dei punti le cui coordinate (x, y) soddisfano ad un'equazione di primo grado in *x* e *y* - ad esempio $x = y$ oppure $2x + 5y - 7 = 0$ - e, viceversa, ogni equazione individua una retta. In questo modo riusciamo a rappresentare anche le rette per una via puramente algebrica.

Possiamo allora addirittura *identificare* ogni punto del piano con la coppia corrispondente di numeri reali e ogni retta con l'insieme delle coppie che soddisfano una determinata equazione. In altre parole, è lecito chiamare, per definizione, piano il prodotto cartesiano $\mathbb{R}^2$, individuando poi, per mezzo delle equazioni di primo grado, particolari sottoinsiemi da assumere come rette. E la geometria analitica ci garantisce che questo modo di procedere è corretto: supponendo noto l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali,riusciamo a costruire il piano della geometria euclidea.

Il discorso è analogo, anche se un po' più complesso, per la geometria dello spazio. In questo caso ogni punto ha tre coordinate (x, y, z) ed ogni equazione di primo grado nelle tre cariabili *x*, *y* e *z* è soddisfatta dall'insieme dei punti di un piano. Allora, dal punto di vista algebrico, possiamo assumere come insieme ambiente il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ e come piani gli insiemi delle terne di numeri reali soluzioni di un'equazione di primo grado. Infine, il modo più semplice per individuare le rette è considerarle come intersezione di due piani: chiamiamo cioè retta l'insieme delle terne (x, y, z) che soddisfano ad un sistema formato da due equazioni di primo grado [(2)].

E' a questo punto del tutto naturale assumere come insieme ambiente per lo spazio a quattro dimensioni o *iperspazio* l'insieme $\mathbb{R}^4$ formato da tutte le quaterne ordinate (x, y, z, t) di numeri reali. Nel piano avevamo una sola classe di sottoinsiemi privilegiati (le rette), mentre nello spazio ne avevamo un'altra (i piani, ciascuno dei quali, come abbiamo già notato, gode delle stesse proprietà dell'ambiente con una dimensione in meno). Nell'iperspazio dovremo allora considerare *tre* classi di figure privilegiate:

gli *iperpiani*: ciascuno di essi ha le stesse caratteristiche dello spazio usuale ed è costituito dalle quaterne che soddisfano ad un'equazione di primo grado nelle variabili *x*, *y*, *z* e *t*, ad esempio $2x + y + z - t = 0$, $y + 2t = 3$;

----

(2) Naturalmente vanno considerati sistemi possibili e formati da equazioni non proporzionali: ad esempio, fra i sistemi

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -2x + 4y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

solo il primo individua una retta. Questa precisazione vale anche per le situazioni analoghe che si presenteranno in seguito.

i *piani*: individuabili come intersezione di due iperpiani, cioè come insieme delle quaterne che soddisfano ad un sistema di due equazioni di primo grado, ad esempio:

$$\begin{cases} 3x - y + 7t = -4 \\ x + y - z + t = 0 \end{cases}$$

le *rette*: individuabili come intersezione di tre iperpiani, cioè come insieme delle quaterne che soddisfano ad un sistema di tre equazioni di primo grado, ad esempio:

$$\begin{cases} x - z + 2t = 1 \\ y = z \\ x - 2y + z + t = 8 \end{cases}$$

Si noti che nell'iperspazio l'intersezione di due piani si riduce, in generale, ad una figura formata da un sol punto: ad esempio i due piani

$$\begin{cases} x + t = 0 \\ 2y + z = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + y - z = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

hanno in comune solo il punto di coordinate $(1, 0, 2, -1)$. Verifichi il lettore che, in generale, un iperpiano e un piano si intersecano secondo una retta, mentre un piano ed una retta non hanno punti comuni (e sarebbe più proprio chiamarli *sghembi* che non paralleli).

Nell'iperspazio possiamo ora introdurre i concetti analoghi a quelli che già conosciamo nel piano e nello spazio. Abbiamo già notato che ai poligoni piani corrispondono, nello spazio, i poliedri. E mentre i *poligoni* sono limitati da *segmenti* (i lati) i *poliedri* possono invece venir definiti come "la parte finita di spazio limitata da *poligoni* disposti in modo opportuno [(3)]". E' allora naturale definire un *iperpoliedro*, cioè un poliedro nello spazio a quattro dimensioni, come "la parte finita di iperspazio limitata da poliedri disposti in modo tale che ogni loro faccia sia comune a due e a due soli di essi". Certo, non è facile vedere un iperpoliedro, cioè intuire come sia fatto. A questo scopo, per aiutare l'intuizione, costruiamo lo "sviluppo tridimensionale" di un ipercubo.

Riflettiamo: considerato un poliedro nello spazio, il suo sviluppo si ottiene distendendo su di un piano i poligoni che ne costituiscono le facce. Ad esempio, lo sviluppo di un cubo è formato da sei quadrati. Allora, dato un iperpoliedro potremo "distendere" nell'usuale spazio a tre dimensioni i poliedri che ne costituiscono le iperfacce. Si può dimostrare che un ipercubo, cioè il solido a quattro dimensioni analogo al cubo, ha otto iperfacce, ciascuna delle quali è un cubo (così come le facce di un cubo sono tutte quadrati): sviluppandolo si ottiene la configurazione illustrata in figura 1.

---

(3) A rigore questa definizione, pure molto diffusa, non è del tutto corretta se non si precisa il significato di "limitata". Tale significato, comunque, è senz'altro chiaro almeno da un punto di vista intuitivo.

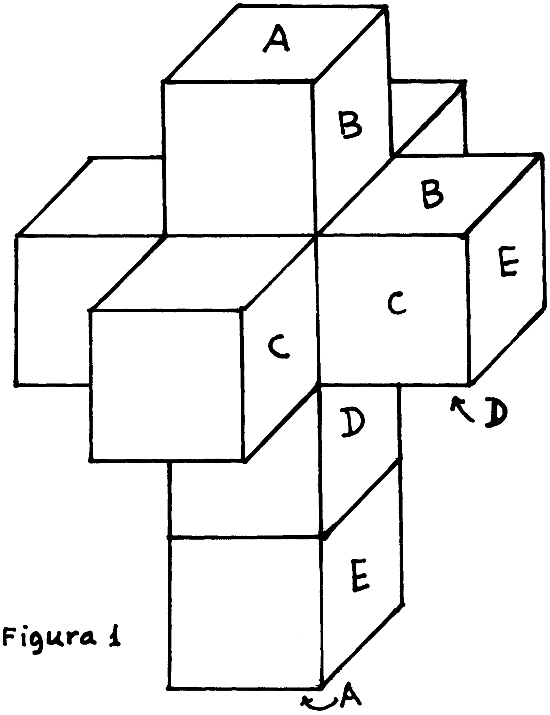

Figura 1

Come si può ora ricostruire l'ipercubo? Ancora non è facile visualizzare la costruzione proprio perché essa non è realizzabile nello spazio usuale; comunque vanno incollate fra loro, fra le altre, le facce indicate da una stessa lettera: in queste operazioni, tuttavia, non si dovranno storcere i singoli cubi, così come non si piegano i singoli quadrati quando si costruisce un cubo.

E come l'ipercubo si possono considerare e descrivere le ipersfere e, più in generale, gli ipersolidi di rotazione - si tratta, stavolta, di rotazione attorno ad un piano! - ecc. In definitiva, si può rifare l'usuale geometria, sia pure con notevoli difficoltà in più dovute alla impossibilità di disegnare illustrazioni soddisfacenti. Si pongono problemi nuovi, come quello di trovare le formule per calcolare l'ipervolume di un iperpoliedro o il volume del suo contorno (che, si ricordi, è formato da poliedri). D'altra parte, anche nel nuovo ambiente si ritrovano gli enti che già conosciamo: ad esempio si introducono, con un'opportuna definizione, le rette perpendicolari; com'è prevedibile, stavolta esistono quattro rette a due a due perpendicolari, ad esempio gli assi x, y, z e t del riferimento cartesiano.

Una considerazione di notevole interesse è la seguente. Due figure vengono dette *uguali* quando esiste un *movimento rigido* che permette di portarle a coincidere. Senza entrare nel delicato problema di definire un movimento rigido, chiediamoci dove deve avvenire tale movimento.

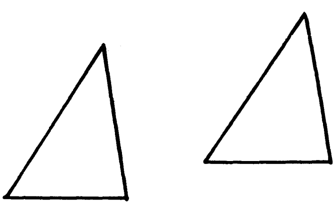

Figura 2

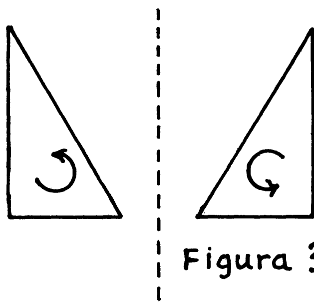

Figura 3

Consideriamo in primo luogo i due triangoli uguali della figura 2. Per sovrapporli basta una traslazione nel piano. Anche i due triangoli della figura 3 sono uguali, in quanto *simmetrici* rispetto alla retta tratteggiata. Se però ricalchiamo il contorno di uno di essi su di un foglio di carta velina, non riusciamo a trasportarlo sull'altro senza sollevare la carta velina dal foglio del disegno: come è facile verificare, è necessario capovolgere la carta velina; pertanto, per provare l'uguaglianza di due figure piane, bisogna ricorrere, in certi casi, ad un *ribaltamento* nell'ambiente con una dimensione in più.

La stessa situazione si riproduce considerando figure a tre dimensioni. In questo caso si parla di uguaglianza *diretta* e di uguaglianza *inversa*: diretta se le due figure spaziali considerate si possono effettivamente far coincidere, inversa se, come nel caso delle due mani o di due figure simmetriche rispetto ad un piano, ciò non è invece possibile. Non è possibile ... restando nello spazio a tre dimensioni. Ma se pensiamo di immergere le figure nell'iperspazio ed accettiamo anche movimenti che si svolgono in questo ambiente più ampio, allora riusciamo a sovrapporre punto per punto anche due figure inversamente uguali.

Osserviamo ancora il primo triangolo della figura 3: si tratta della metà di un triangolo equilatero, in cui l'angolo di 30° precede immediatamente l'angolo retto nel senso antiorario (indicato con una freccia): capovolgendo nello spazio tridimensionale questo triangolo se ne trova un altro - il secondo della stessa figura - che non gode della stessa proprietà. In modo del tutto analogo, ribaltando una mano *destra* nell'iperspazio, si ottiene una mano *sinistra*. In altre parole, una persona normale, dopo un viaggio nella quarta dimensione, rischia di tornare inversamente uguale a quella che è partita, cioè ... mancina!

Per capire meglio la situazione, pensiamo ad esseri che vivano in un mondo a due dimensioni: insetti piatti, che non sappiano volare e non riescano nemmeno a concepire
xxxxxxxx
la terza dimensione (altezza). Il loro corpo ha normalmente la forma illustrata in figura 4, ma alcuni, i mancini, sono invece del tipo della figura 5. Un insetto mancino restando nel suo ambiente - il piano - non riesce, per quanti movimenti faccia, a diventare come gli altri. Ci riuscirebbe senza difficoltà con un salto in una dimensione in più, e, si noti, non si accorgerebbe al ritorno di essere capovolto, in quanto non è in grado di distinguere il basso dall'alto.

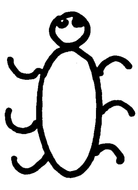

Figura 4

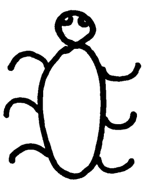

Figura 5

La costruzione dell'iperspazio dovrebbe convincere che le tre normali dimensioni non hanno, in geometria, un carattere assoluto: dal punto di vista logico, la geometria a quattro dimensioni non è meno valida né meno coerente della geometria del piano o dello spazio. E le difficoltà che incontriamo dal punto di vista intuitivo sono del tutto analoghe a quelle che incontrerebbe il nostro insetto bidimensionale qualora cercasse di costruire l'ordinaria geometria dello spazio. Cioè, la geometria a tre dimensioni ci appare più naturale solo perché, attraverso i nostri sensi, abbiamo la percezione di uno spazio tridimensionale e ci riesce allora difficile immaginare spazi diversi.

Torniamo all'essere a due dimensioni. Per rinchiuderlo basta ovviamente metterlo all'interno di un recinto. Se però questo ipotetico essere riuscisse ad un certo punto a muoversi anche verso l'alto, allora il recinto non potrebbe impedirgli di fuggire. Del tutto analoga, anche se sconcertante, è la situazione che si presenta se consideriamo un normale essere a tre dimensioni. Costui non riesce ad uscire da una stanza chiusa, ma se potesse spostarsi lungo la quarta dimensione, allora non avrebbe difficoltà ad evadere da una qualunque prigione tridimensionale. Infatti muovendosi, ad esempio, lungo una retta perpendicolare a tutti gli spigoli di una stanza (come abbiamo notato nell'iperspazio esistono quaterne di rette perpendicolari), non incontrerebbe ostacoli e potrebbe poi "rientrare" nel consueto spazio senza difficoltà.

In altre parole, come un recinto - curva piana chiusa non intrecciata - che basta per racchiudere una parte di piano non limita invece una parte di spazio, così una stanza superficie chiusa non intersecantesi - delimita una parte di spazio, ma, immersa nell'iperspazio, può essere facilmente attraversata. Il che non toglie che sia possibile catturare anche un essere che sappia muoversi lungo quattro dimensioni: solo che, per rinchiuderlo, occorre ad esempio un ipercubo.

Proseguendo l'indagine sull'iperspazio, si presentano altre situazioni piuttosto strane. Ad esempio, portando una normale catena nello spazio a quattro dimensioni, sarebbe facile sciogliere fra loro tutti i vari anelli e, si badi bene, senza romperne alcuno. Per convincerci, vediamo come è possibile dividere due circonferenze concatenate (figura 6), utilizzando una quarta dimensione (il ragionamento riuscirà più chiaro per il lettore che abbia una certa familiarità con la geometria dello spazio).

Si ricordi che lo spazio usuale può essere considerato come un iperpiano dell'iperspazio e che ogni iperpiano è caratterizzato analiticamente da un'equazione di primo grado. In particolare, se allo spazio *xyz* aggiungiamo un'altra dimensione *t*, allora lo spa-

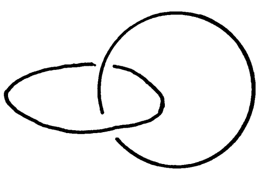

Figura 6

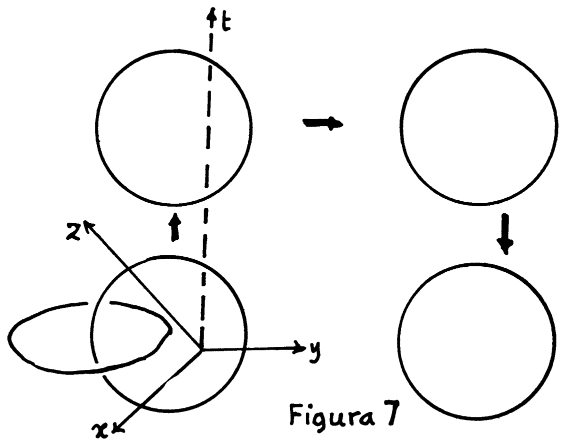

Figura 7

zio iniziale diviene l'iperpiano di equazione $t = 0$. Consideriamo allora due circonferenze concatenate contenute in tale iperpiano, cioè tali che i loro punti abbiano tutti quarta coordinata nulla. Spostando la prima circonferenza parallelamente all'asse *t*, varierà la quarta coordinata di tutti i suoi punti: quindi la circonferenza sottoposta a questo movimento non incontra l'altra, perché per i punti di quest'ultima è sempre $t = 0$. E' poi facile spostare la prima circonferenza (figura 7) perpendicolarmente all'asse *t* e quindi riportarla sull'iperpiano di partenza, distaccata dall'altra circonferenza.

Le situazioni esaminate ci mostrano come sia difficile visualizzare uno spazio a quattro dimensioni per noi che siamo abituati nel mondo tridimensionale. Ma .. è davvero tridimensionale il mondo in cui viviamo, o sono solo i nostri sensi che ce lo presentano così perché non riescono a percepire una quarta dimensione?

Con argomentazioni matematiche non possiamo certo dare una risposta soddisfacente all'ultima domanda; ma un'osservazione si può fare. Riprendiamo l'insetto bidimensionale e supponiamo di metterlo su di una superficie sferica di raggio molto grande: continuando a camminare su di essa, l'insetto non troverà confini e, d'altra parte, gli sfuggirà la curvatura della superficie. Se il nostro insetto fosse intelligente,concluderebbe con ogni probabilità di trovarsi su un piano, cioè su una superficie *illimitata.*

Anche noi non vediamo confini nel nostro spazio ed è anzi difficile pensare che se ne possano trovare in futuro, ma questo non ci autorizza a concludere che l'universo è illimitato. Basterebbe una leggera, impercettibile *curvatura* nella quarta dimensione ed ecco che ci troveremmo sulla ipersuperficie di una ipersfera, grandissima, se si vuole,ma pur sempre limitata. E un'astronave che viaggiasse sempre nella stessa direzione non incontrerebbe barriere finali: potrebbe, invece, *ritrovarsi al punto di partenza* dopo aver fatto il giro dell'universo. E, si noti, l'ipotesi matematicamente accettabile di un universo in queste condizioni, e cioè finito, non è fisicamente assurda: sotto certi aspetti è anzi confermata dalla teoria della relatività di Einstein.

Siamo forse ai confini con la fantascienza: ma l'indagine matematica, che pure può apparire arida nei suoi rigidi schemi o troppo astratta per essere utile, offre invece efficaci strumenti per interpretare una realtà che si presenta, al ricercatore fisico, sempre nuova ed affascinante. (*)

Abbiamo preferito pubblicare questa nota tutta su un fascicolo e rimandare LA PALESTRA delle GARE al prossimo fascicolo.

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 gennaio 1970
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso*

Stampato dalla Tip. "G. Capponi" - Firenze

Associato all'USPI
Unione Stampa Periodica Italiana