L'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

ANNO VI - 1975

novembre

11

Periodico mensile

a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE

conto corrente postale 5/27919

LA PALESTRA DELLE GARE

QUESTIONI PROPOSTE

AVVERTENZE PER I RISOLUTORI a pag. 2.

QUESTIONE 223

Mario, Giovanni e Paolo hanno ciascuno due delle sei occupazioni seguenti: barista, autista, suonatore, pittore, giardiniere, insegnante. Ciascuna delle occupazioni però, viene esercitata da una sola persona. Si sa che:

- l'autista chiede spesso prestiti al suonatore;
- il pittore va al bar a chiacchierare con il barista;
- l'autista è fidanzato con la sorella del pittore;
- il suonatore e il giardiniere si trovano il sabato con Giovanni; - Mario ha vari debiti con il giardiniere;
- Paolo e Mario vanno a pescare con il pittore.

Determinare le due occupazioni di ciascuno dei tre amici.

MATHESIS - Sezione di MESSINA - 1975

QUESTIONE 224

Qual è il maggiore dei numeri $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots\ldots, \sqrt[n]{n}, \ldots$?

QUESTIONE 225

Due amici A e B devono andare da una città ad un'altra. A preferisce viaggiare a velocità costante v_1 lungo la prima metà del percorso e alla velocità costante v_2 lungo la seconda metà. B invece preferisce viaggiare con velocità costante v_1 nella prima metà del tempo e con velocità costante v_2 nella seconda metà del tempo. Se partono contemporaneamente, quale dei due amici arriverà per primo? A o B?

– MATHESIS . SEZIONE di MESSINA – 1975

QUESTIONE 226

Dimostrare che presi due numeri reali a e b si ha sempre

$$a^4 + b^4 \geq a^3 b .$$

Dire quando si ha l'uguaglianza.

– SCUOLA NORMALE SUPERIORE di PISA –

QUESTIONE 227

Sia ABC un triangolo qualunque, $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e siano AA', BB', CC' le bisettrici degli angoli interni di ABC. Dimostrare che il rapporto dei triangoli ABC e A'B'C' è uguale a $\dfrac{(a+b)(a+c)(b+c)}{2abc}$.

AVVERTENZE IMPORTANTI PER I RISOLUTORI *Si raccomanda di usare fogli distinti per le singole risposte. Ciascuna risposta dovrà portare il cognome e il nome del risolutore e l'indirizzo esatto e completo del numero di codice postale. Gli studenti indichino anche la classe e l'Istituto frequentato nel corrente anno-scolastico e l'età. Le risposte delle questioni proposte in questo fascicolo dovranno essere inviate ad*

ANGOLO ACUTO - Via Cairoli 78 - 50131 FIRENZE

al più presto possibile

Per ogni questione proposta saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori e le risposte migliori. Annualmente sarà compilata una graduatoria fra i Giovani che si saranno distinti per assiduità, esattezza ed ordine e saranno assegnati loro dei premi in libri.

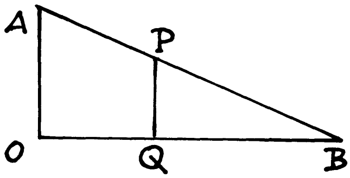
RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI PROPOSTE

QUESTIONE 157

MATURITÀ SCIENTIFICA
SESSIONE SUPPLETIVA 1973 - I Quesito

Dato il triangolo rettangolo AOB di cateti $\overline{OA}=a$ e $\overline{OB}=b$, si prenda sull'ipotenusa AB un punto P di cui sia Q la proiezione ortogonale su OB e si ponga $\overline{QP}=x$. Si consideri la funzione

$$y(x)=\frac{V_1}{V_2}$$



essendo V_1 e V_2 i volumi dei solidi generati dal trapezio OAPQ nella rotazione completa intorno ad OA e intorno ad OB e, indipendentemente dalla questione geometrica, la si studi per x variabile in tutto il campo reale.

RISOLUZIONE

dedotta dalle risposte di L. Felician di TRIESTE, *di F. Fogliotti di* GENOVA-SAMP, *di E. Frigerio di* MILANO, *di G. Guarato di* VALDAGNO, *di E. Jannelli del L. Sc. "Fermi" di* BARI *e di R. Martinolli del L. Sc. "Oberdan" di* TRIESTE.

Dalla similitudine dei triangoli AOB e PQB si ha:

$$\begin{matrix}\overline{AO} : \overline{PQ} = \overline{OB} : \overline{QB} \\ a : x = b : \overline{QB}\end{matrix} \Rightarrow \quad \overline{QB}=\frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad \overline{OQ}=\frac{b}{a}(a-x).$$

Per l'enunciato si ha

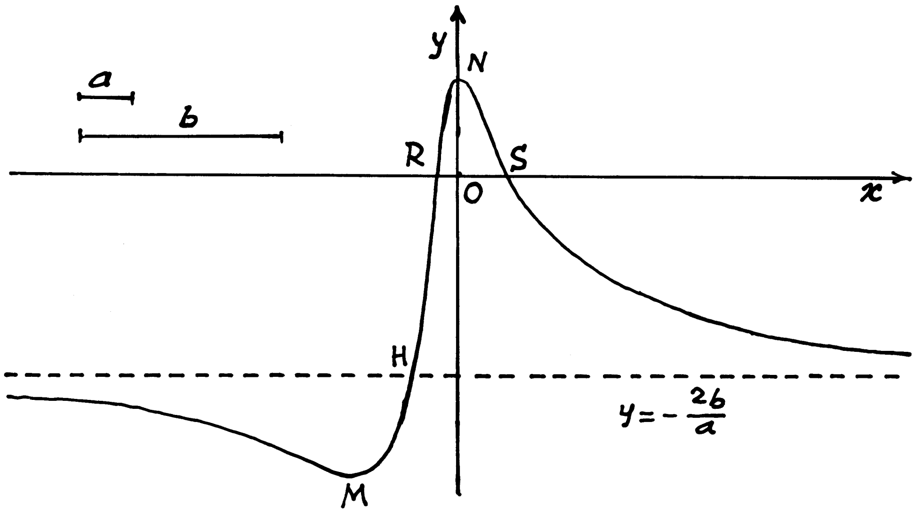
$$y(x)=\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi\cdot\overline{OQ}^2\cdot\overline{QP}+\frac{1}{3}\pi\cdot\overline{OQ}^2(\overline{OA}-\overline{QB})}{\frac{1}{3}\pi\cdot\overline{OQ}\,(\overline{QP}^2+\overline{OA}\cdot\overline{QP}+\overline{OA}^2)}=\cdots=$$

$$y(x)=\frac{b}{a}\cdot\frac{(a-x)(a+2x)}{x^2+ax+a^2}=\frac{b}{a}\cdot\frac{-2x^2+ax+a^2}{x^2+ax+a^2}\cdot \qquad (1)$$

La funzione $y(x)$ è razionale fratta, definita e continua in tutto il campo reale essendo il denominatore $D=a(x^2+ax+a^2)$ sempre positivo.

Ne segue che la curva rappresentativa della (1) non ha asintoti verticali. Essendo dello stesso grado in x, tanto il numeratore N quanto il denominatore D della (1), la curva ha un asintoto orizzontale: $y = -\frac{2b}{a}$.

Infatti è $\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{b}{a} \cdot \frac{-2x^2+ax+a^2}{x^2+ax+a^2} = \dots = -\frac{2b}{a}$.



Poichè il denominatore della (1) è sempre positivo, il segno di $y(x)$ dipende dal segno del numeratore N della (1)

$$N = b(a-x)(2x+a).$$

Si ha

$N>0$ e quindi $y(x)>0$ per $-\frac{a}{2} < x < a$,

$N<0$ e quindi $y(x)<0$ per $x<-\frac{a}{2}$ e $a<x$.

Detti R ed S i punti di intersezione della curva con l'asse delle x si ha $R\left(-\frac{a}{2}; 0\right)$, $S(a;0)$.

La derivata (1) della $y(x)$ è

$$y'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{3ax(x+2a)}{(x^2+ax+a^2)^2} = \frac{-3bx(x+2a)}{(x^2+ax+a^2)^2}.$$

Pertanto è

$y'(x)>0$ per $x(x+2a)<0$ cioè per $-2a<x<0$.

La funzione $y(x)$ è quindi *crescente* nell'intervallo $(-2a, 0)$, e si hanno perciò i seguenti punti M ed N di

MINIMO RELATIVO $M\left(-2a; -\frac{3b}{a}\right)$ MASSIMO RELATIVO $N\left(0; \frac{b}{a}\right)$.

La curva rimane compresa nella striscia limitata dalle rette di equazione $y = -\frac{3b}{a}$ e $y = \frac{b}{a}$ ed interseca l'asintoto orizzontale nel punto $H\left(-a; -\frac{2b}{a}\right)$.

La derivata seconda è $y''(x) = \dots = \dfrac{6b(x^3+3ax^2-a^3)}{(x^2-ax+a^2)^3}$ che è concorde con il trinomio di terzo grado in x al numeratore: $z = x^3+3ax^2-a^3$. Poichè si ha:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{per} & x=-3a, & z=\dots=-a^3<0 \\ \text{per} & x=-2a, & z=\dots=3a^3>0 \end{array}\right\} \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{per} & x=-a, & z=\dots=a^3>0 \\ \text{per} & x=-a/2, & z=\dots=-3a^3<0 \end{array}\right\} \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{per} & x=a/2, & z=\dots=-a^3/8<0 \\ \text{per} & x=a, & z=\dots=a^3>0 \end{array}\right\} \quad (*)$$

si deduce (*) che $y''=0$ presenta tre radici reali distinte rispettivamente comprese negli intervalli

$(-3a, -2a)$, $\left(-a, -\frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2}, a\right)$,

e quindi la curva presenta tre punti di *flesso*.

QUESTIONE 200

a) Verificare che, dati i numeri $a, b, c \in \mathbb{R}$, è
$E = 4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2 = 4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2 = 4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$,
ossia che la forma $E = f(a,b,c)$ è INVARIANTE per una sostituzione ciclica su (a,b,c).

b) Se, essendo $a,b,c \in \mathbb{R}^+$, si volesse assegnare una *interpretazione geometrica*, cosa potrebbe esprimere "$\sqrt{E}/4$" e sotto quali condizioni?

Antonio Giuranna - Galatone

RISOLUZIONE

di Enrico Jannelli del L. Sc. "Fermi" di BARI

a) Sviluppando la prima delle tre espressioni di E si ha
$$E = 4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2 = \left[2ab + a^2+b^2-c^2\right]\cdot\left[2ab - a^2 - b^2 + c^2\right] =$$
$$= \left[(a+b)^2 - c^2\right]\cdot\left[c^2 - (a-b)^2\right] =$$
$$E = (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b). \qquad (*)$$
Operando in modo analogo sulle altre espressioni di E, si ottengono gli stessi quattro fattori del prodotto (*) e quindi l'asserto del punto *a)* è dimostrato.

b) Se $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ essi possono benissimo considerarsi come le misure dei lati di un triangolo.
Posto $a+b+c = 2p$ $(\Rightarrow p \in \mathbb{R}^+)$, la (*) si può scrivere
$$E = 2p\cdot 2(p-c)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-a) = 16\,p(p-a)(p-b)(p-c).$$
Pertanto $\sqrt{E}/4 = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ rappresenta l'area di un triangolo i cui lati hanno per misure a, b, c con la doppia limitazione $|b-c| < a < b+c$, e con le altre due analoghe, deducibili per sostituzione ciclica, che implicano anche $\sqrt{E} = \mathbb{R}^+$.

QUESTIONE 201

Dimostrare che in un quadrilatero qualunque ABCD circoscritto ad un cerchio, la differenza dei rettangoli dei lati opposti è equivalente al rettangolo della somma e della differenza dei segmenti congiungenti i punti medi dei lati opposti; cioè detti M, N, P, Q i punti medi dei lati AB, BC, CD, DA si ha:
$$AB\cdot CD - BC\cdot DA = (MP+NQ)(MP-NQ)$$

RISOLUZIONE

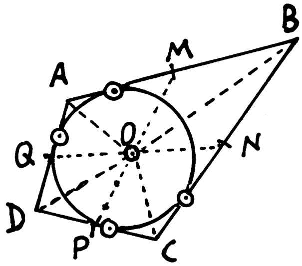
di Marco Longinetti del L. Sc. "L. da Vinci" di FIRENZE

Sia ABCD un quadrilatero circoscritto ad un cerchio e siano M, N, P, Q i punti medi dei lati AB, BC, CD, DA.
I segmenti MP ed NQ, per la proprietà (*) ricordata a pag. 7 sono diagonali di un parallelogramma e quindi si

tagliano scambievolmente per metà.

Si ha: $OM = OP$ e $ON = OQ$.

Inoltre per il teor. della mediana (**) dai triangoli AOB, COD si ha:



$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \frac{1}{2}\overline{AB}^2 + 2\cdot\overline{OM}^2$$

$$\overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = \frac{1}{2}\overline{CD}^2 + 2\cdot\overline{OD}^2$$

Sommando membro a membro e tenendo presente che $\overline{OM} = \overline{OP} = \frac{1}{2}\overline{MP}$ si deduce:

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = \frac{1}{2}\left(\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2\right) + \overline{MP}^2 \qquad (1)$$

Analogamente, dai triangoli BOC, AOD, si ha

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = \frac{1}{2}\left(\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2\right) + \overline{NQ}^2 \qquad (2)$$

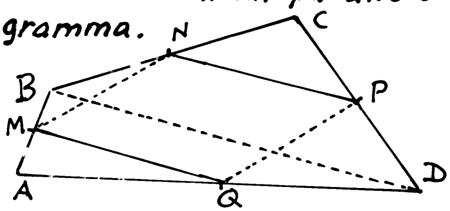
Ne segue $\frac{1}{2}\left(\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2\right) + \overline{MP}^2 = \frac{1}{2}\left(\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2\right) + \overline{NQ}^2$ (3)

E poichè il quadrilatero è circoscritto ad un cerchio si ha anche $AB + CD = BC + AD$. (4)

Elevando a quadrato ambo i membri della (4) e dividendo per 2 si ha:

$$\frac{1}{2}\left(\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2\right) + \overline{AB}\cdot\overline{CD} = \frac{1}{2}\left(\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2\right) + \overline{BC}\cdot\overline{AD} \qquad (5)$$

* TEOREMA. *I punti medi dei lati di un quadrilatero qualsiasi, non intrecciato, sono vertici di un parallelogramma.*



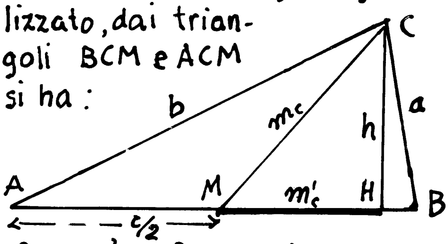
$\begin{cases} NP \parallel BD \\ NP = \frac{1}{2}BD \end{cases}$ $\begin{cases} MQ \parallel BD \\ MQ = \frac{1}{2}BD \end{cases}$

$\Rightarrow NP \parallel MQ$ e $NP = MQ$

$\Rightarrow MNPQ$ è un parallelogramma

** TEOREMA della MEDIANA

Per il teor. di Pitagora (generalizzato, dai triangoli BCM e ACM si ha:



$$\left.\begin{aligned} a^2 &= \left(\frac{c}{2}\right)^2 + m_c^2 - c\,m'_c \\ b^2 &= \left(\frac{c}{2}\right)^2 + m_c^2 + c\,m'_c \end{aligned}\right\}$$ Sommando membro a membro

$$\boxed{a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2\,m_c^2} \;**$$

Sottraendo membro a membro dalla (3) la (5) si ha

$$\overline{MP}^2 - \overline{AB}\cdot\overline{CD} = \overline{NQ}^2 - \overline{BC}\cdot\overline{AD}$$

da cui

$$\overline{MP}^2 - \overline{NQ}^2 = \overline{AB}\cdot\overline{CD} - \overline{BC}\cdot\overline{AD}$$

ovvero

$$(\overline{MP}+\overline{NQ})(\overline{MP}-\overline{NQ}) = \overline{AB}\cdot\overline{CD} - \overline{BC}\cdot AD.$$

c.d.d.

QUESTIONE 202

Risolvere l'equazione $x^3+6x^2+9x+2+\sqrt{2}=0$. (1).

RISOLUZIONE

di G. Guarato di VALDAGNO, F. Fogliotti di GENOVA-SAMP. e M. Longinetti del L. Sc. "L. da Vinci" di FIRENZE

Un'equazione di grado n in x

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + p = 0$$

si può trasformare in un'altra che manchi del termine di grado $n-1$, ponendo $x = y - \frac{b}{na}$.

Ponendo nell'equazione data $x = y-2$ si ha

$$(y-2)^3 + 6(y-2)^2 + 9(y-2) + 2 + \sqrt{2} = 0$$

ovvero

$$f(y) = y^3 - 3y + \sqrt{2} = 0 \qquad (2)$$

Quest'ultima è soddisfatta per $y=\sqrt{2}$.

Infatti $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 - 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = \dots = 0$,

e si può quindi scrivere

$$(y-2)(y^2+\sqrt{2}y-1) = 0 \quad ; \qquad (3)$$

essa si scinde nelle due equazioni:

$$y-2=0 \quad , \quad y^2+\sqrt{2}y-1=0$$

che forniscono le radici reali:

$$y_1 = \sqrt{2}, \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}, \quad y_3 = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}.$$

Per conseguenza le radici dell'equazione data sono:

$$x_1 = \sqrt{2}-2 \quad , \quad x_2 = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} - 2 \quad , \quad x_3 = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} - 2$$

Registrato presso il Tribunale di Firenze al n. 2051 in data 13 gennaio 1970
Direttore responsabile: *Giuseppe Spinoso*

Stampato dalla Tip. "G. Capponi" - Firenze

Associato all'USPI
Unione Stampa Periodica Italiana

L'ELENCO DEI RISOLUTORI DELLE QUESTIONI 200, 201 e 202
SARA' INCLUSO NEL FASCICOLO 12, a pag. 12.